

Az ideális Bose-gáz termodinamikai mennyiségei

Kiegészítés III. éves BSc fizikusok számára

Cserti József
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2016. február

1. Néhány alapvető formula

1.1. Bose-Einstein integrál:

$$g_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{\frac{1}{z} e^x - 1}, \quad (1)$$

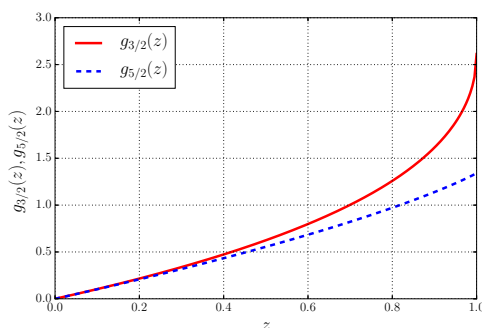
$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1} = g_s(1). \quad (2)$$

A $g_s(z)$ függvényt az irodalomban polylogaritmus függvénynek (Polylogarithm function) is nevezik, és a jelölése: $Li_s(z)$:

$$g_s(z) \equiv Li_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s} + \dots \quad (3)$$

$$g_{3/2}(1) = \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \quad g_{5/2}(1) = \zeta\left(\frac{5}{2}\right). \quad (4)$$

1.2. A $g_s(z)$ függvény:



1. ábra. A $g_s(z)$ függvények.

2. Termodinamikai mennyiségek hőmérsékletfüggése

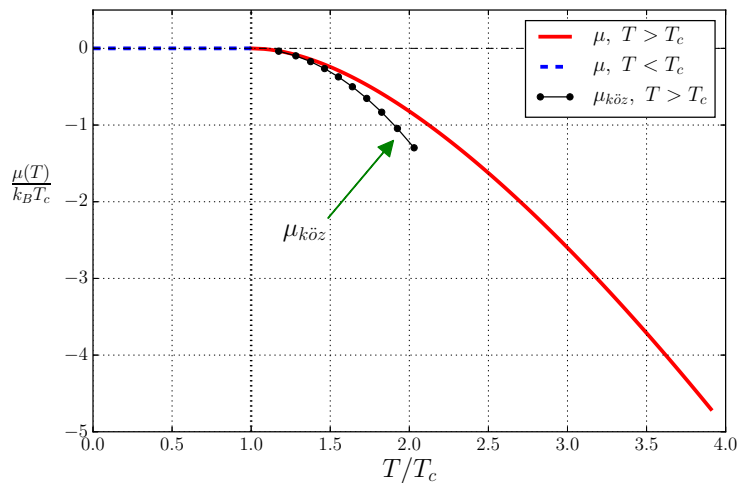
Az alábbiakban az N részecskeszám rögzített. A számolások részletei az Appendix A-ban találhatóak. A kritikus hőmérséklet felett ($T > T_c$) szükségünk lesz a hőmérséklet és a kémiai potenciál kapcsolatára:

$$\frac{T}{T_c} = \left(\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(z)} \right)^{2/3}, \text{ ahol } z = e^{\beta\mu} \text{ és } 0 \leq z \leq 1. \quad (5)$$

2.1. A kémiai potenciál hőmérsékletfüggése:

$$\frac{\mu}{k_B T_c} = \frac{T}{T_c} \ln(z), \quad (6)$$

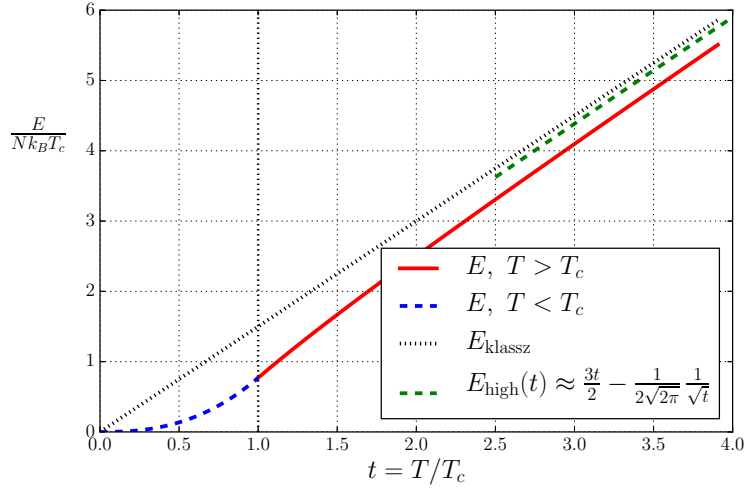
$$\mu_{\text{köz}} \approx - \left(\frac{3 \zeta(\frac{3}{2})}{4 \sqrt{\pi}} \right)^2 \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right)^2, \text{ ha } T > T_c. \quad (7)$$



2. ábra. A kémiai potenciál hőmérsékletfüggése.

2.2. Az energia hőmérsékletfüggése:

$$E(T) = \begin{cases} \frac{3}{2} N k_B T_c \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, & T > T_c, \\ \frac{3}{2} N k_B T_c \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}, & T < T_c. \end{cases} \quad (8)$$



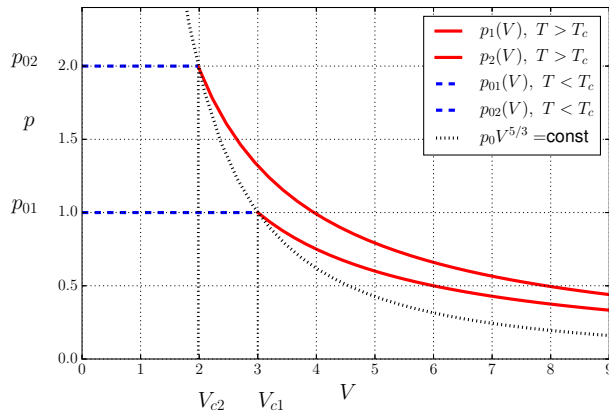
3. ábra. Az energia hőmérsékletfüggése.

2.3. Izotermák:

$$p(V) = \begin{cases} \frac{Nk_B T}{V} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, & V > V_c, \\ p_0 = \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta(5/2), & V < V_c, \end{cases}, \text{ ahol} \quad (9)$$

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad \text{és} \quad \frac{V_c}{N} = \frac{\lambda_T^3}{\zeta(5/2)} \quad (10)$$

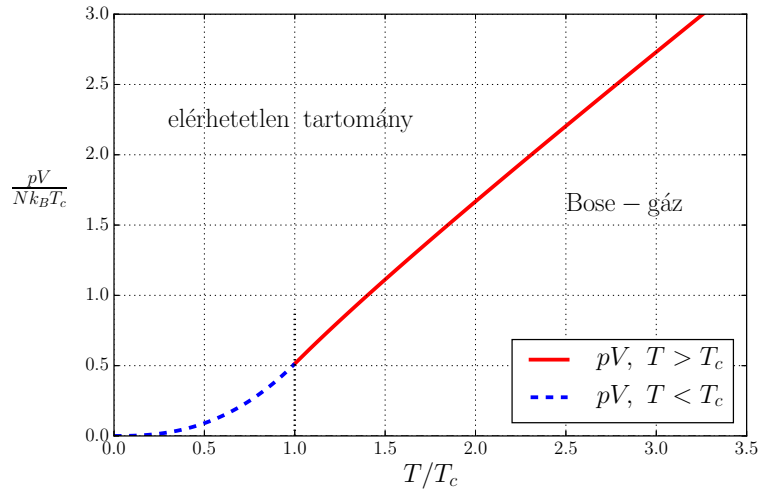
a termikus de Broigle-hullámhossz és a kritikus térfogat. Ha $V < V_c$, akkor p nem függ V -től, ekkor $p_0 \sim T^{5/2}$. **Adiabata egyenlete:** $p_0 V_c^{5/3} = \text{állandó}$.



4. ábra. Izotermák.

2.4. $p - T$ diagram:

$$pV = \frac{2}{3} E = \begin{cases} Nk_B T_c \left(\frac{T}{T_c}\right) \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, & T > T_c, \\ Nk_B T_c \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}, & T < T_c. \end{cases} \quad (11)$$

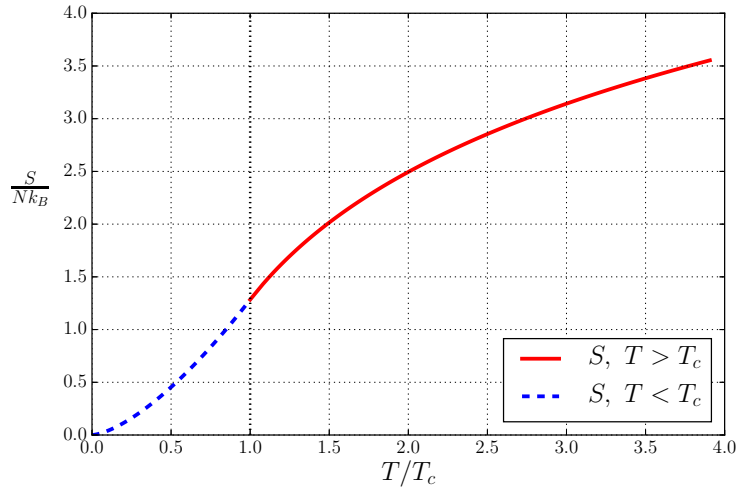


5. ábra. $p - T$ diagram.

2.5. Az entrópia hőmérsékletfüggése:

$$S = \frac{E + pV - \mu N}{T} = \frac{5}{3} \frac{E}{T} - Nk_B \ln z,$$

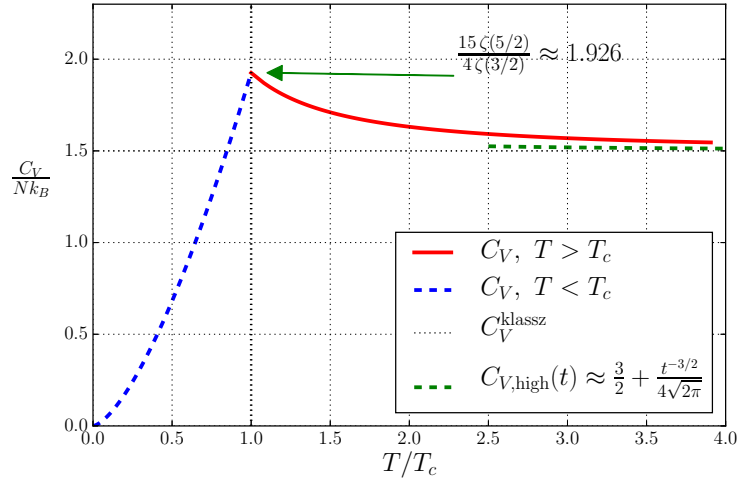
$$\frac{S(T)}{Nk_B} = \begin{cases} \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \ln(z), & T > T_c, \\ \frac{5}{2} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}, & T < T_c. \end{cases} \quad (12)$$



6. ábra. Az entrópia hőmérsékletfüggése.

2.6. Állandó térfogaton vett fajhő hőmérsékletfüggése:

$$\frac{C_V(T)}{Nk_B} = \begin{cases} \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}, & T > T_c, \\ \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}, & T < T_c. \end{cases} \quad (13)$$

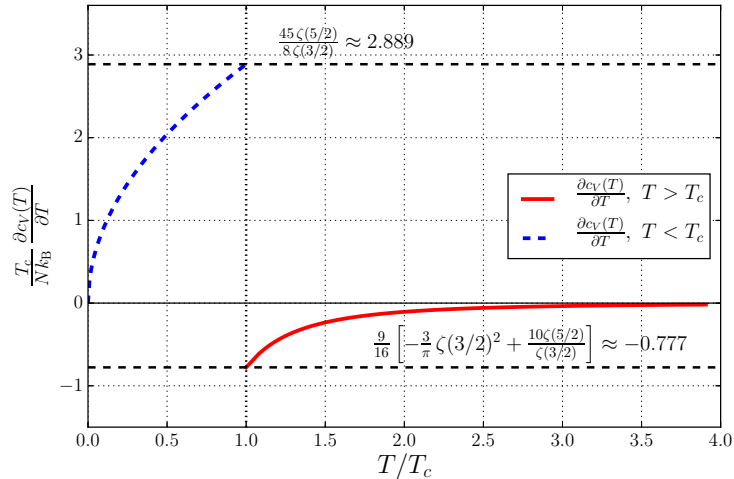


7. ábra. Állandó térfogaton vett fajhő hőmérsékletfüggése.

2.7. $\frac{\partial C_V(T)}{\partial T}$ hőmérsékletfüggése:

$$\frac{\partial C_V(T)}{\partial T} = \begin{cases} \frac{Nk_B}{T} \left(\frac{45}{8} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} - \frac{27}{8} \frac{[g_{3/2}(z)]^2 g_{-1/2}(z)}{[g_{1/2}(z)]^3} \right), & T > T_c, \\ \frac{Nk_B}{T_c} \frac{45\zeta(5/2)}{8\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{1/2}, & T < T_c, \end{cases} \quad (14)$$

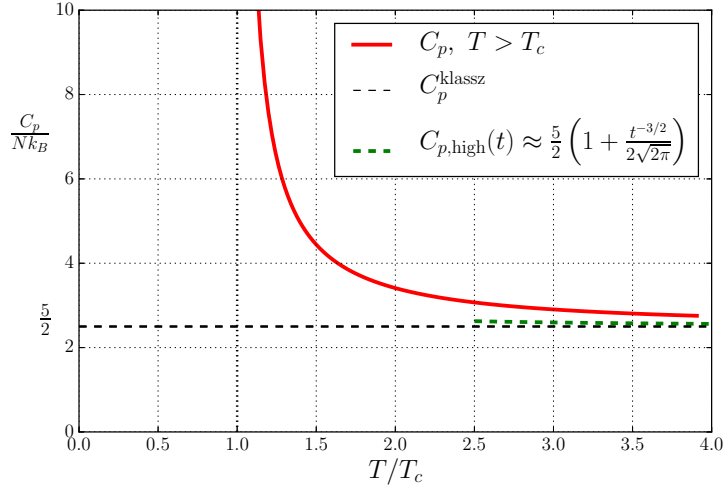
$$\left. \frac{\partial C_V}{\partial T} \right|_{T=T_c-0} - \left. \frac{\partial C_V}{\partial T} \right|_{T=T_c+0} = \frac{27}{16\pi} \frac{Nk_B}{T_c} \left[\zeta \left(\frac{3}{2} \right) \right]^2 \approx 3.666 \frac{Nk_B}{T_c}. \quad (15)$$



8. ábra. $\frac{\partial C_V(T)}{\partial T}$ hőmérsékletfüggése.

2.8. Az állandó nyomáson vett fajhő hőmérsékletfüggése:

$$\frac{C_p(T)}{Nk_B} = \frac{25}{4} \frac{[g_{5/2}(z)]^2 g_{1/2}(z)}{[g_{3/2}(z)]^3} - \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, \quad T > T_c. \quad (16)$$



9. ábra. Állandó nyomáson vett fajhő hőmérsékletfüggése.

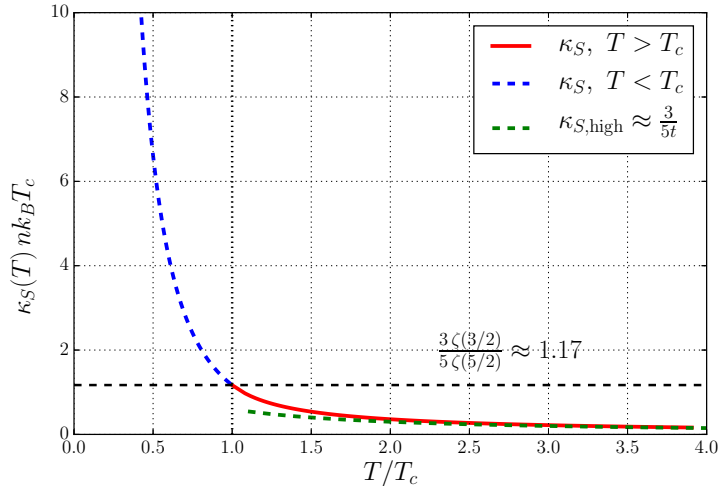
Megjegyzés: $T < T_c$ esetén a c_p fajhő nincs értelmezve, mert ekkor p =állandó, és így T = állandó.

2.9. Adiabatus kompresszibilitás hőmérsékletfüggése:

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{S,N},$$

$$\kappa_S(T) = \frac{1}{nk_B T_c} \begin{cases} \frac{3g_{3/2}(z)}{5g_{5/2}(z)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{-1} & T > T_c, \\ \frac{3\zeta(3/2)}{5\zeta(5/2)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{-5/2}, & T < T_c, \end{cases} \quad (17)$$

ahol $n = N/V$.



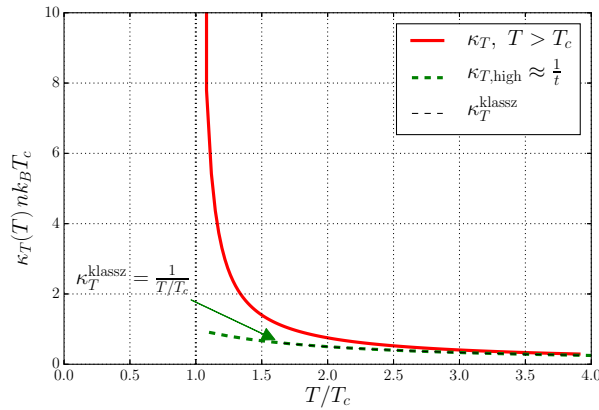
10. ábra. Adiabatus kompresszibilitás hőmérsékletfüggése.

2.10. Izotermikus kompresszibilitás hőmérsékletfüggése:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{T,N},$$

$$\kappa_T(T) = \frac{1}{nk_B T} \frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, \quad T > T_c. \quad (18)$$

ahol $n = N/V$.



11. ábra. Izotermikus kompresszibilitás hőmérsékletfüggése.

Megjegyzés: $T < T_c$ esetén a c_p fajhő nincs értelmezve, mert ekkor $p = \text{állandó}$, és így $T = \text{állandó}$.

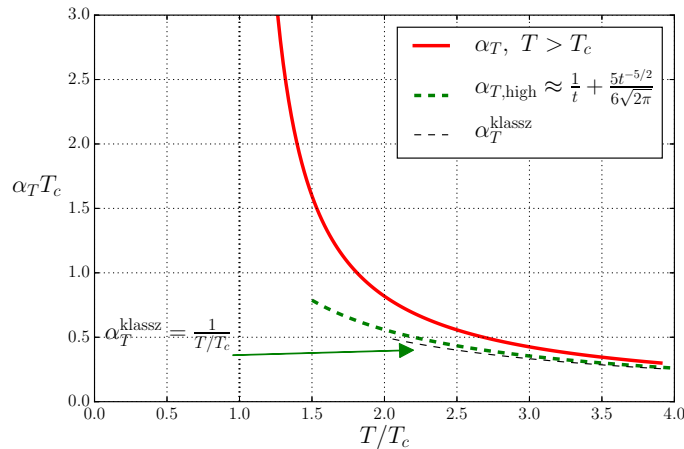
2.11. Hőtágulási együttható hőmérsékletfüggése:

$$\alpha_T = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_{p,N},$$

$$\alpha_T(T) = \frac{1}{T} \left(\frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{[g_{3/2}(z)]^2} - \frac{3}{2} \right), \quad T > T_c. \quad (19)$$

Magashőmérsékleti közelítésben $\alpha_T^{\text{klassz}}(T) = 1/T$.

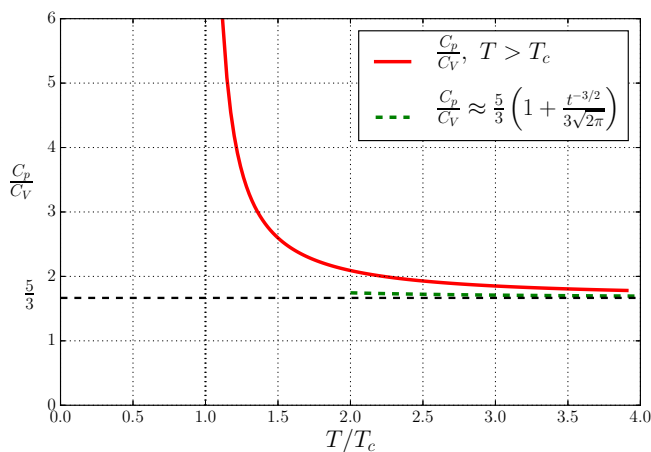
Megjegyzés: $T < T_c$ esetén a c_p fajhő nincs értelmezve, mert ekkor $p = \text{állandó}$, és így $T = \text{állandó}$.



12. ábra. Hőtágulási együttható hőmérsékletfüggése.

2.12. $\frac{C_p}{C_V}$ hőmérsékletfüggése:

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{[g_{3/2}(z)]^2}, \quad T > T_c. \quad (20)$$



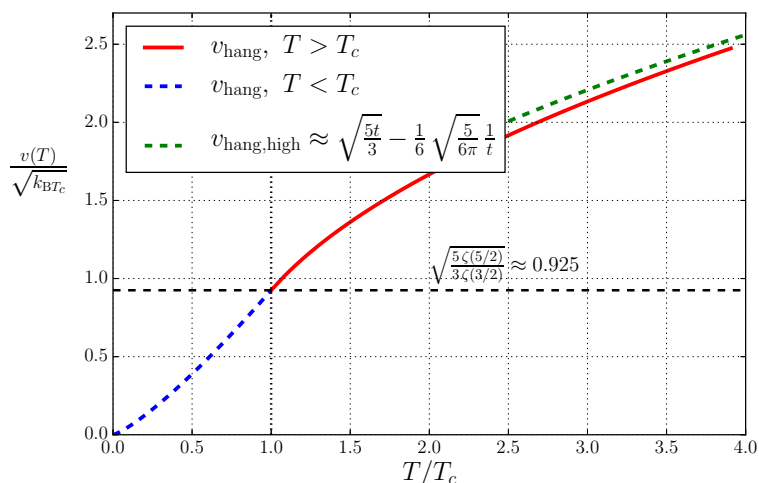
13. ábra. $\frac{C_p}{C_V}$ hőmérsékletfüggése.

Megjegyzés: $T < T_c$ esetén a c_p fajhő nincs értelmezve, mert ekkor $p = \text{állandó}$, és így $T = \text{állandó}$.

2.13. Hangsebesség hőmérsékletfüggése:

$$v_{\text{hang}}(T) = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{S,N}} = \sqrt{\frac{V}{mN} \frac{1}{\kappa_S}}, \text{ ahol } \varrho = mN/V \text{ a tömegsűrűség.}$$

$$\frac{v_{\text{hang}}(T)}{\sqrt{\frac{k_B T_c}{m}}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{5g_{5/2}(z)}{3g_{3/2}(z)} \frac{T}{T_c}}, & T > T_c, \\ \sqrt{\frac{5\zeta(5/2)}{3\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2}}, & T < T_c. \end{cases} \quad (21)$$



14. ábra. Hangsebesség hőmérsékletfüggése.

3. Irodalom:

1. R. K. Pathria: Statistical Mechanics, 2nd Edition, 1996, Bunerworth-Heinemann Linacre House
2. Linda E. Reichl: A Modern Course in Statistical Physics 2nd Edition, 1998, Wiley-VCH

3. Franz Schwabl: Statistical Mechanics, 2000, Springer-Verlag, Berlin

4. K. Huang: Statistical Mechanics, 2nd Edition, 1987, John Wiley & Sons