

# Fresnel- és Fraunhofer-elhajlás (diffrakció)

## Kiegészítés II. éves fizikusok számára

Cserti József

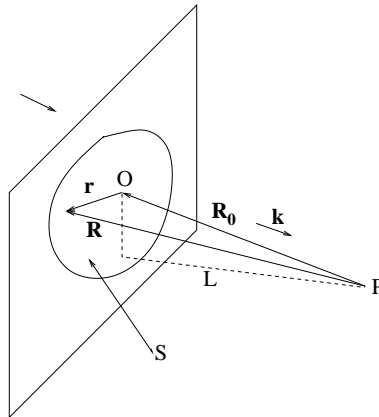
Eötvös Loránd Tudományegyetem,  
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2005. október 17.

Rések és akadályok mellett elhaladó hullámok terjedése eltér a geometriai optika alapján várt sugármenettől. A jelenséget elvben a *Maxwell-egyenletek* és az akadályok által meghatározott *határfeltételek* alapján írhatjuk le, de ez általában nehéz feladat. Közelítő megoldás a *Huygens-Fresnel-elvből* (1819) számolható ki [1]. Az elmélet szerint az akadálynál a továbbhaladó hullám amplitúdója zérus, míg ahol nincs akadály ott az átengedett hullámfront minden pontja egy gömbhullám forrása, és a továbbhaladó hullámfelület ezen gömbhullámok eredője (szuperpozíciója). Az 1. ábrán látható  $P$  megfigyelési pontban, a bejövő  $k = 2\pi/\lambda$  hullámszámú ( $\lambda$  a hullámhossz) monokromatikus síkhullámnak a résen történő diffrakciója következtében kialakuló  $U(P)$  amplitúdója, a Huygens-Fresnel-elv alapján, a következő egyenletből számolhatjuk ki [2, 3]:

$$U(P) = C \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) \frac{e^{ikR}}{R} \cos\vartheta, \quad (1)$$

ahol  $R = |\mathbf{R}|$  a  $P$  megfigyelési pont és az  $S$  rés  $\mathbf{r}$  helyvektorral adott pontja közti távolság, és  $\cos\vartheta$  az ún. *ferdeségi tényező* (angolul *obliquity* vagy *inclination factor*), ahol  $\vartheta$  az  $\mathbf{R}$  vektor és a rés  $\mathbf{r}$  pontjában a rés normálisa közötti szög. A  $C = k/(2\pi i) = -i/\lambda$  konstans úgy határozható meg, hogy ha nincs akadály, akkor vissza kell kapni a bejövő síkhullámot (lásd [1] könyv 59. §-át). Végül  $U(\mathbf{r})$  a rés  $\mathbf{r}$  pontjában a hullám amplitúdója (de lehet a résben lévő „tárgy” komplex áteresztőképessége is). A ferdeségi tényező általában egységnyiinek vehető, ha a megfigyelési pont sokkal nagyobb a rés méreténél. A Huygens-Fresnel-elv levezethető a *Kirchhoff-féle skalár diffrakciós elméletből* (a matematikai részletek megtalálhatók például Jackson, illetve Hecht könyvében [2, 3]). Itt jegyezzük meg, hogy a Kirchhoff-féle elmélet tovább fejleszthető, amely figyelembe veszi a fény polarizációját, a fény elektromágneses térjellegét is. Ez az ún. *Kirchhoff-féle vektor diffrakciós elmélet*, melynek részletei szintén Jackson könyvében találhatók meg [2].



1. ábra. Akadályon áthaladó gömbhullámok. A balról bejövő síkhullám az  $S$  résen elhajlik. Az  $O$  pont a vonatkoztatási pont a résben,  $L$  a rés és a  $P$  pont távolsága,  $\mathbf{r}$  a rés egy tetszőleges pontja.

Feltesszük, hogy a rés mérete sokkal kisebb, mint a rés és a megfigyelési pont közti távolság, azaz  $|\mathbf{r}| \ll R_0$ . Ekkor  $R = |\mathbf{R}|$ -t  $\mathbf{r}$ -ben másodrendig sorfejtve kapjuk:

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(\mathbf{R}_0 + \mathbf{r})^2} = R_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\mathbf{R}_0 \mathbf{r}}{R_0^2} + \frac{\mathbf{r}^2}{R_0^2}} \approx R_0 \left( 1 + \frac{\mathbf{R}_0 \mathbf{r}}{R_0^2} + \frac{\mathbf{r}^2}{2R_0^2} - \frac{1}{4} \frac{(\mathbf{R}_0 \mathbf{r})^2}{R_0^4} \right), \quad (2)$$

ahol felhasználtuk a jól ismert közelítést  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2$ , ha  $x \ll 1$ . Mivel  $\mathbf{k}/|\mathbf{k}| = -\mathbf{R}/|\mathbf{R}| \approx -\mathbf{R}_0/|\mathbf{R}_0|$ , és így  $kR \approx kR_0 - \mathbf{k}\mathbf{r} + \frac{k}{2R_0}r^2 + \frac{1}{4}\frac{(\mathbf{k}\mathbf{r})^2}{kR_0}$ . Ezt a közelítést az (1) egyenletbe írva a hullám  $U(P)$  amplitudójára a következőt kapjuk:

$$U(P) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\frac{k}{2R_0}r^2 + \frac{1}{4}\frac{(\mathbf{k}\mathbf{r})^2}{kR_0}}. \quad (3)$$

Az (1) kifejezés nevezőjében nem szerepel a  $k = 2\pi/\lambda$  nagy szorzótényező, ezért az  $R \approx R_0$  közelítést alkalmazhatjuk. Ha a rés jellemző mérete  $D$ , akkor a fázisban az első tagot  $\mathbf{k}\mathbf{r} \sim \frac{D}{\lambda} \sin\theta$ , a második tagot  $\frac{k}{2R_0}r^2 \sim \frac{D^2}{\lambda L}$  becsülhetjük, ahol  $\theta$  a megfigyelés iránya, azaz az  $\mathbf{R}_0$  és az  $\mathbf{R}$  vektorok közti szög, míg a harmadik tag  $\frac{D^2}{\lambda L} \sin^2\theta$  nagyságrendű. Attól függően, hogy a fázisban melyik tag nagyobb kétféle diffrakciót különböztethetünk meg:

**Fresnel-diffrakció:** ebben az esetben a fázisban a második tag lényeges. Ekkor  $L \sin\theta < D$ . A Fresnel-diffrakció akkor látható jól, ha a résre *szemből* nézünk rá ( $\theta \ll 1$ ). Ez az eset valósul meg, ha  $\mathbf{k} \perp \mathbf{r}$ , azaz  $\mathbf{k}\mathbf{r} = 0$ . A fázisban csak a második tag marad. Ekkor a hullám amplitudója a  $P$  pontban:

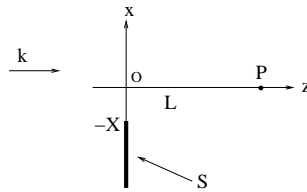
$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{i\frac{k}{2R_0}r^2}. \quad (4)$$

**Fraunhofer-diffrakció:** ebben az esetben  $\mathbf{k}$  irányból (*ferdén*) és  $R_0 \rightarrow \infty$  (*messziről*) nézünk a résre. Csak az első tag lényeges a fázisban. Ekkor az  $U(P)$  amplitudó a résnél lévő hullám amplitudójának a Fourier-transzformációja:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (5)$$

A továbbiakban lássunk néhány feladatot a (4) és az (5) képletek alkalmazására!

1. **Féltér árnyéka.** A 2. ábrán az akadály egy él, ami az  $x - y$  síkban fekszik, és az  $y$  irányban végtelen. A bejövő  $\mathbf{k}$  hullámszámvektorú síkhullám  $z$  irányban halad. Azt kívánjuk meghatározni, hogy a  $P$  pontban hogyan változik az elhajló síkhullám intenzitása miközben a  $P$  pont helyét úgy változtatjuk, hogy a  $z$  koordinátáját rögzítjük, de  $x$  irányban az él szélétől való távolsága változik. A  $\mathbf{k}$  vektor merőleges a rés síkjára (a résre szemben neztünk), ezért az



2. ábra. A balról bejövő síkhullám az  $S$  él szélén elhajlik. A  $P$  megfigyelési pont a  $z$  tengelyen az  $O$  ponttól  $L$  távolságban, míg az  $x$  irányban az él szélétől  $X$  távolságban van. Az él szélének  $x$  koordinátája  $-X$ .

elhajlás a (4) Fresnel-diffrakcióval írható le. Ekkor  $R_0 = L$ ,  $r = x$ ,  $\frac{k}{2R_0} = \frac{\pi}{2} \frac{2}{\lambda L}$ , és a (4) kifejezést felhasználva a hullám amplitudója a  $P$  pontban:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} U_0 \frac{e^{ikL}}{L} \int_{-X}^{\infty} dx e^{i\frac{\pi}{2} \frac{2x^2}{\lambda L}} = -\frac{i}{\lambda} U_0 \sqrt{\frac{\lambda L}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}X}^{\infty} d\eta e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2}, \quad (6)$$

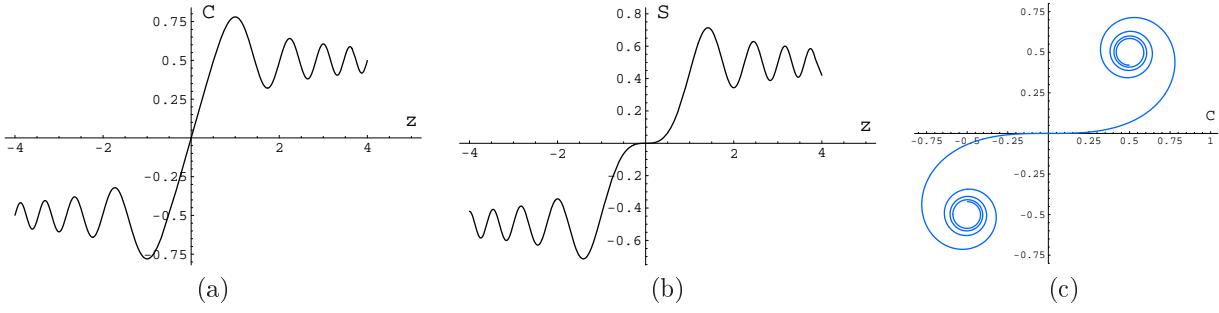
ahol bevezettük az  $\eta = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}x$  új változót, és  $U_0$  a bejövő síkhullám amplitudója. Az utóbbi integrál kifejezhető az ún. Fresnel-integrálokkal:

$$F(z) = \int_0^z d\eta e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} = C(z) + iS(z), \quad \text{ahol} \quad (7)$$

$$C(z) = \int_0^z d\eta \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta^2\right), \quad (8)$$

$$S(z) = \int_0^z d\eta \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta^2\right). \quad (9)$$

A  $C(z)$  és a  $S(z)$  Fresnel-integrálok a *MAPLE*, *MATHEMATICA*, stb. beépített függvényei, és grafikonjai, illetve a nevezetes Cornu-spirál a 3. ábrán láthatók. Felhasználva a Fresnel-integrálokat a (6) kifejezés a következő alakba

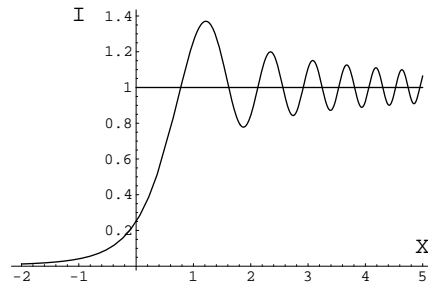


3. ábra. A  $C(z)$  (a),  $S(z)$  (b) Fresnel-integrálok  $z$  függvényében, illetve a Cornu-spirál (c), azaz a  $(C(z), S(z))$  pontok görbéje miközben  $z$ -t változtatjuk.

írható:

$$U(P) = U_0 \left[ F(\infty) - F\left(-\sqrt{\frac{2}{\lambda L}} X\right) \right], \quad (10)$$

ahol  $F(\infty) = (1 + i)/2$ . Az intenzitás  $I = |U(P)|^2$ , és  $X$ -től való függését a 4. ábra mutatja. Az ábrából látható,



4. ábra. Az árnyék „finomszerkezete”: a  $P$  megfigyelési pontban az  $I(P)$  intenzitás  $X$  függése a bejövő síkhullám intenzitásának egységében.  $X$ -et  $\sqrt{\lambda L}/2$  egységeiben mértük.

hogy a geometriai árnyéktérben nem teljesen zérus az intenzitás. A féltér határán ( $X=0$ ) az intenzitás  $I/I_0 = 1/4$ . A fényelhajlás miatt kismértékben ebbe a tartományba is szóródik fény. A megvilágított tartományban az intenzitás csökkenő amplitudóval oszcillál, és asszimptotikusan a bejövő síkhullám intenzitásának értékéhez tart. További részletek találhatóak az [1] könyv 60. §-ban.

2. **Kerek rés a tengelyről nézve.** Tekintsünk egy  $a$  sugarú kör alakú rést, melyet a szimmetriatengelyén lévő pontból nézünk. Mivel a megfigyelés iránya merőleges a rése, azaz  $\mathbf{kr} = 0$ , ismét a Fresnel-difrakció alapján számolhatjuk ki a megfigyelési pontban a hullám intenzitását. Hengerszimmetria miatt a (3) kifejezés az alábbi alakba írható:

$$\begin{aligned} U(P) &= -\frac{i}{\lambda} U_0 \frac{e^{ikL}}{L} \int_0^a 2\pi r dr e^{i\frac{\pi}{\lambda L} r^2} = -iU_0 e^{ikL} \int_0^{\frac{\pi a^2}{\lambda L}} d\xi e^{i\xi} \\ &= U_0 e^{ikL} (1 - e^{i\frac{\pi}{\lambda L} a^2}), \end{aligned} \quad (11)$$

ahol bevezettük a  $\xi = \frac{\pi r^2}{\lambda L}$  új változót, és  $U_0$  a bejövő síkhullám amplitudója. Az intenzitás a megfigyelési pontban:

$$I = |U(P)|^2 = 2U_0^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\lambda L} a^2\right) \right]. \quad (12)$$

Látható, hogy az intenzitás oszcillál  $L$  függvényében. A függelékben egy pontosabb közelítést adunk az intenzitásra.

3. **Kerek akadály a tengelyről nézve.** Vizsgáljuk az előző feladatban szereplő rés „komplementerét”, azaz egy  $a$  sugarú kör alakú akadályon a fényelhajlást! Ebben az esetben csak az integrálási határok változnak:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} U_0 \frac{e^{ikL}}{L} \int_a^\infty 2\pi r dr e^{i\frac{\pi}{\lambda L} r^2}. \quad (13)$$

Az integrál divergens, ezért a „regularizáció” módszerét alkalmazzuk. Feltesszük, hogy az ernyő átteresztőképesége nem 1, hanem  $r$  függvényében exponenciálisan csökken, más szóval az  $U_0 \rightarrow U_0 e^{-\varepsilon \frac{\pi}{\lambda L} r^2}$  helyettesítést vesszük a (13)

integrálban, ahol  $\varepsilon > 0$  egy kicsi, pozitív valós szám. Ekkor a fenti integrál az  $\xi = \frac{\pi r^2}{\lambda L}$  új változóra áttérve így írható:

$$U(P) = -iU_0 e^{ikL} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{\lambda L} a^2}^{\infty} d\xi e^{i\xi - \varepsilon \xi} = -iU_0 e^{ikL} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{(i-\varepsilon)\xi}}{i-\varepsilon} \right]_{\xi=\frac{\pi}{\lambda L} a^2}^{\xi=\infty}. \quad (14)$$

Az  $\xi = \infty$  felső határnál véges  $\varepsilon > 0$ -ra a járulék zérus, és így a hullám amplitudója:

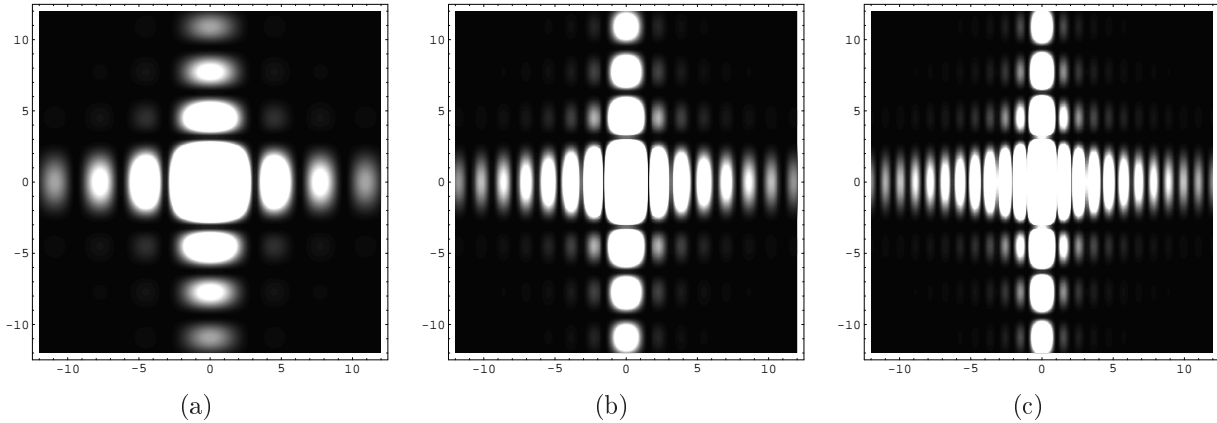
$$U(P) = U_0 e^{ikL} e^{i\frac{\pi}{\lambda L} a^2}, \quad (15)$$

míg az intenzitás a kör alakú rés szimmetriatengelyén lévő megfigyelési pontban  $I = |U(P)|^2 = U_0^2$  konstans, független az akadály sugarától. Ezt a körlap mögött tapasztalható világos foltot „Poisson-foltnak” (gyakran Arago-foltnak) nevezik. A geometriai optika szerint az akadály mögött az árnyéktér miatt az intenzitás zérus. Ugyanakkor a hullámoptika szerint az intenzitás véges a hullámok elhajlása miatt. A függelékben egy pontosabb közelítést adunk az intenzitásra.

4. **Téglalap alakú rés távolról és nem szemből nézve.** Ebben az esetben az (5) kifejezésben a fázis kvadrátikus tagja elhagyható, azaz a hullám elhajlását a Fraunhofer-diffrakcióval írhatjuk le. Elegendő kiszámítani egy  $a$  és  $b$  oldalú téglalap alakú rés Fourier-transzformáltját. Helyezzük a  $(x, y)$  koordináta-rendszer origóját a téglalap közepébe, és a rés  $a$  oldalát az  $x$  tengely irányába! Legyen a megfigyelő felé érkező síkhullám hullámszámvektora az  $(x, y)$  koordináta-rendszerben  $\mathbf{k} = (p, q)$ . Ekkor egyszerű számítással kaphatjuk a  $\mathbf{k}$  irányú síkhullám elhajlását:

$$U(p, q) \sim U_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx e^{ipx} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy e^{iqy} = 4 \frac{\sin \frac{pa}{2}}{p} \frac{\sin \frac{qb}{2}}{q}. \quad (16)$$

Az intenzitás  $I(p, q) = |U(p, q)|^2$ , és a  $\mathbf{k}$  iránytól való függését az 5. ábra mutatja.



5. ábra. Négyzet (a) és téglalap (b,c) alakú rések Fraunhofer-diffrakciója. A téglalap oldalainak aránya a (b) ábrán 2, a (c) ábrán 3. A  $p$ -t és  $q$ -t  $1/a$ , illetve  $1/b$  egységekben mértük.

5. **Kör alakú rés távolról nézve.** A részletes számítás megtalálható a gyakorlat anyagában, illetve a [2–4] könyvekben. Az intenzitás:

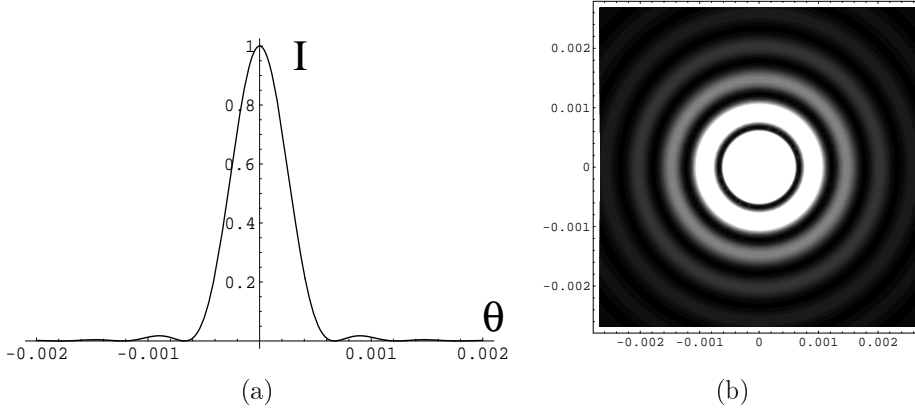
$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} \right)^2, \quad (17)$$

ahol  $\theta$  a megfigyelőhöz érkező párhuzamos fénynyaláb iránya és az  $R$  sugarú rés szimmetriatengelye közti szög,  $J_1(x)$  az elsőrendű Bessel-függvényt jelöli,  $I_0$  az intenzitás a szimmetriatengelyen, míg  $k = 2\pi/\lambda$  a monokromatikus fény hullámszáma. A 6a ábra az intenzitás  $\theta$  függését mutatja, míg a 6b ábra egy ernyőn megfigyelhető Airy-gyűrűk láthatók.

A Bessel-függvények zérushelyéből meghatározhatjuk  $\theta$  értékét az intenzitás első minimum helyén. A  $J_1(x)$  Bessel-függvény első zérushelye  $x_1 = 3.83171 \dots$ , és így  $x_1 = kR \sin(\theta_1)$ , amiből kis  $\theta$  szögekre ( $\sin \theta \approx \theta$ ) kapjuk

$$\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \quad (18)$$

ahol  $D = 2R$  a rés átmérője. A középpontban a maximum egy nagy intenzitású foltot eredményez a diffrakciós képen, melyet *Airy-korong*-nak (Sir George Biddel Airy tiszteletére) vagy *elhajlási korong*-nak neveznek. Az optikai eszközök (lencsék, tükrök, távcsövek, mikroszkópok, szem) foglalatán történő elhajlás miatt is kialakul az Airy-korong, mely meghatározza az optikai eszközök felbontóképességének határát. Párhuzamos fénynyalábot egy  $f$  fókusztávolságú



6. ábra. Az intenzitás  $\theta$  függése Fraunhofer-diffrakció esetén kör alakú résen (a). A fény hullámhosszát  $\lambda = 550$  nm-nek, míg a rés sugarát  $R = 0,5$  mm-nek vettük. Ekkor  $kR = 5712$ . Az intenzitást  $I_0$  egységekben mértük. A (b) ábrán a réstől 1 m-re lévő ernyőn számolt Airy-gyűrűk láthatók.

lencsével leképezve, a fókuszpont nem egzaktul pont, hanem az Airy-korong, melynek sugara  $\varrho = \theta_1 f = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$ . A korong sugarát úgy csökkenthetjük, hogy vagy a hullámhosszt csökkentjük, vagy az optika eszköz méretét ( $D$ ) növeljük. Két távoli pontot akkor különböztethetünk meg, ha a két pont leképezésekor kialakuló megfelelő Airy-korongok nem lapolódnak át. A felbontóképesség határának tekinthető (megállapodás szerint) az az eset, amikor a két korong középpontja éppen a korongok sugara (a két korong „félíg” átlapol). Ekkor két  $\varphi$  szögtávolságban lévő tárgy akkor különböztethető meg, ha  $\varphi \geq \theta_1$ , azaz ha

$$\varphi \geq 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (19)$$

A Palomar-hegyi távcső átmérője  $D = 5.08$  m, és  $\lambda = 550$  nm fényhullámhosszal számolva a felbontóképességre 0.033 szögmásodperc adódik. Ezzel a felbontóképességgel a Holdon két 50 m távolságban lévő tárgyat lehet megkülönböztetni. A szem átmérője  $D = 4$  mm, és így a felbontóképessége 0.6 szögperc. Valójában normális szemnél a felbontóképesség ennél rosszabb, kb. 1 szögperc, ami a retinán lévő csapok sűrűségével függ össze. Ez azt jelenti, hogy ideális feltételek mellett a Holdon kb. 120 Km távolságban lévő pontot lehetne megkülönböztetni.

## Függelék

Ebben a részben egy pontosabb közelítést alkalmazva számoljuk ki a kör alakú résen, illetve akadályon történő Fresnel-diffrakció intenzitását. A két esetet egyszerre kezelhetjük, ha egy olyan gyűrű alakú rést vizsgálunk, amelynek belső és külső sugara  $a_1$ , illetve  $a_2$ . Ekkor az  $a$  sugarú rés, illetve akadály az  $a_1 = 0$  és  $a_2 = a$ , és az  $a_1 = a$  és  $a_2 = \infty$  eseteknek felelnek meg.

Először a szimmetriatengelyen számítjuk ki az intenzitást. Az  $U_0$  amplitudójú bejövő síkhullámnak a résen történő diffrakciója következtében a réstől  $L$  távolságban, a szimmetriatengelyen az amplitudó az (1) alapján:

$$U(L) = -\frac{i}{\lambda} U_0 \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{2\pi} r dr d\varphi \frac{e^{ikR}}{R} \cos \vartheta, \quad (20)$$

ahol  $R = \sqrt{L^2 + r^2}$  és a ferdeségi tényező  $\cos \vartheta = L/\sqrt{L^2 + r^2}$ . Az  $\varphi$ -szerinti integrálás  $2\pi$ -t ad, mivel az integrandus nem függ  $\varphi$ -től (hengerszimmetria). Áttérve az  $r$  integrálási változóról az  $R$ -re,  $RdR = r dr$ , és így

$$U(L) = -\frac{2\pi i}{\lambda} U_0 L \int_{R_1}^{R_2} dR \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (21)$$

ahol  $R_1 = \sqrt{L^2 + a_1^2}$  és  $R_2 = \sqrt{L^2 + a_2^2}$ . Parciális integrálással kapjuk:

$$U(L) = -\frac{2\pi i}{\lambda} U_0 L \left\{ \left[ \frac{e^{ikR}}{ikR} \right]_{R_1}^{R_2} + \int_{R_1}^{R_2} dR \frac{e^{ikR}}{ikR^2} \right\}. \quad (22)$$

A második tag elhanyagolható az elsőhöz képest, ha  $L \gg a$ , hiszen az integrandus  $1/R^2$ -tel arányos. Végül az  $U(L)$  amplitudó és az  $I(L) = |U(L)|^2$  intenzitás:

$$U(L) = U_0 L \left( \frac{e^{ikR_1}}{R_1} - \frac{e^{ikR_2}}{R_2} \right), \quad (23)$$

$$I(L) = U_0^2 L^2 \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} - \frac{2 \cos k(R_2 - R_1)}{R_1 R_2} \right). \quad (24)$$

Egy  $a$  sugarú rés esetén  $a_1 = 0$  és  $a_2 = a$ , azaz  $R_1 = L$ , illetve  $R_2 = \sqrt{L^2 + a^2} \approx L + a^2/(2L)$ , melyeket beírva a fenti két egyenletbe visszkapjuk a korábban kapott (11) és (12) eredményeket. Hasonlóan, egy  $a$  sugarú akadály esetében  $a_1 = a$  és  $a_2 = \infty$ , és a fenti (24) összefüggésből az intenzitás:

$$I(L) = U_0^2 \frac{L^2}{a^2 + L^2}. \quad (25)$$

Látható, hogy a Poisson-folt intenzitása a szimmetriatengelyen nem konstans — amint ezt korábban a (15) amplitudóból kaptuk —, hanem  $L$ -től függ. Csak az  $L \rightarrow \infty$  határátmenetben kapjuk vissza a korábbi konstans  $U_0^2$  intenzitást, de már  $L = 3a$ -ra az intenzitás 90 % -a bejövő intenzitásnak.

Valamivel nehezebb kiszámítani az intenzitást, ha a megfigyelési pont nem a szimmetriatengelyen van. A továbbiakban kiszámoljuk egy kerek akadályon a Fresnel-diffrakciót feltéve, hogy a távoli megfigyelési pontnak a szimmetriatengelytől mért  $r$  távolsága sokkal kisebb az akadály  $a$  sugaránál, azaz  $r \ll a \ll L$  esetben. Legyen az akadály az  $(x, y)$  síkban (a korong szimmetriatengelye a  $z$  tengely), a  $P$  megfigyelési pont koordinátái  $\mathbf{r} = (r, 0, L)$ , és jelölje  $\boldsymbol{\rho} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0)$  a rés egy tetszőleges pontjának koordinátáit! Ekkor a hullám amplitúdója a  $P$  pontban:

$$U(r, L) = -\frac{i}{\lambda} U_0 \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\varphi \frac{e^{ikR}}{R} \cos \vartheta, \quad (26)$$

ahol  $R = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}| = \sqrt{L^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi}$  és  $\cos \vartheta = L/R$ . Az integrandus exponensében  $R$ -t  $1/L$  szerint elsőrendig sorfejtjük:

$$R \approx L \left( 1 + \frac{r^2}{2L^2} + \frac{\rho^2}{2L^2} - \frac{r\rho \cos \varphi}{L^2} \right) \quad (27)$$

A nevezőben az  $R \approx L$  közelítést alkalmazzuk, és a (26) integrálnak felülről való becslése érdekében a ferdeségi tényezőre a legnagyobb értéket vesszük, azaz  $\cos \vartheta \approx L/\sqrt{L^2 + a^2}$ . Így a (26) egyenletből kapjuk:

$$U(r, L) = -\frac{i}{\lambda} U_0 \frac{e^{ikL}}{\sqrt{L^2 + a^2}} e^{ik\frac{r^2}{2L}} \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\varphi e^{ik\frac{\rho^2}{2L}} e^{-ik\frac{kr\rho \cos \varphi}{L}}. \quad (28)$$

A  $\varphi$ -szerinti integrálás elvégezhető a Bessel-függvényekre érvényes  $\int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(x)$  azonosság [5] segítségével:

$$U(r, L) = -\frac{2\pi i}{\lambda} U_0 \frac{e^{ikL}}{\sqrt{L^2 + a^2}} e^{ik\frac{r^2}{2L}} \int_a^\infty \rho d\rho e^{ik\frac{\rho^2}{2L}} J_0\left(\frac{kr\rho}{L}\right). \quad (29)$$

Bevezetve a dimenziótlan  $t = \rho/a$  változót, és az  $u = ka^2/L$ , illetve  $v = kra/L$  dimenziótlan paramétereket, a fenti összefüggés a következő alakba írható:

$$U(r, L) = B \int_1^\infty t dt J_0(vt) e^{\frac{1}{2}iut^2}, \quad (30)$$

ahol  $B = -\frac{2\pi i}{\lambda} a^2 U_0 \frac{e^{ikL}}{\sqrt{L^2 + a^2}} e^{ik\frac{r^2}{2L}}$ . Ismét parciálisan integrálva, és felhasználva a nullad-rendű Bessel-függvény deriváltjára vonatkozó  $dJ_0(x)/dx = -J_1(x)$  azonosságot [5], a fenti integrálra kapjuk:

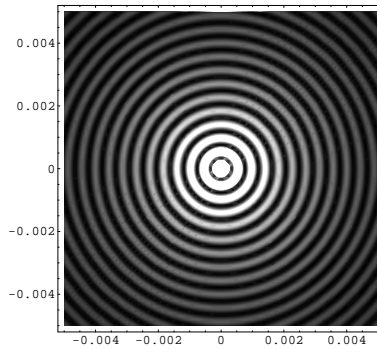
$$U(r, L) = B \left\{ \left[ \frac{J_0(vt)}{iu} e^{\frac{1}{2}iut^2} \right]_1^\infty - i \frac{v}{u} \int_1^\infty dt J_1(vt) e^{\frac{1}{2}iut^2} \right\}. \quad (31)$$

A  $J_n(x)$  Bessel-függvény nagy argumentumra (rögzített  $n$  index mellett) zérushoz tart, azaz  $\lim_{x \rightarrow \infty} J_n(x) = 0$ , és így a kapcsos zárójel első tagjában a felső határ járuléka zérus. Míg a kapcsos zárójel második tagja a  $v/u = r/a \ll 1$  miatt elhanyagolható az elsőhöz képest. Végül a hullám amplitúdója és az intenzitása a  $P$  pontban:

$$U(r, L) = iB \frac{J_0(v)}{u} e^{\frac{1}{2}iu} = U_0 e^{ikL} \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}} e^{ik\frac{r^2 + a^2}{2L}} J_0\left(\frac{kra}{L}\right), \quad (32)$$

$$I(r, L) = |U(r, L)|^2 = U_0^2 \frac{L^2}{L^2 + a^2} J_0^2\left(\frac{kra}{L}\right). \quad (33)$$

Rögzített  $L$  mellett a fenti kifejezés adja az intenzitásnak a szimmetriatengelytől mért radiális függését  $r \ll a$  esetén. Mivel  $J_0(0) = 1$ , a szimmetriatengelyen ( $r = 0$ -ra) visszakapjuk a korábbi (25) eredményt. A 7. ábrán a (33) egyenletből számolt diffrakciós gyűrűk láthatók kerek akadályra. Jól kivehető középen egy fényes tartomány, a Poisson-folt.



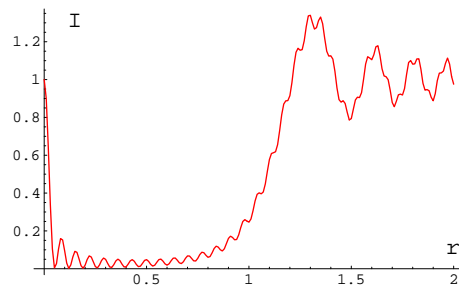
7. ábra. Kerek akadályon történő elhajlás diffrakciós gyűrűi, középen a Poisson-foltal.

Felmerül a kérdés, hogyan diffraktálódik a korong alakú akadályon a bejövő síkhullám, ha a megfigyelési pont távol van a korong szimmetriatengelyétől, azaz ha nem teljesül az  $r \ll a$  feltétel. Ekkor a parciális integrálás után kapott (31) egyenlet kapcsos zárójelében a második tag nem hanyagolható el. Az itt szereplő integrált ismét parciálisan integrálva, és az eljárást tovább folytatva  $v/u$  hatványai szerinti sort kapunk. A sor tagjai magasabb rendű Bessel-függvényeket tartalmaznak, és analitikusan nem lehet kiszámítani. A numerikus számításhoz célszerű először kiszámítani egy  $a$  sugarú rés diffrakcióját, mert ekkor az integrálási tartomány véges. Ebből a *Babinet-elv* alapján számolható ki az  $a$  sugarú korongon történő diffrakció. A Babinet-elv egy résen diffraktáló  $U_1$  amplitudó és a rés „kiegészítőjén” (komplementer résen) diffraktáló  $U_2$  amplitudó között teremt kapcsolatot [1]:

$$U_1 + U_2 = U_0, \quad (34)$$

ahol  $U_0$  a bejövő síkhullám amplitudója a  $P$  pontban, ha elvesszük a rést, és annak komplementerét is. Így a korongon történő diffrakció amplitudója úgy számolhatjuk ki, hogy a (29) egyenletben a  $\varrho$ -szerinti integrálást  $\varrho = 0$  és  $\varrho = a$  határok között számoljuk ki, majd alkalmazzuk a (34) Babinet-elvet.

A 8. ábrán egy  $a = 20\mu\text{m}$  sugarú, kör alakú akadályon történő Fresnel-diffrakció intenzitásának radiális függése látható. Az intenzitás értéke  $r = 0$ -ra megegyezik a (25) képletből számolt értékkel. A korong szélén ( $r \approx a$ ) történő



8. ábra. A Fresnel-diffrakció intenzitásának radiális függése korongra. A korong sugara  $a = 20\mu\text{m}$ ,  $L = 5a$  és  $\lambda = 550$  nm. Az  $r$  radiális távolság  $a$  egységekben van mérve.

diffrakció megérthető a korábban tárgyalt feltételre vonatkozó eredmény alapján. A korong sugara sokkal nagyobb a fény hullámhosszánál, ezért a korong szélén kialakuló diffraktált hullám jó közelítéssel megegyezik a feltételre kapott (10) eredménnyel. Valóban, a numerikus számolás alapján, például  $r = a$ -ra  $I/I_0 = 0.246$ , ami nagyon jól egyezik a feltétel határán kapott  $1/4$  értékkel. A 8. ábra szerint  $r = a$  közelében az intenzitásban kisebb oszcilláció figyelhető meg (ellentétben a feltétel esetével), mely annak következménye, hogy a korong széle véges görbületű. Számos mérést végeztek a Poisson-folt kimutatására és a kör alakú résen, illetve akadályon fellépő elhajlási jelenségek vizsgálatára, és az eredmények igazolják a Fresnel-diffrakcióval történő leírást [6].

## Ajánlott irodalom:

- [1] L. D. Landau és E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika II (Klasszikus erőterek)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- [2] J. D. Jackson: *Klasszikus elektrodinamika*, TypoT<sub>E</sub>X, Budapest, 2004.

- [3] E. Hecht: *Optics*, 4th ed., Adison-Wesley, Reading, 2002. A fizikus könyvtárban a nemkölcsonözhető könyvek közt található.
- [4] A. Nussbaum és R. A. Phillips: *Modern optika mérnököknek és kutatóknak*, Műszaki Könyvkiadó, 1982.
- [5] Horváth Zalán és Tél Tamás: *Elméleti fizikai példatár 2.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. Függelék.
- [6] P. M. Rinard: *Large-scale diffraction patterns from circular objects*, American Journal of Physics, Volume **44**, page 70 (1976); J. E. Harvey and J. L. Forgham: *The spot of Arago: New relevance for an old phenomenon*, American Journal of Physics, Volume **52**, page 243 (1984); D. S. Burch: *Fresnel diffraction by a circular aperture*, American Journal of Physics, Volume **53**, page 255 (1985); E. A. Hovenac: *Fresnel diffraction by spherical obstacles*, American Journal of Physics, Volume **57**, page 79 (1989); G. R. Wein: *A video technique for the quantitative analysis of the Poisson spot and other diffraction patterns*, American Journal of Physics, Volume **67**, page 236 (1999); A. Kolodziejczyk, Z. Jaroszewicz, R. Henao, and O. Quintero: *An experimental apparatus for white light imaging by means of a spherical obstacle*, American Journal of Physics, Volume **70**, page 169 (2002); G. D. Gillen and S. Guha: *Modeling and propagation of near-field diffraction pattern: A more complete approach*, American Journal of Physics, Volume **72**, page 1195 (2004).