

Az ideális Fermi-gáz termodinamikai mennyiségei

Kiegészítés III. éves BSc fizikusok számára

Cserti József
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2017. március

1. Néhány alapvető formula

1.1. Fermi-Dirac integrál:

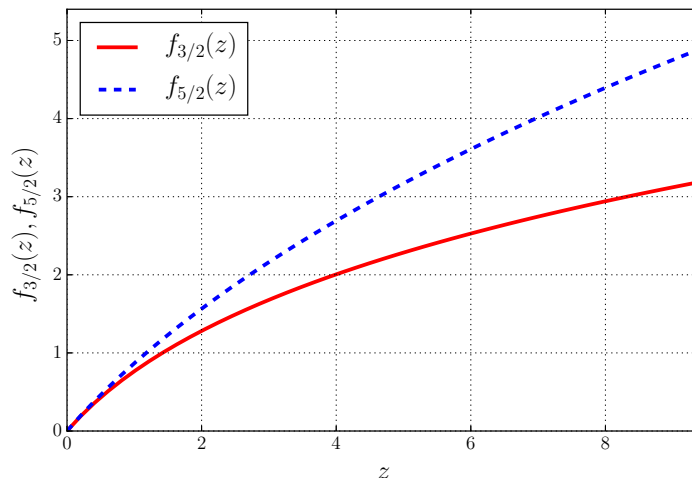
$$f_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{\frac{1}{z} e^x + 1}. \quad (1)$$

A $f_s(z)$ függvényt az irodalomban ismert polylogaritmus függvénnyel kifejezhetjük (Polylogarithm function):

$$f_s(z) = -Li_s(-z), \quad \text{ahol} \quad (2)$$

$$Li_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s} + \dots \quad (3)$$

1.2. A $f_s(z)$ függvény:



1. ábra. A $f_s(z)$ függvények.

2. Termodinamikai mennyiségek hőmérsékletfüggése

Az alábbiakban az N részecskeszám rögzített. A számolások részletei hasonlóak, mint amelyeket a Bose-gázra végeztünk az előadás jegyzetben az Appendix A-ban. A továbbiakban szükségünk lesz a hőmérséklet és a kémiai potenciál kapcsolatára:

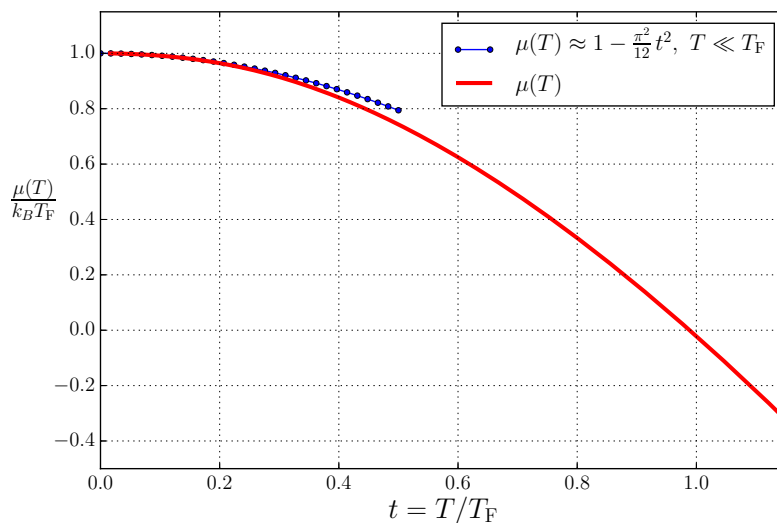
$$\frac{T}{T_F} = \left(\frac{2/3}{\Gamma(3/2)f_{3/2}(z)} \right)^{2/3}, \text{ ahol } z = e^{\beta\mu} \text{ és } 0 \leq z \leq \infty. \quad (4)$$

2.1. A kémiai potenciál hőmérsékletfüggése:

$$\frac{\mu}{k_B T_F} = \frac{T}{T_F} \ln(z), \quad (5)$$

$$\mu_{\text{köz}} \approx E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \text{ ha } T \ll T_F, \quad (6)$$

ahol $E_F = k_B T_F$ a Fermi-energia.

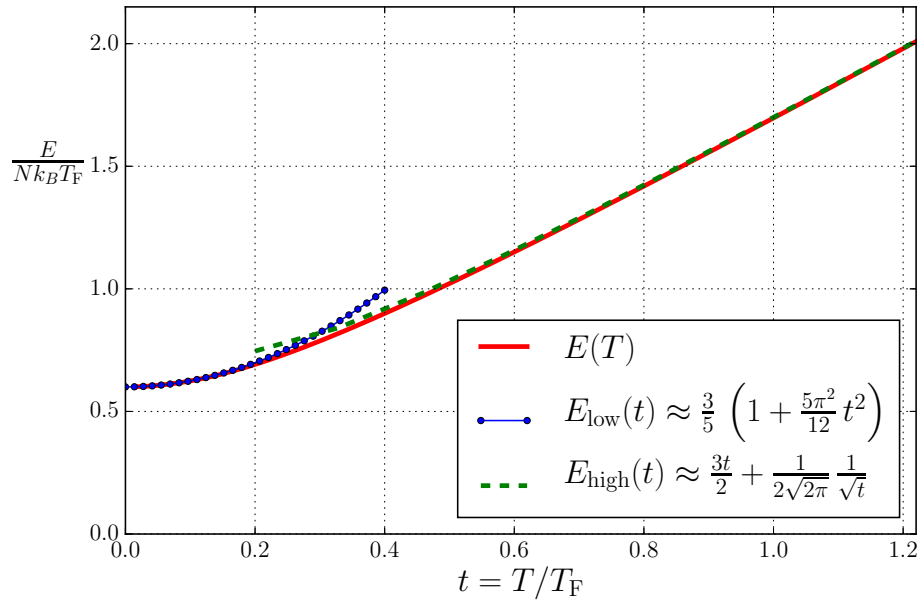


2. ábra. A kémiai potenciál hőmérsékletfüggése.

2.2. Az energia hőmérsékletfüggése:

$$E(T) = \frac{3}{2} N k_B T \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} = \frac{3}{2} N k_B T_F \frac{T}{T_F} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}, \quad (7)$$

$$E_{\text{köz}} \approx \frac{3}{5} E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \text{ ha } T \ll T_F. \quad (8)$$



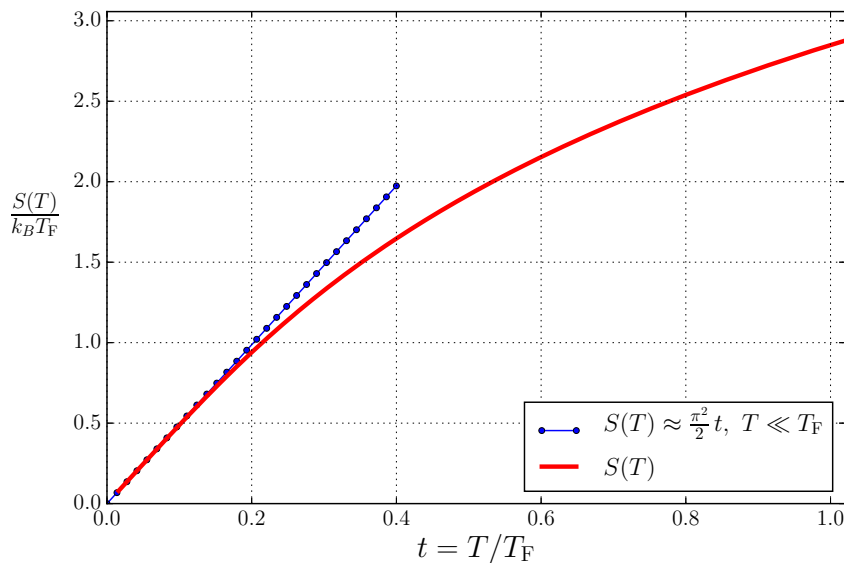
3. ábra. Az energia hőmérsékletfüggése.

2.3. Az entrópia hőmérsékletfüggése:

$S = \frac{E+pV-\mu N}{T} = \frac{5}{3} \frac{E}{T} - Nk_B \ln z$, innen kapjuk

$$\frac{S(T)}{Nk_B} = \frac{5}{2} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \ln(z), \quad (9)$$

$$\frac{S_{\text{köz}}}{Nk_B} \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F}, \text{ ha } T \ll T_F. \quad (10)$$

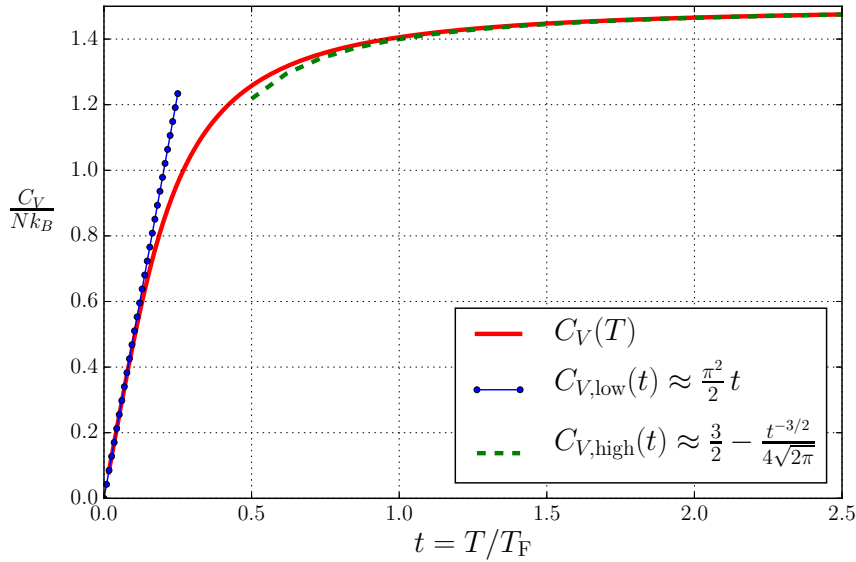


4. ábra. Az entrópia hőmérsékletfüggése.

2.4. Állandó térfogaton vett fajhő hőmérsékletfüggése:

$$\frac{C_V(T)}{Nk_B} = \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)}, \quad (11)$$

$$C_V(T) \approx \frac{\pi^2}{2} Nk_B \frac{T}{T_F}, \quad \text{ha } T \ll T_F. \quad (12)$$

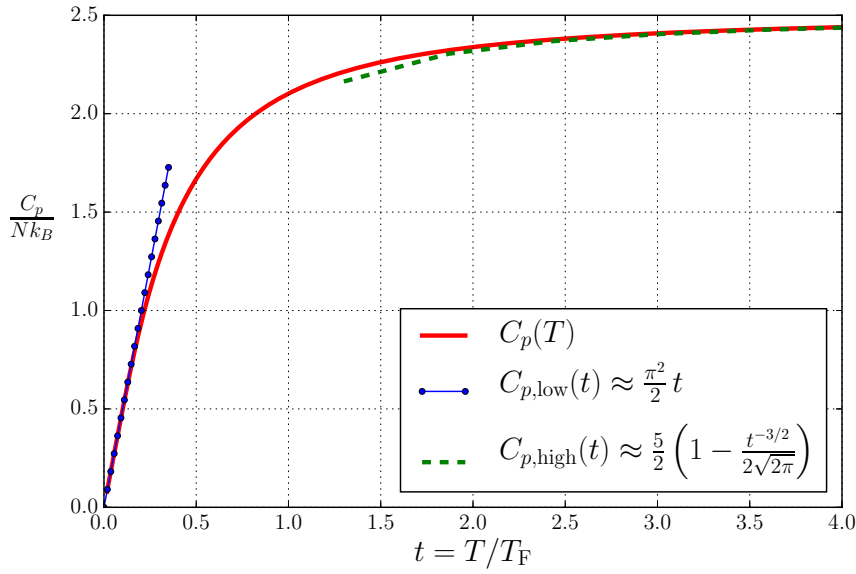


5. ábra. Állandó térfogaton vett fajhő hőmérsékletfüggése.

2.5. Az állandó nyomáson vett fajhő hőmérsékletfüggése:

$$\frac{C_p(T)}{Nk_B} = \frac{25}{4} \frac{[f_{5/2}(z)]^2 f_{1/2}(z)}{[f_{3/2}(z)]^3} - \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}, \quad (13)$$

$$C_p(T) \approx \frac{\pi^2}{2} Nk_B \frac{T}{T_F} \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \quad \text{ha } T \ll T_F. \quad (14)$$

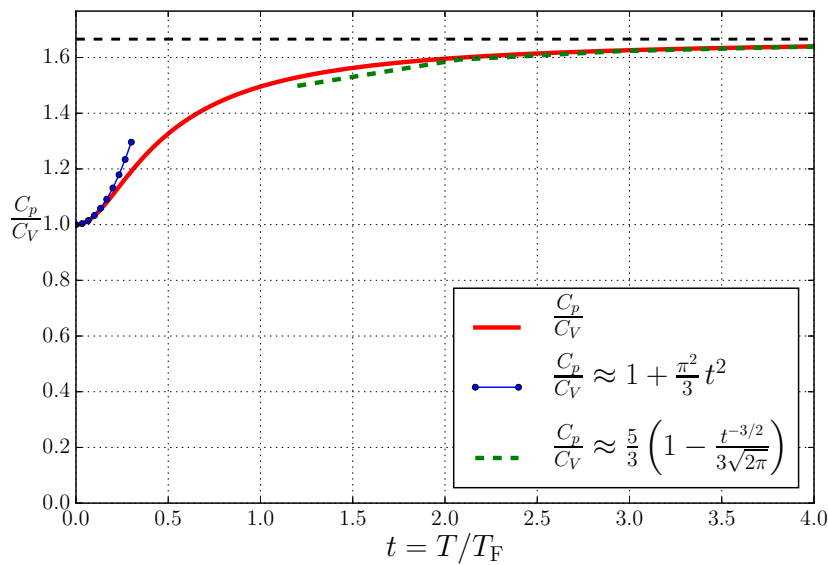


6. ábra. Állandó nyomáson vett fajhő hőmérsékletfüggése.

2.6. $\frac{C_p}{C_V}$ hőmérsékletfüggése:

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3} \frac{f_{5/2}(z)f_{1/2}(z)}{[f_{3/2}(z)]^2}, \quad (15)$$

$$\frac{C_p}{C_V} \approx 1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2, \quad \text{ha } T \ll T_F. \quad (16)$$



7. ábra. $\frac{C_p}{C_V}$ hőmérsékletfüggése.

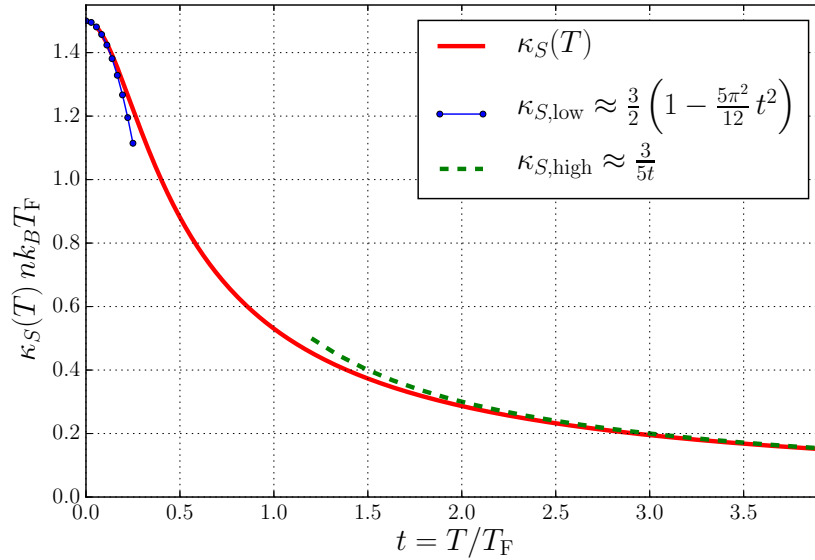
2.7. Adiabatus kompresszibilitás hőmérsékletfüggése:

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{S,N},$$

$$\kappa_S(T) = \frac{1}{nk_B T_F} \frac{3f_{3/2}(z)}{5f_{5/2}(z)} \left(\frac{T}{T_F} \right)^{-1} \quad (17)$$

$$\kappa_S(T) \approx \frac{3}{2nk_B T_F} \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \text{ ha } T \ll T_F. \quad (18)$$

ahol $n = N/V$.



8. ábra. Adiabatus kompresszibilitás hőmérsékletfüggése.

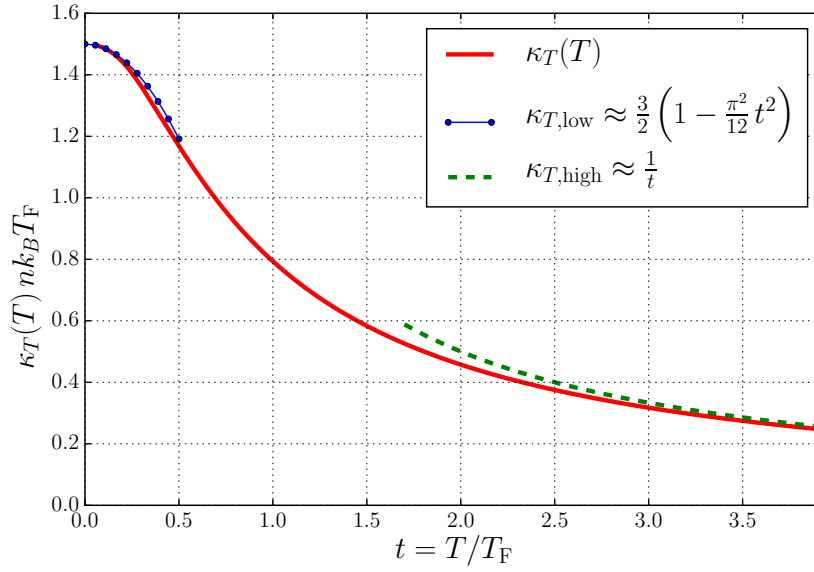
2.8. Izotermikus kompresszibilitás hőmérsékletfüggése:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{T,N},$$

$$\kappa_T(T) = \frac{1}{nk_B T_F} \frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \left(\frac{T}{T_F} \right)^{-1} \quad (19)$$

$$\kappa_T(T) \approx \frac{3}{2nk_B T_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \text{ ha } T \ll T_F. \quad (20)$$

ahol $n = N/V$.



9. ábra. Izotermikus kompresszibilitás hőmérsékletfüggése.

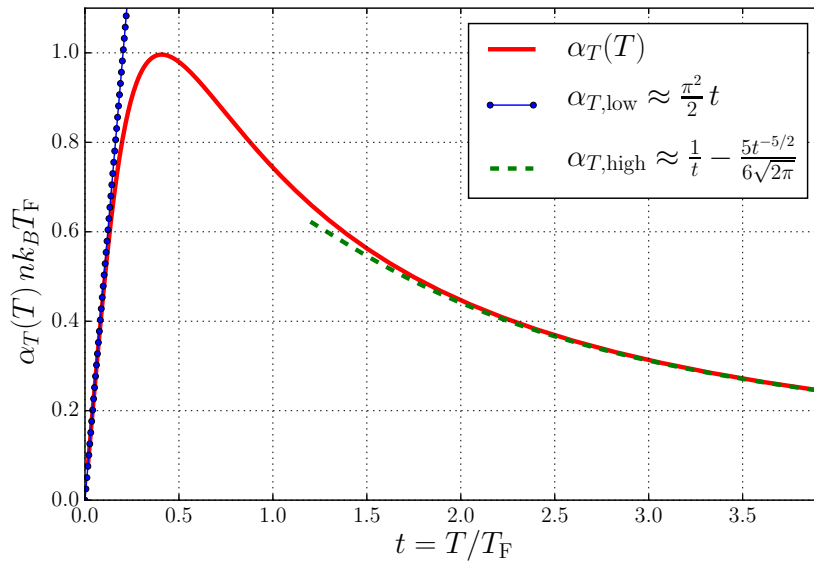
2.9. Hőtágulási együttható hőmérsékletfüggése:

$$\alpha_T = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_{p,N},$$

$$\alpha_T(T) = \frac{1}{T} \left(\frac{5}{2} \frac{f_{5/2}(z) f_{1/2}(z)}{[f_{3/2}(z)]^2} - \frac{3}{2} \right), \quad (21)$$

$$\alpha_T(T) T_F \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \quad \text{ha } T \ll T_F. \quad (22)$$

Magashőmérsékleti közelítésben $\alpha_T^{\text{klassz}}(T) = 1/T$.



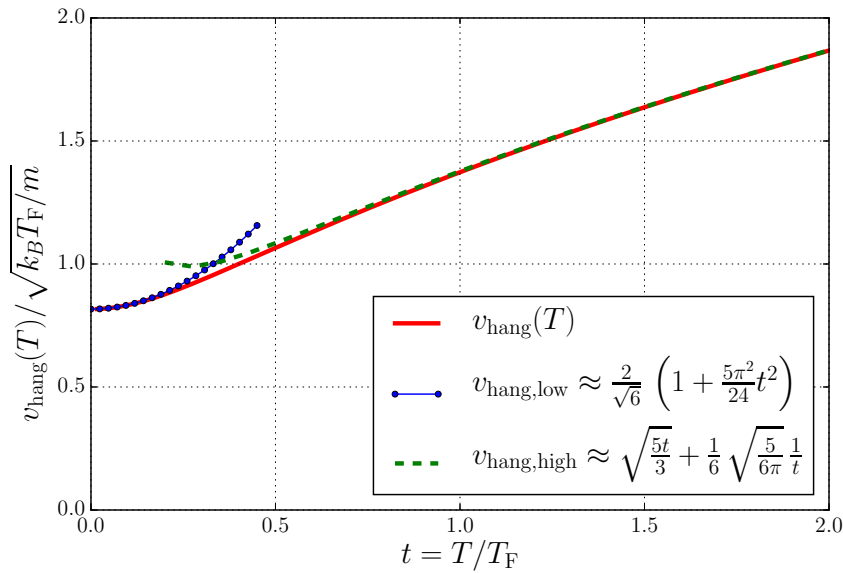
10. ábra. Hőtágulási együttható hőmérsékletfüggése.

2.10. Hangsebesség hőmérsékletfüggése:

$v_{\text{hang}}(T) = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{S,N}} = \sqrt{\frac{V}{mN} \frac{1}{\kappa_S}}$, ahol $\varrho = mN/V$ a tömegsűrűség.

$$\frac{v_{\text{hang}}(T)}{\sqrt{\frac{k_B T_F}{m}}} = \sqrt{\frac{5f_{5/2}(z)}{3f_{3/2}(z)} \frac{T}{T_F}}, \quad (23)$$

$$\frac{v_{\text{hang}}(T)}{\sqrt{\frac{k_B T_F}{m}}} \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \quad \text{ha } T \ll T_F. \quad (24)$$



11. ábra. Hangsebesség hőmérsékletfüggése.

3. Irodalom:

1. R. K. Pathria: Statistical Mechanics, 2nd Edition, 1996, Bunerworth-Heinemann Linacre House
2. Linda E. Reichl: A Modern Course in Statistical Physics 2nd Edition, 1998, Wiley-VCH
3. Franz Schwabl: Statistical Mechanics, 2000, Springer-Verlag, Berlin
4. K. Huang: Statistical Mechanics, 2nd Edition, 1987, John Wiley & Sons