

Hall effektus (2D-ben)

Elektronok 2D síkban mozoghatnak. Ha a síkkal párhuzamos elektromos teret alkalmazunk áram folyik. Az áram iránya általában párhuzamos az elektromos térrel, ha ez az x irány, akkor $\rho_{xx} = E_x / j_x$. Ha síkra merőlegesen mágneses teret kapcsolunk, akkor a Lorentz erő töltésfelhalmozódást (pozitív vagy negatív) hoz létre a minta alsó és felső élein (az y irányban).

Ez, egy az áram irányára merőleges teret jelent (E_y). A Hall ellenállás definíciója $\rho_{xy} = E_y / j_x$.

Szimmetria okokból $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ és $\rho_{xy} = -\rho_{yx}$ (a mágneses tér sérti az időtükrözési szimmetriát).

A klasszikus mechanika alapján $\rho_{xy} \propto B$. Stacionárius esetben a Lorentz erő

$E_y = v_x B_z$, $j_x = ev_x n$, ahol n a töltéshordozók sűrűsége

$$\rho_{xy} = \frac{E_y}{j_x} = \frac{B}{en}$$

Ez például megadja a töltéshordozók sűrűségét és előjelét.

=

Ezt másképpen is levezethetjük:

Tekintsünk egy kétdimenziós transzláció invariáns rendszert. Ebben, egy $-\vec{v}$ sebességgel mozgó rendszerből nézve $\vec{j} = ne\vec{v}$ áramot látunk, ahol n a töltéshordozók sűrűsége és e az elektron töltése. A laboratóriumi rendszerben $\vec{E} = 0$ és $\vec{B} = B\hat{z}$. A mozgó rendszerben $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ és $\vec{B} = B\hat{z}$. Ebből az elektromos tér $\vec{E} = \frac{B}{ne} \vec{j} \times \hat{z}$. Az ellenállás (fajlagos ellenállás) definíciója az áram és az elektromos tér közötti $E^\mu = \rho_{\mu\nu} J^\nu$ kapcsolat. Ebből

$\rho = \frac{B}{ne} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ illetve $\sigma = \frac{ne}{B} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, azaz a longitudinális ellenállás zérus $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0$

és a Hall ellenállás a mágneses térrel arányos $\rho_{xy} = \frac{B}{en}$.

Ez ugyanúgy érvényes nemcsak szabad elektronokra, hiszen a mágneses tér az elektronok energiáját nem változtatja meg, az elektronok ekvienietergetikus pályákon mozognak. Az egyetlen feltétel, hogy a rendszer transzláció invariáns. Ebből a szempontból a periodikus kristály diszkrét transzláció invarianciája ellenére a rendszer transzláció invariánsnak tekinthető.

Szemléletesen: az elektronok ekvienietergetikus pályán mozogva, kiátlagolt sebességük zérus. Ha vannak is nyílt pályák, a transzláció invariancia miatt – amely pl. periódikus határfeltétellel is teljesíthető – azokon is sebesség átlaga zérus. Ha, egy rákapcsolt elektromos tér hatására a tér irányában a drift sebesség már véges. Stacionárius drift áramnál a Lorentz erő zérus, ez csak akkor teljesülhet, ha a mind a mágneses tér mind a mágneses tér irányára merőlegesen egy elektromos tér jelenik meg, pl $E_y - v_{x,drift} B_z = 0$.

Szennyezések szerepe (2D-ben)

A szennyeződések történő elasztikus szóródások hatását egy τ paraméterrel írjuk le, amelyek a két ütközés között eltelt idő átlaga. A mozgásegyenlet

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

A teljes áram

$$\vec{J} = \frac{ne^2}{m}\vec{E} + \frac{e}{m}\vec{J} \times \vec{B} - \frac{\vec{J}}{\tau}$$

A megoldást $\vec{J} = i\omega\vec{J}$ alakban keresve

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \hat{\rho}\vec{J} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 + i\omega\tau & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 + i\omega\tau \end{pmatrix}$$

ahol $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$, $\omega_c = \frac{eB}{m}$

A sztatikus vezetőképesség tenzor

$$\hat{\sigma}(\omega = 0) = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\omega_c\tau \gg 1} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0}{(\omega_c\tau)^2} & \frac{ne}{B} \\ -\frac{ne}{B} & \frac{\sigma_0}{(\omega_c\tau)^2} \end{pmatrix}$$

nagy $\omega_c\tau$ (nagy B) esetén a diagonális tagok elhanyagolhatóak a Hall taghoz képest.

A diagonális tag a következőképpen írható

$$\frac{ne^2}{m} \left(\tau \frac{1}{(\omega_c\tau)^2} \right) = \frac{ne^2}{m} \tau_{eff}$$

ahol $\tau_{eff} = \frac{1}{\omega_c^2\tau}$

Általánosan, ha a τ időnkénti ütközések között megtett út l , akkor a diffúziós konstans $D = lv = v^2\tau$

Esetünkben a tipikus sebesség a Fermi sebesség

$$D = v_F^2\tau_{eff} = \frac{(v_F/\omega_c)^2}{\tau} = \frac{R_c^2}{\tau}$$

R_c az ugrás karakterisztikus hossza és τ két kör közötti ugrás karakterisztikus ideje. Figyelemre méltó, hogy ha a szennyezések sűrűsége növekszik, a diffúzió, így a vezetőképesség is növekszik, azaz a szennyezéseken való szóródással mozog az elektron az elektromos tér irányába.

A szennyezések a translációs invarianciát nem sértik.

Klasszikus Lagrange függvény

A klasszikus mozgásegyenleteket a következő Lagrange függvény adja vissza:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}_\mu - e \dot{x}_\mu A_\mu$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = -eB\dot{y} \quad m\ddot{y} = eB\dot{x}$$

a kanonikus momentum $p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} = m\dot{x}_\mu - eA_\mu$, emiatt a Hamiltonian

$$H(x_\mu, p_\mu) = \dot{x}_\mu p_\mu - \mathcal{L}(x_\mu, \dot{x}_\mu) = \frac{1}{2m} (p_\mu + eA_\mu)(p_\mu + eA_\mu)$$

Landau szintek

Szabad elektronok esetén a következő Hamilton operátor sajátállapotait kell megoldani:

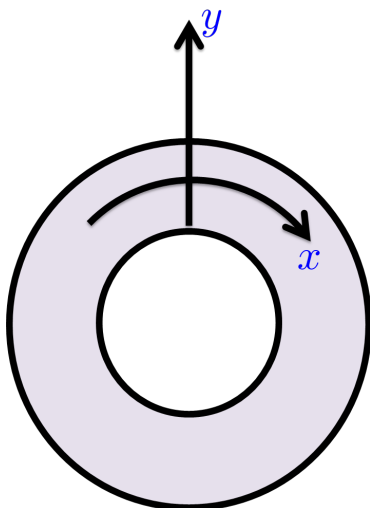
$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2$$

Landau mértéket használva $A_x = -By, A_y = 0$ ($B = \nabla \times A = \partial_x A_y - \partial_y A_x$), kissé általánosítva

$$H = \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} (p_x - eA_x)^2 + e\Phi + U(x, y) + \frac{1}{2m} p_z^2$$

x irányú elektromos tér esetén $\Phi = E_x x$. Vékony (2D) minta esetén az elektronok nem tudnak z irányban mozogni, mivel $k_z = \pi n_z / L_z$ kvantált, emiatt csak az $n_z = 1$ betöltött, és ennek az energiáját a μ kémiai potenciálba rakjuk. Az $U(x, y)$ potenciál a rendezetlenséget (az elektronoknak a szennyeződésekkel való szóródását) írja le.

Az x irányban periódikus határfeltételt használva (Corbino geometria, $E_x = 0$ esetén),



elhanyagolva a rendezetlenség hatását, miután $[p_x, H] = 0$ a hullámfüggvényt $\psi(x, y) = \phi(y)e^{-ik_x x}$ alakban keresve,

$$H\psi(x, y) = e^{-ik_x x} \left[\frac{1}{2m} (\hbar k_x - eyB)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 \right] \phi(y)$$

A periódikus határfeltétel miatt $k_x = 2\pi n_x / L_x$, ahol n_x egész. Bevezetve a következő jelöléseket

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad y_{n_x} = l_H^2 k_x \quad \omega_c = \frac{eB}{m}$$

$$\epsilon \phi(y) = \left[m \frac{(\hbar \omega_c)^2}{2} (y - y_{n_x})^2 + \frac{1}{2m} (-i\hbar \partial_y)^2 \right] \phi(y)$$

Ez egy egydimenziós harmonikus oszcillátor. A karakterisztikus frekvenciája a ciklotron frekvencia. Az oszcillátor középpontja a k_x -el arányos, a természetes hosszegység a mágneses hossz l_H . A Harmonikus oszcillátor sajátenergiái

$$\epsilon_{n, n_x} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

ahol n nemnegatív egész szám, a sajátfüggvények a Hermite polinomokkal kifejezve:

$$\phi_n(y) = \frac{1}{\pi^{1/4} l_H^{1/2} \sqrt{2^n n!}} H_n \left(\frac{y - y_{n_x}}{l_H} \right) e^{-\frac{(y - y_{n_x})^2}{2l_H^2}}$$

Ezek a Landau szintek.

Pl. az $n = 0$ Landau szinthez tartozó hullámfüggvény:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} L_x l_H}} e^{-ik_x x} e^{-\frac{(y - y_{n_x})^2}{2l_H^2}}$$

A különböző középpontú oszcillátorok energiája nem függ a középpontjuk helyzetétől, k_x -től, emiatt minden szint nagyon degenerált. A degenerációt abból számíthatjuk ki, hogy az oszcillátor középpontjának a mintában lell lennie, azaz $0 \leq y_{n_x} \leq L_y$, ebből $0 \leq k_x \leq \frac{L_y}{l_H^2}$

Igy minden Landau nívó degenerációja

$$N_p = \frac{L_x L_y}{2\pi l_H^2} = L_x L_y B \frac{e}{h} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

ahol $\Phi_0 = h/e$ az elemi fluxus.

Ha az elektronok teljes száma N , akkor definiálhatunk egy betöltési számot

$$\nu = \frac{\text{elektronok száma}}{\text{egy LL degenerációja}} = \frac{N}{\Phi/\Phi_0} = \frac{\Phi_0}{\Phi/N} = \frac{\text{flux kvantum}}{\text{flux kvantum/elektron}}$$

Eddig az elektronok spinjét nem vettük figyelembe. A Zeeman felhasadás energiája a fel és a lefelé álló spinű elektronok között:

$$g_e \mu_B B = g_e \frac{e\hbar}{2m} B = \frac{g_e}{2} \hbar \omega_c$$

szabad elektronokra $g_e \cong -2$, tehát ugyanakkora a felhasadás, mint Landau nívók távolsága. (Bloch elektronokra ez már nem áll fenn). Így ez csupán azt jelenti, hogy a degeneráció az előbbinek kétszerese.

Ha pl. $\nu = 2$, akkor pontosan egy flux kvantumunk van két elektronra, tehát az első Landau nívó ($n_L = 0$) teljesen betöltött (egy spin fel és egy spin le állapot)

Másként fogalmazva, $\epsilon_{n,n_x} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c$, független k_x -től. A különböző k_x -hoz tartozó kvantumállapotok egy adott n esetén ugyanakkora energiával rendelkeznek. Az energiát a k_x függvényében ábrázolva a diszperziós relációt kapjuk. A diszperzió ilyen módon vízszintes vonalakból áll, amelyeket sávoknak tekinthetünk, n a sávindex k_x a momentum. Adott n esetén az állapot csoportsebessége

$$v_{n,k_x} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_{n,k_x}}{\partial k_x} = 0$$

Áramok

Az x irányban folyó áram operátora $J_x = -\frac{e}{m}(\mathbf{p}_x - eA_x)$

A legalacsonyabb Landau szintet tekintve

$$\begin{aligned} \langle \psi | J_x | \psi \rangle &= -\frac{e}{m\pi^{1/2}l_H} \int dy e^{-\frac{(y-y_{n_x})^2}{2l_H^2}} (\hbar k_x - eyB) e^{-\frac{(y-y_{n_x})^2}{2l_H^2}} \\ &= -\frac{e\omega_c}{\pi^{1/2}l_H} \int dy e^{-\frac{(y-y_{n_x})^2}{l_H^2}} (y - y_{n_x}) = 0 \end{aligned}$$

mivel páratlan függvény. Ez minden nívóra igaz. Természetes, mivel nem kapcsolunk rá elektromos teret.

Alkalmazzunk egy y irányú elektromos teret $V(y) = -eEy$. Ettől az x irányban a translációs invariancia megmarad, továbbra is egy egydimenziós harmonikus oszcillátor probléma marad, az egyenlet a következőképpen módosul

$$\epsilon\phi(y) = \left[m \frac{(\hbar\omega_c)^2}{2} (y - y'_{n_x})^2 + \frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_y)^2 - eEy'_{n_x} + \frac{1}{2} m\bar{v}^2 \right] \phi(y)$$

ahol, az oszcillátor középpontja eltolódott $y'_{n_x} = y_{n_x} + \frac{eE}{m(\hbar\omega_c)^2}$, megjelent egy extra energia $\frac{1}{2} m\bar{v}^2$

ahol $\bar{v} = -E/B$ az elektronok driftsebessége.

Az energia most már k_x -től is függ, a degeneráció feloldódott

$$\epsilon_{n,n_x} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - eEy'_{n_x} + \frac{1}{2} m\bar{v}^2$$

A csoportsebesség

$$v_{group} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_{n,n_x}}{\partial k_x} = -\frac{eE}{\hbar} \frac{\partial y'_{n_x}}{\partial k_x} = -\frac{eE}{\hbar} l_H^2 = -\frac{E}{B} = \bar{v}$$

azaz visszakaptuk a klasszikus eset eredményét

$$\langle J_x \rangle = -e\bar{v} \Rightarrow \sigma_{yx} = -\frac{ne}{B}$$

Tehát translációs szimmetria (jelen esetben az y irányban, ahol a Hall feszültséget várjuk) fennállása esetén mindig a klasszikus esetet kapjuk vissza.

