

Kausztikák a fizikában

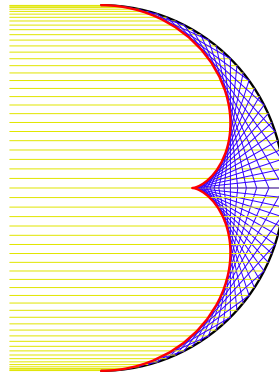
(Kiegészítés II. éves fizikusok számára)

Cserti József

Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
(Budapest, 2005. szeptember és 2006. augusztus,
frissítve: 2024. április)

Tekintsünk egy görbét, ami egy paramétertől függ. A paraméter változtatásával egy görbesereget kapunk. Bizonyos esetekben ennek a görbeseregnek létezik burkolója. Ezt a burkolót nevezik *kausztikának*. Nem minden görbeseregnek van kausztikája. Például a párhuzamos fénysugaraknak nincs kausztikája.

Az egyik legismertebb kausztika a jól megfigyelhető fényes, „csúcsos” alakú görbe, amely egy pohár alján látható, amikor a felülről beeső fény a pohár belső, tükröző faláról visszaverődik. Az 1. ábrán megszerkesztettük a gömbtükrre párhuzamosan beeső fénysugarak útját a visszaverődés után. Ezeknek a fénysugaraknak a burkolója eredményezi a kausztikát. Az R sugarú gömbtükrben kialakuló kausztika paraméteres egyenlete $\mathbf{r}_k(\alpha) = (x_k(\alpha), y_k(\alpha))$:

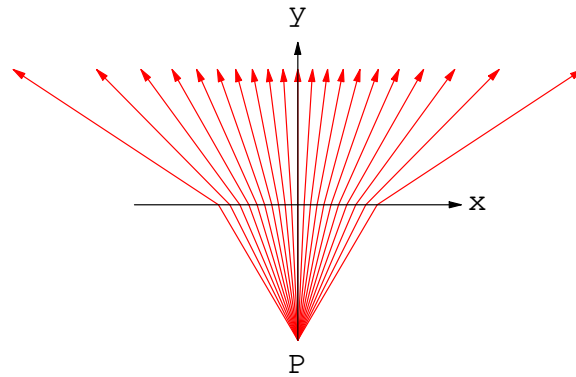


1. ábra. A jobbról párhuzamosan bejövő fénysugarak a pohár belső faláról visszaverődnek és burkolójuk kausztikát eredményez. A piros vonal az (1) egyenletből számolt kausztika görbéje.

$$\mathbf{r}_k(\alpha) = R \begin{pmatrix} \cos \alpha \left(1 - \frac{\cos 2\alpha}{2} \right) \\ \sin^3 \alpha \end{pmatrix}, \quad (1)$$

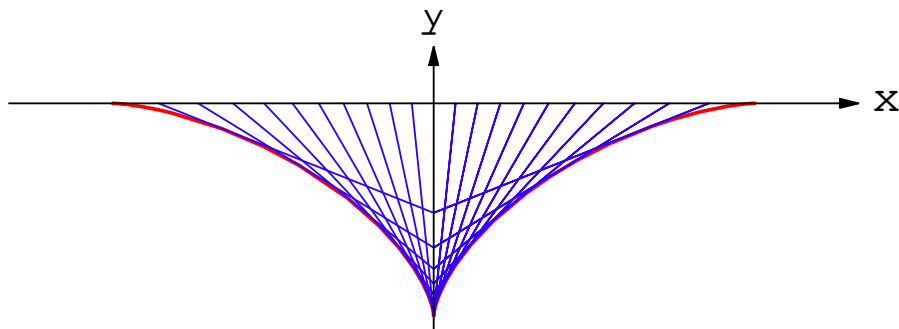
ahol a koordináta-rendszer origója a gömbtükr középpontjában van, és az x -tengely a tükör optikai tengelye. A tükörre érkező fénysugár beesési szöge α , és értéke $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ között változik.

A víz alatti P pontban lévő halról, mint tárgyról érkező fénysugarak menete látható a 2. ábrán. A vízből ki-



2. ábra. A P pontban lévő halról jövő fénysugarak menete. Az $y < 0$ tartomány egy n törésmutatójú közeg, míg az $y > 0$ rész levegő. A szerkesztésnél a törésmutatót $n = 4/3$ -nak vettük.

lépő fénysugarakat visszafelé meghosszabbítva az egyenesek burkolója a 3. ábrán látható „virtuális” kausztika. Az n törésmutatójú vízben d mélységben lévő halról jövő fénysugarak virtuális kausztikájának paraméteres egyenlete



3. ábra. A vízből kilépő fénysugarak visszafelé történő meghosszabbítása virtuális kausztikát eredményez. A piros vonal a (2) egyenletből számolt kausztika görbéje.

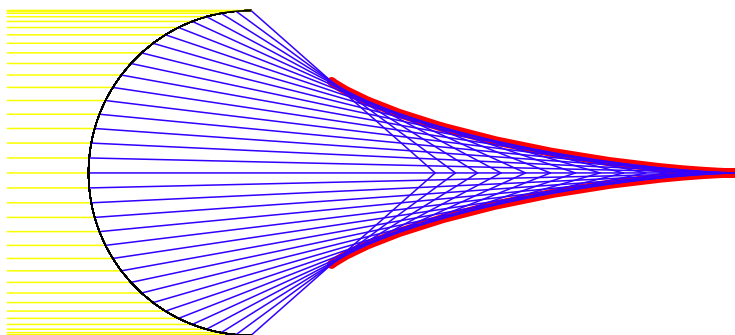
$\mathbf{r}_k(\beta) = (x_k(\beta), y_k(\beta))$:

$$\mathbf{r}_k(\beta) = d \begin{pmatrix} \frac{(n^2 - 1) \sin^3 \alpha}{n^3 \cos^3 \beta} \\ -\frac{\cos^3 \alpha}{n \cos^3 \beta} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ahol β a vízből érkező fénysugár beesési szöge a törőközeg határán, $\sin \alpha = n \sin \beta$, és $-\beta_c < \beta < \beta_c$, míg $\beta_c = \arcsin \frac{1}{n}$. Kiküszöbölve α -t és β -t a két egyenletből, a kausztika implicit egyenletét kapjuk:

$$\left(\frac{\sqrt{n^2 - 1} x_k}{d} \right)^{2/3} + \left(\frac{n y_k}{d} \right)^{2/3} = 1, \quad y_k < 0. \quad (3)$$

A lencsék szférikus abberációja során fellépő kausztikát mutatja a 4. ábra. A párhuzamosan bejövő fénysugarak egy n törésmutatójú félkör alakú (R sugarú) közeg határán megtörnek, és a fénysugarak ismét kausztikát eredményeznek.



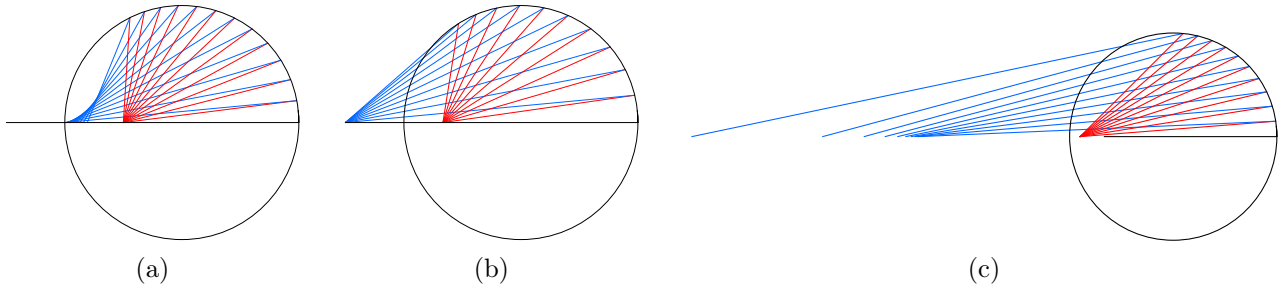
4. ábra. A párhuzamosan bejövő fénysugarak nem egy pontban fókuszálódnak. A megtört sugarak burkolója (piros vonal a (4) egyenletből számolva) a kausztika görbéje. A szerkesztésnél a törésmutatót $n = 4/3$ -nak vettük. A koordináta rendszer origója a kör középpontja.

A kausztika paraméteres görbéje:

$$\mathbf{r}_k(\alpha) = R \begin{pmatrix} \frac{\cos^3 \alpha + n \cos^3 \beta}{n^2 - 1} \\ \frac{\sin^3 \alpha}{n^2} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ahol α a balról érkező fénysugár beesési szöge a törőközeg határán, értéke $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ között változik, és $\sin \beta = \sin \alpha / n$. Az $\alpha \rightarrow 0$ határesetben $x_k \rightarrow R/(n - 1)$ és $y_k \rightarrow 0$ (fókuszpont), míg az $\alpha \rightarrow \pi/2$ határesetben $x_k \rightarrow R\sqrt{n^2 - 1}/n^2$ és $y_k \rightarrow R/n^2$.

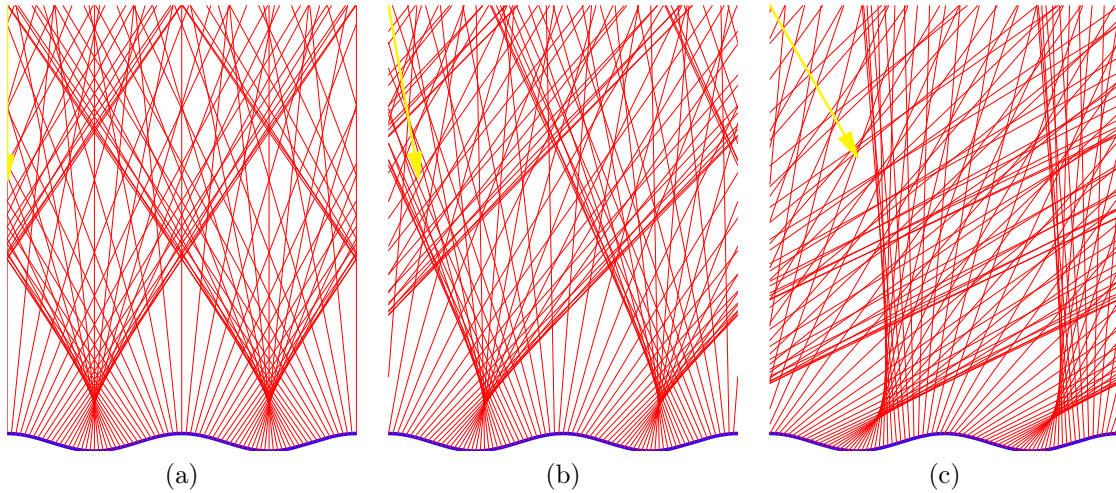
Az 5. ábrán a ZH (2005. október 21.) 1. feladatának megoldásához egy kiegészítő ábra látható. A tárgy az optikai tengelyen a kör középpontjától mérve x távolságban van. A kör belseje egy n törésmutatójú közeg, kívül levegő van. A tárgyról induló fénysugarak (piros vonal) a kör határán megtörnek. A kilépő sugarakat visszafelé meghosszabbítva



5. ábra. Az immerziós mikroszkóp: $x < x_c = R/n$ (a), $x = x_c = R/n$ (b), $x > x_c = R/n$ (c). A szerkesztésnél a törésmutatót $n = 4/3$ -nak vettük.

(a kék vonalak) látjuk a tárgy képét. Ha $x = x_c = R/n$, akkor a tárgyból induló összes fénysugár egy pontba képződik le, ami jól látható az 5. ábrán. Ezt a pontot konjugált pontnak nevezik. Ebben az esetben tökéletes a leképezés, a fókuszpont nem csak paraxiális közelítésben válik egy ponttá. Ekkor a képpont helye: $x' = Rn$.

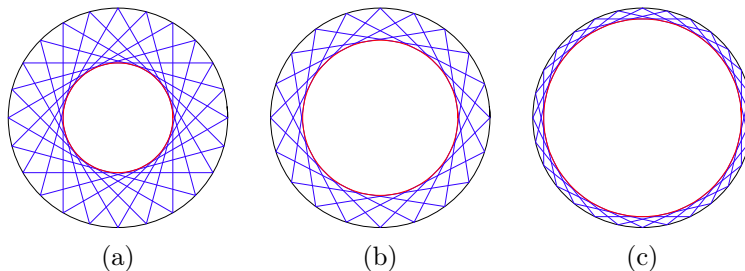
A 6. ábrán látható, hogy a párhuzamosan beeső fénysugarak egy hullámos felületről (például a hullámzó Balaton vízeről) visszaverődve ismét kausztikákat eredményeznek. A felszínt az $A \sin(2\pi x/\lambda)$ függvénnyel modelleztük.



6. ábra. A fény visszaverődése egy hullámos felületről. A beeső fény Θ szöget zár be a függőlegessel és irányát a sárga vonal jelzi. Az egyes ábrákon $\Theta = 0^\circ$ (a), $\Theta = 10^\circ$ (b), $\Theta = 30^\circ$ (c). A szerkesztésnél a felszín A amplitudóját egységnyinek, a hullámhosszát $\lambda = 20 A$ -nak vettük.

Nemcsak az optikában, de a fizika más területein is találkozunk kausztikával. Lássunk néhány példát!

Kausztikák kör alakú biliárdban. A 7. ábrán egy kör alakú biliárdban pattogó golyók trajektóriái láthatók. Az egyes ábrákon a golyó egy $n = 3, 4, 7$ sokszög élei mentén halad. Egyszerű geometriai megfontolások alapján belátható, hogy a kausztika is kör alakú, melynek középpontja megegyezik a biliárd középpontjával, és a kausztika sugara $R \cos(\pi/n)$, ahol R a biliárd sugara.



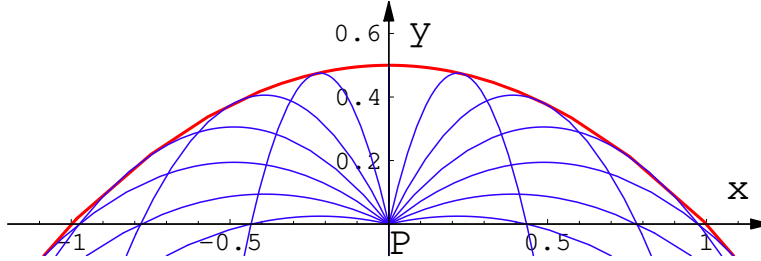
7. ábra. Kör alakú biliárdban pattogó golyó lehetséges trajektóriái (kék vonalak). A golyó egy háromszög ($n = 3$) (a), négyszög ($n = 4$) (b), illetve egy $n = 7$ sokszög élei mentén halad (c). A piros vonal a trajektóriák kausztikája.

A ferdén elhajított test homogén gravitációs térben parabola pályán mozog. A P pontból v sebességgel különböző α szögben elhajított testek burkolója (kausztikája) látható a 8. ábrán.

A kausztika paraméteres egyenlete $\mathbf{r}_k(\alpha) = (x_k(\alpha), y_k(\alpha))$:

$$\mathbf{r}_k(\alpha) = \frac{v^2}{g} \begin{pmatrix} \text{ctg} \alpha \\ -\frac{\cos 2\alpha}{2 \sin^2 \alpha} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

ahol g a gravitációs állandó. Bevezetve a dimenziótlan $\bar{x}_k = x_k/(v^2/g)$ és $\bar{y}_k = y_k/(v^2/g)$ koordinátákat, és kiküszöbölve



8. ábra. A P pontból különböző α szögben elhajított testek burkolója is parabola. A piros vonal az (5) (vagy a (6)) egyenletből számolt kausztika görbéje. Az (x, y) koordinátákat v^2/g egységekben mértük.

α -t a fenti két egyenletből, a kausztika implicit egyenletét kapjuk:

$$\bar{y}_k = \frac{1}{2} (1 - \bar{x}_k^2), \quad (6)$$

ami láthatóan ismét egy parabola.

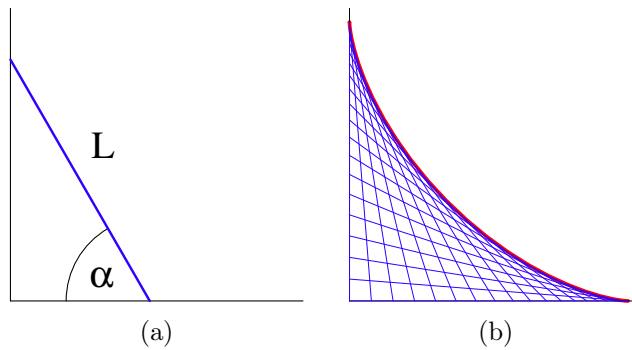
A 9a. *ábrán* egy derékszögű sarokba helyezett L hosszúságú rúd látható, ami a vízszintessel α szöget zár be. A különböző α szögben elhelyezkedő rudak egyenesei a 9b. *ábrán* látható kausztikát eredményezik. A kausztika görbéje:

$$\mathbf{r}_k(\alpha) = L \begin{pmatrix} \cos^3 \alpha \\ \sin^3 \alpha \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Kiküszöbölve az α szöget a (7) egyenletből, a következő implicit egyenletet kapjuk a kausztika görbéjére:

$$x_k^{2/3} + y_k^{2/3} = L^{2/3}. \quad (8)$$

A fenti görbét *asztroidnak* nevezik.

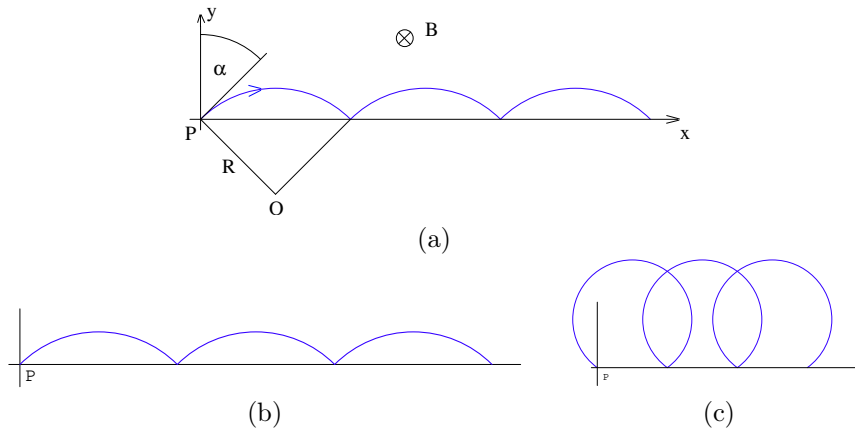


9. ábra. Derékszögű sarokban különböző szögben elhelyezett rúd egyenesesei kausztikát eredményeznek. A (b) *ábrán* a piros vonal a (7) (vagy a (8)) egyenletből számolt kausztika görbéje.

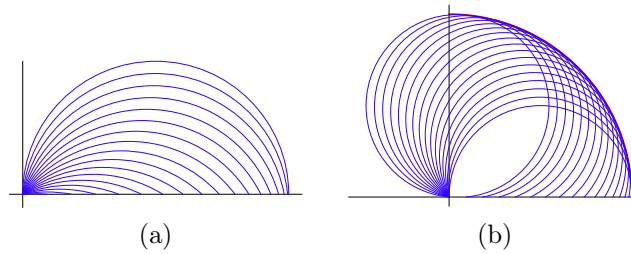
Valamivel bonyolultabb kausztikát kapunk a következő esetben. A 10a. *ábra* töltött részecske mozgását mutatja mágneses térben. Képzeljük el, hogy a részecske a P pontban α szögben lép be az $y > 0$ tartományba. A részecske egy R sugarú körív mentén fog mozogni. Ha a részecske ismét eléri az x tengelyt, akkor onnan mint merev falról visszaverődik, és újabb köríven folytatja mozgását, ahogy ez a 10b. és c. *ábrákon* látható. A görbe paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}(\varphi, \alpha) = R \begin{pmatrix} \sin \varphi + (2p - 1) \cos \alpha \\ \cos \varphi - \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (9)$$

ahol p azt jelöli, hogy a részecske hányszor éri el az x tengelyt, mint merev falat, míg φ paraméterezi a részecske helyét adott α -ra. Itt φ a részecske helyét a körív O középpontjával összekötő egyenes és az y tengely közti szöget jelöli, és $-\pi < \varphi < \pi$.



10. ábra. Töltött részecske, mely a P pontból indul és sebességvektora α szöget zár be az y tengellyel, egy R sugarú körív mentén mozog, (a ábra). A b ábrán $\alpha > 0$, míg a c ábrán $\alpha < 0$. Az ábrákon a részecske $p = 3$ -szor éri el az x tengelyt.



11. ábra. Az $\alpha > 0$ esetben nincs kausztika (a ábra), míg $\alpha < 0$ -nél van (b ábra). A (b) ábrán a piros vonal a (10) egyenletből számolt kausztika görbéje. Itt $p = 1$.

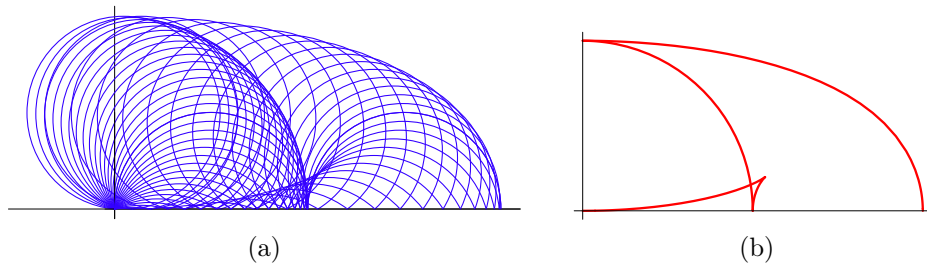
A 11a. ábrán látható, hogy $p = 1$ és $\alpha > 0$ esetben nem alakul ki kausztika, míg a b ábrán, azaz $\alpha < 0$ esetben a görbeseregnek van burkolója.

A kausztika egyenletét ismét a függelék alapján számolhatjuk ki, és a következő eredményt kapjuk:

$$\mathbf{r}_k(\alpha) = R \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + (2p-1) \cos \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (10)$$

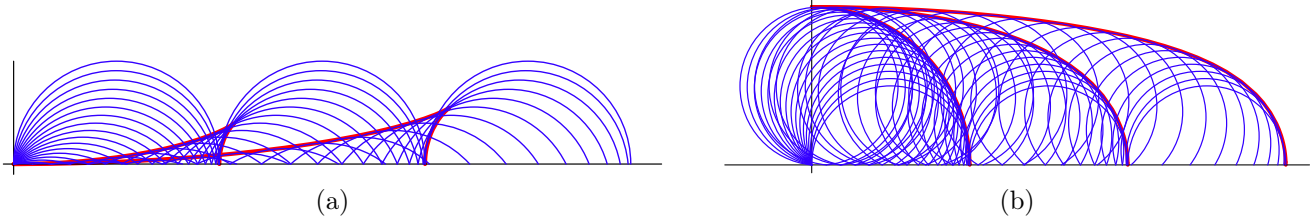
ahol $u = \text{ctg} \alpha / (2p - 1)$.

A 12. ábrán $p = 2$ -re látható a görbesereg, illetve a kausztika görbéje.



12. ábra. Kausztika $p = 2$ -nél. Az a ábra a görbesereget mutatja, míg a b ábrán a (10) egyenletből számolt kausztika görbéje látható.

Végül a 13a. ábra $p = 3$ -re mutatja a kialakuló kausztikákat $\alpha > 0$, illetve $\alpha < 0$ esetekben.



13. ábra. A görbesereg és a kausztika (piros vonal) $\alpha > 0$ (a ábra), illetve $\alpha < 0$ (b ábra) esetben.

Függelék

(síkbeli kausztikák)

Síkban a kausztikák görbék, térben pedig felületek. Itt a síkbeli esettel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy ismert egy görbe paraméteres egyenlete, azaz a $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ függvény. Egy görbesereget a λ paraméterrel jellemezhetünk, és így a görbesereget a $\mathbf{r}(t, \lambda) = (x(t, \lambda), y(t, \lambda))$ függvény írja le.

Kausztika számítása: I. módszer

Adott λ és $\lambda + \delta\lambda$ értékekhez tartozik egy t és $t + \delta t$, hogy

$$\mathbf{r}(t, \lambda) = \mathbf{r}(t + \delta t, \lambda + \delta\lambda). \quad (11)$$

Ez a kausztikát meghatározó egyenlet. A jobboldalt sorfejtve kapjuk:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0, \quad (12)$$

melyet komponensek szerint kiírva a

$$\frac{\partial x}{\partial t} \delta t + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} \delta t + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0, \quad (14)$$

egyenletek adódnak. A fenti egyenletek mátrixformában is felírhatók:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta t \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (15)$$

Véges $\delta\lambda$ -hoz, akkor kapunk véges δt -t, ha a fenti egyenlet nemtriviális megoldásait keressük. Ennek feltétele, hogy a mátrix determinánsa zérus legyen, azaz

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \lambda)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

ahol a baloldali kifejezés a jól ismert Jacobi-determináns. A fenti egyenlet adott görbeseregnél t -nek és λ -nak a függvénye, és egy feltételt ad t és λ között. Tegyük fel, hogy az egyenlet megoldása t -re adott λ mellett $t^*(\lambda)$. Ekkor a kausztikának az $\mathbf{r}_k(\lambda)$ paraméteres egyenlete a

$$\mathbf{r}_k(\lambda) = \mathbf{r}(t^*(\lambda), \lambda) \quad (17)$$

függvény lesz. A korábban ismertetett feladatokban a kausztikákat a fenti módszer segítségével határoztuk meg.

Kausztika számítása: II. módszer

Ha a görbesereget egy implicit függvénnyel adjuk meg, akkor írhatjuk:

$$F(\lambda, x, y) = 0. \quad (18)$$

A kausztika mentén az x változásával $\lambda(x)$ is változik. A fenti egyenletet x szerint deriválva kapjuk:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y_c}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

ahol $y_c(x)$ a kausztika görbét írja le.

Egy adott görbére λ rögzített, azaz $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$, ezért a (18) egyenletet a görbe mentén x szerint deriválva kapjuk:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y_g}{\partial x} = 0, \quad (20)$$

ahol $y_g(x)$ a görbe egyenlete adott λ -ra.

Mivel egy adott görbe és hozzá simuló kausztika görbájének a meredeksége megegyezik az érintkezési pontba, ezért $\frac{\partial y_c}{\partial x} = \frac{\partial y_g}{\partial x}$, és így a (19) és a (20) egyenlet baloldalának első két tagja azonos, és a (20) miatt azonosan zérus.

Innen következik, hogy a (19) harmadik tagja is zérus lesz. Mivel a kausztika mentén $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \neq 0$, következik, hogy $\frac{\partial F(\lambda, x, y)}{\partial \lambda} = 0$.

Összefoglalva a kausztikát meghatározó két egyenlet:

$$F(\lambda, x, y) = 0, \quad (21a)$$

$$\frac{\partial F(\lambda, x, y)}{\partial \lambda} = 0. \quad (21b)$$

Adott λ -ra fenti két egyenletet x -re és y -ra megoldva megkapjuk a kausztika görbájének a λ paraméter szerinti $x_c(\lambda), y_c(\lambda)$ egyenletét.

A fent vázolt két módszer azonos eredményre vezet. Hogy melyik módszert használjuk, az attól függ, hogy a görbesereg hogyan van megadva.