Bevezetés a modern optikába

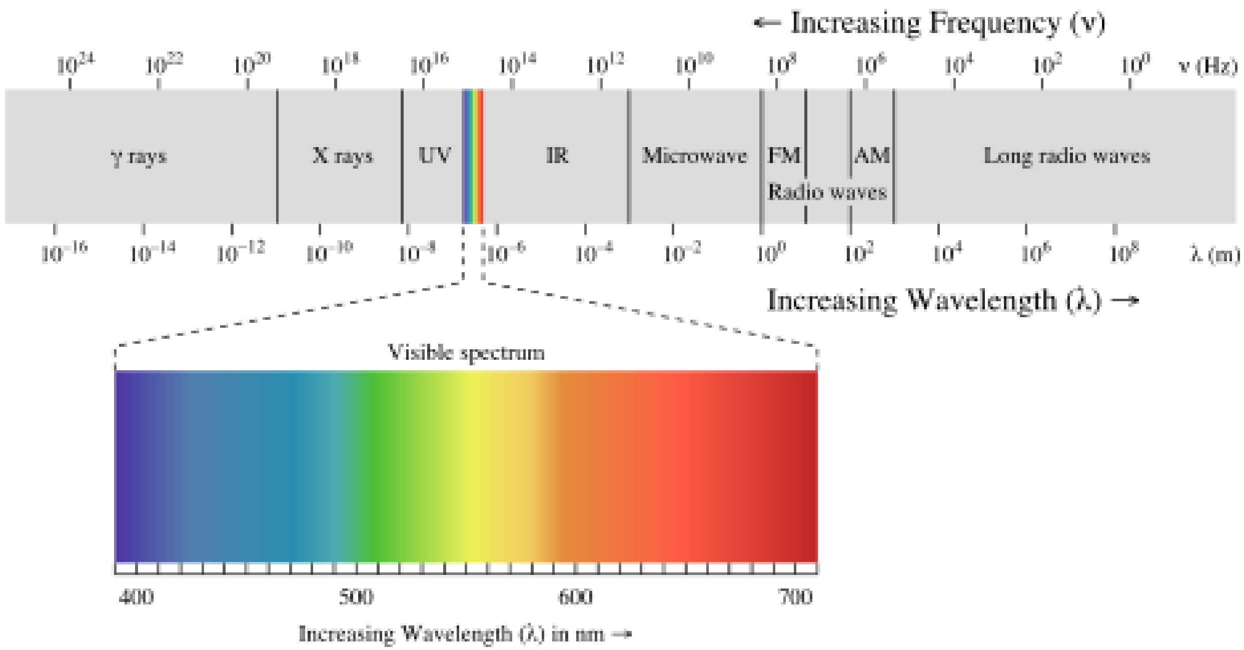
II. BSc fizikus hallgatóknak

2.

Fényhullámok tulajdonságai

Cserti József, jegyzet, ELTE, 2007.

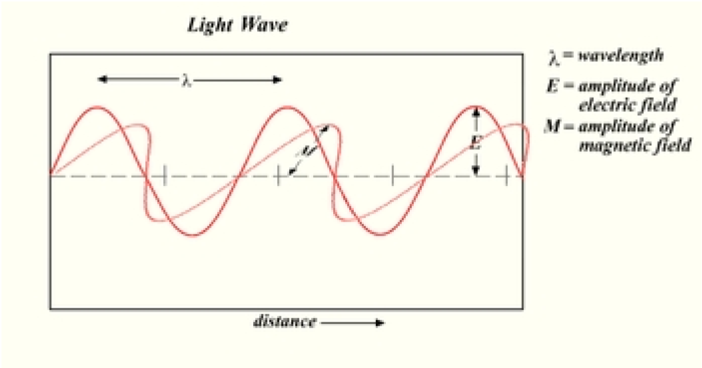
Az elektromágneses spektrum



Látható spektrum
(erre állt be a szemünk)

UV: ultraibolya
IR: infravörös
X rays: Röntgen sugár (rtg)

Síkhullám vákuumban:



$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_x = E_{0x} \cos\left(kz - \omega t + \varphi_0\right)$$

$$H_y = H_{0y} \cos\left(kz - \omega t + \varphi_0\right)$$

hullámszám: $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

tapasztalat, Maxwell-egyenlet: $\boxed{\omega = c_0\, k}$

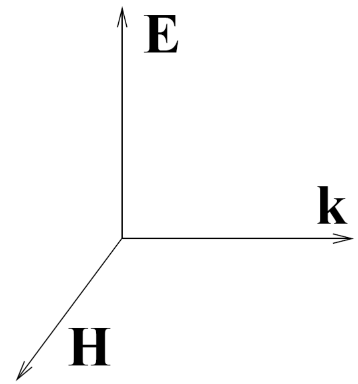
Koordináta-független leírás:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos\left(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \varphi_0\right) \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_0 \cos\left(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \varphi_0\right)$$

Tranzverzális hullám: $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{k} \perp \mathbf{E}$

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,|\mathbf{E}|$$

jobbsodrású rendszer:



hullám terjedési iránya: $\mathbf{k}$

hullámszám: $k = |\mathbf{k}| = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

A síkhullám ***k*** irányban periodikus:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\mathbf{r} + \lambda\frac{\mathbf{k}}{k}, t\right) &= \mathbf{E}_0 \cos\left[\mathbf{k}\left(\mathbf{r} + \lambda\frac{\mathbf{k}}{k}\right) - \omega t + \varphi_0\right] \\ &= \mathbf{E}_0 \cos\left(\mathbf{k}\mathbf{r} + \lambda k - \omega t + \varphi_0\right) \\ &= \mathbf{E}_0 \cos\left(\mathbf{k}\mathbf{r} + 2\pi - \omega t + \varphi_0\right) \\ &= \mathbf{E}_0 \cos\left(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \varphi_0\right) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\end{aligned}$$

A periódushossz: λ

Poynting-vektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E}||\mathbf{H}| = c_0 \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = c_0 \mu_0 |\mathbf{H}|^2$$

$$= c_0 \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right)}_{\text{energia-sűrűség}}$$

Időátlag:
(a fény frekvenciája >> 1/mérési idő)

$$\overline{|\mathbf{S}|} = \mathbf{E}_0 \, \mathbf{H}_0 \, \overline{\cos^2(\varphi)} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \, \mathbf{H}_0, \quad \text{ahol}$$

$$\varphi = \mathbf{kr} - \omega t + \varphi_0$$

Intenzitás: $\boxed{I \sim |\mathbf{S}| \sim |\mathbf{E}|^2}$

Szuperpozició elve

A Maxwell-egyenlet megoldásai:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$$

Az összeg is megoldás: $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ A Maxwell-egyenletek lineárisak

Intenzitás: $I \sim |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = \underbrace{|\mathbf{E}_1|^2}_{I_1} + \underbrace{|\mathbf{E}_2|^2}_{I_2} + 2\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$

fázisfüggő
interferencia tag

Megjegyzés: a hidrodinamika egyenletei nemlineárisak
két csőből kijövő vízsugár …

Komplex írás

Euler-összefüggés: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Síkhullám vákuumban: $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\varphi_0)} = \mathcal{E}_0\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, ahol

$$\mathcal{E}_0 = \mathbf{E}_0\, e^{i\varphi_0}$$

komplex amplitúdó

Interferencia valósban:

$$2\,\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)\,\mathbf{E}_2(\mathbf{r},t) = 2\mathbf{E}_{10}\,\mathbf{E}_{20}\,\cos\Phi_1\,\cos\Phi_2$$

$$= \mathbf{E}_{10}\mathbf{E}_{20}\left[\cos\left(\Phi_1+\Phi_2\right)+\cos\left(\Phi_1-\Phi_2\right)\right], \quad \text{ahol}$$

$$\Phi_1 = \mathbf{kr}_1 - \omega t + \varphi_1$$

$$\Phi_2 = \mathbf{kr}_2 - \omega t + \varphi_2$$

interferencia csíkok

gyorsan oszcillál,
időátlagban zérus

Interferencia komplexben:

$$
\begin{aligned}
I &\sim |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 \\
&= (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)(\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) \\
&= |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_1^*\mathbf{E}_2 \\
&= I_1 + I_2 + \mathbf{E}_{10}e^{i\Phi_1}\,\mathbf{E}_{20}e^{-i\Phi_2} + \mathbf{E}_{10}e^{-i\Phi_1}\,\mathbf{E}_{20}e^{i\Phi_2} \\
&= I_1 + I_2 + \mathbf{E}_{10}\,\mathbf{E}_{20}\left[e^{i(\Phi_1-\Phi_2)} + e^{-i(\Phi_1-\Phi_2)}\right] \\
&= I_1 + I_2 + 2\mathbf{E}_{10}\,\mathbf{E}_{20}\cos(\Phi_1 - \Phi_2)
\end{aligned}
$$

Időátlagolt Poynting-vektor, az intenzitás komplexben:

$$
\overline{|\mathbf{S}|} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_0\,\mathbf{H}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{E}_0\,\mathbf{H}_0^*
$$

A fázis kiesik!

Skalár-hullám közelítés

E és ***H*** iránya (polarizáció) sokszor nem kontrollálható, de gyakran nem is fontos, az interferencia jól leírható, ha

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \longrightarrow u(\mathbf{r},t) = A\,e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

Hullámegyenlet ?????   síkhullám: $u(\mathbf{r},t) = u_0\,e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$

Milyen lineáris differenciálegyenlet elégít ki: $u(\mathbf{r},t) = u_0\,e^{ik_x x}\,e^{ik_y y}\,e^{ik_z z}\,e^{-i\omega t}$

úgy, hogy : $\boxed{\omega = c\,k} \longrightarrow 2\pi\,\nu = c\,\dfrac{2\pi}{\lambda} \longrightarrow c = \nu\lambda$

diszperziós reláció

$$\omega^2 = c^2\,k^2 = c^2\,\mathbf{k}^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik_x u; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k_x^2 u$$

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) u = -\mathbf{k}^2\, u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u$$

Hullámegyenlet: $$\boxed{\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Maxwell-egyenletek

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \varrho; \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t} \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} \end{aligned}}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

ε_r, μ_r néha tenzor, kristályoptika

Forrásmentes tér: $\varrho = 0, \ \mathbf{j} = 0$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0; \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\mathbf{E} &= \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \Delta\mathbf{H} &= \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

azonosság: $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}$

Hullámok vákuumban: $\varepsilon_r = 1, \quad \mu_r = 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0$

$$\frac{1}{c_0^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Hullámok anyagban: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \dfrac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \dfrac{c_0}{n}$

Törésmutató: $n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$

A hullámegyenlet megoldásai

1) Állóhullám: $$e^{i(kx-\omega t)} + e^{i(-kx-\omega t)} = e^{-i\omega t}\, 2\cos kx$$

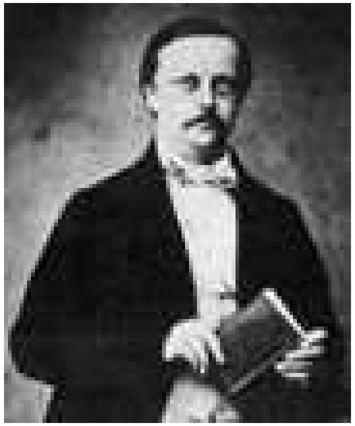
csomópontok

2) Hullám módusai: monokromatikus (rögzített frekvencia) megoldások adott peremfeltételekkel

$$u(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t} \xrightarrow{\text{hullámegyenlet}} \boxed{\Delta U = -k^2\, U}$$

ahol $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$

$U(\mathbf{r})$ Stacionárius (időben állandósult) hullámmegoldása a Helmholtz-egyenletnek



Hermann Ludwig Ferdinand **Helmholtz** (1821-1894)

3) Gömbhullámok: Polárkoordináták:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\vartheta$$

Laplace-operátor: $$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 U'\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(2rU' + r^2U''\right) = \frac{2}{r}U' + U'' = \frac{1}{r}(rU)''$$

Helmholtz-egyenlet

$$\Longrightarrow (rU)'' = -k^2(rU)$$

$$\Longrightarrow rU = e^{\pm ikr} \Longrightarrow \boxed{u(r,t) = U(r)e^{i\omega t} = \frac{e^{\pm ikr}}{r}e^{i\omega t}}$$

$$|U| \sim \frac{1}{r} \Longrightarrow I(r) \sim |U|^2 \sim \frac{1}{r^2} \Longrightarrow I(r)\,4\pi r^2 = \text{const.}$$

Jó közelítésben pontszerű fényforrás kelt gömbhullámokat.

4) Evanescens hullámok:

$$U(\mathbf{r}) = e^{iKz}\, e^{-\kappa x}$$

elenyészik, lecseng

$$\Delta U = \left(-K^2 + \kappa^2\right) U = -k^2 U \equiv -\frac{\omega^2}{c^2} U$$

$$K^2 = k^2 + \kappa^2 \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

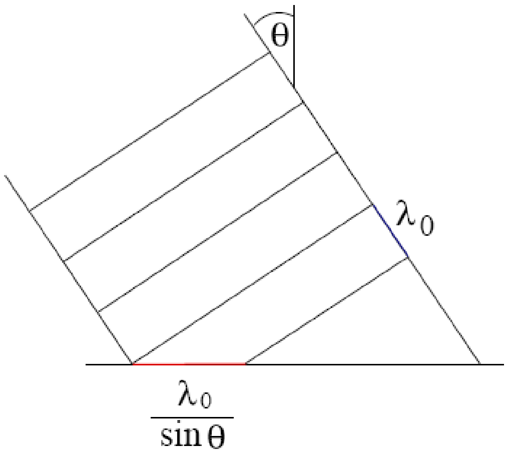
$$K^2 > k^2$$

Gyakorlati példák:

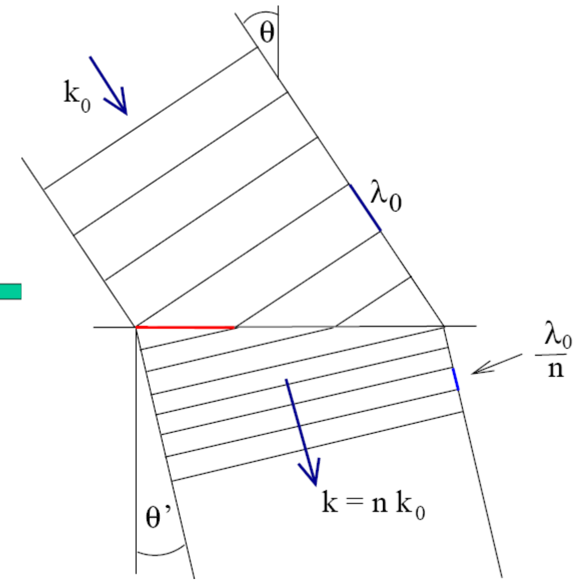
- fémekről visszaverődő hullám gyenge behatolása a fémbe ---- vékony fémfólia
  Napfogyatkozáshoz javasolt „szemüveg"
- teljes visszaverődéskor a hullám „belóg" a ritkább közegbe
- „átszivárgás" két teljesen visszaverő prizma között,
  „frusztrált totálreflexió"

Snellius-Descartes-törvény, mint fázisillesztés

A fénytörést az elektromágneses tér határfeltételei határozzák meg és a felület minden pontjában teljesülnie kell. A felület mentén a hullámhossznak (hullámszámnak) meg kell egyezni. Monokromatikus fényt vizsgálunk.



$$\left.\begin{aligned} \omega &= c_0 k_0 \\ \omega &= c\,k \\ c &= \frac{c_0}{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad k = n k_0, \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$



$$\frac{\lambda_0}{\sin\vartheta} = \frac{\frac{\lambda_0}{n}}{\sin\vartheta'}$$

$$\boxed{\sin\vartheta = n\sin\vartheta'}$$

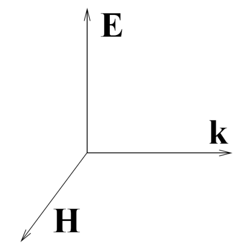
$$k_0 \sin\vartheta = n k_0 \sin\vartheta' = k\sin\vartheta' \longrightarrow$$

k felületmenti komponense azonos

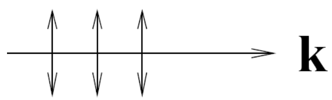
Fresnel-formulák: megtört és visszavert hullám amplitúdója, reflexiós és transzmissziós amplitúdók

Határfeltétel: ***E*** és ***H*** terek felületmenti (tangenciális) komponense folytonos a határon

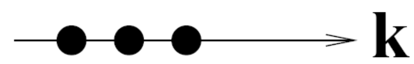
Polarizáció: a beesés síkjához viszonyítjuk



jelölés:



E : a papír síkjában



E $\perp$ a papír síkjára

dielektrikum: $\mu_r = 1 \longrightarrow n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \sqrt{\varepsilon_r}$

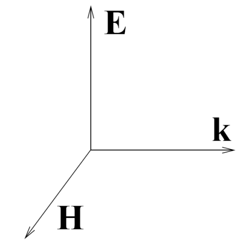
$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E = n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E \sim n\, E$$

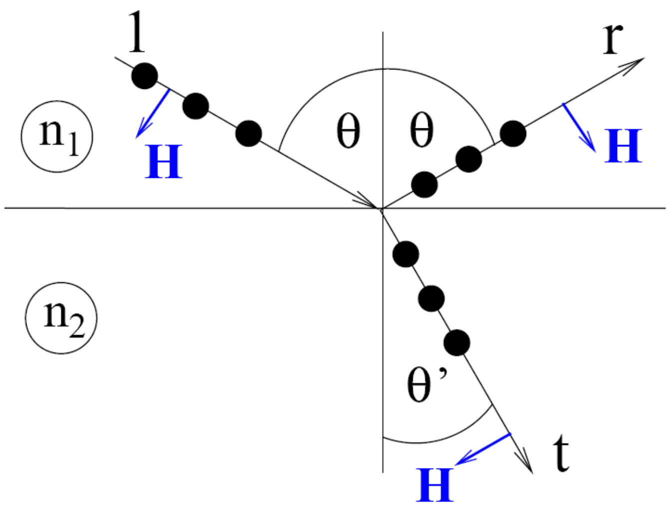
r: reflektált, visszavert (reflected)

t: transzmittált, átmenő (transmitted)

} amplitúdók

TE módus, tranzverzális elektromos, $\mathbf{E} \perp$ a beesési síkra





tangenciális (felület menti)

$$E_t \text{ folytonos:} \quad 1 + r = t$$

$$H_t \text{ folytonos:} \quad n_1(1 - r)\cos\vartheta = n_2\, t\, \cos\vartheta'$$

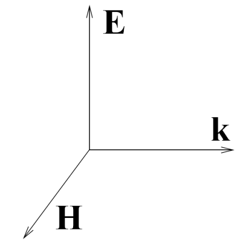
beszorozva $\sin\vartheta \sin\vartheta'$

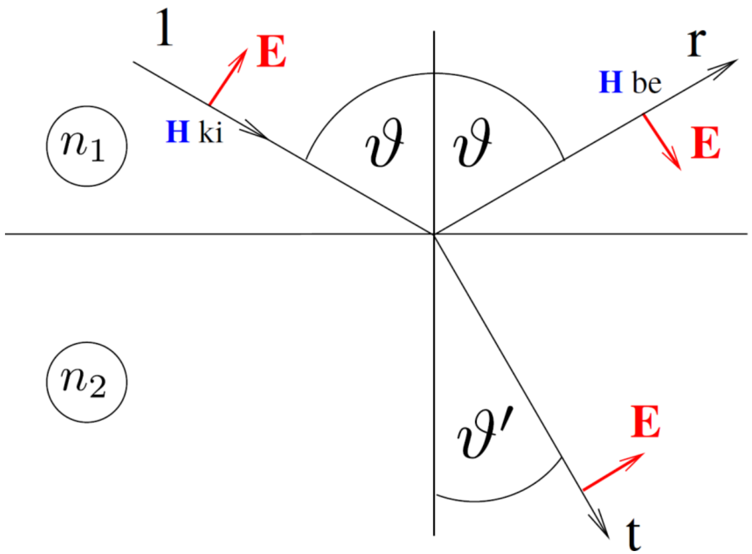
Fresnel-formulák:

$$\boxed{\begin{aligned} r_\perp = r_s &= \frac{n_1\cos\vartheta - n_2\cos\vartheta'}{n_1\cos\vartheta + n_2\cos\vartheta'} = -\frac{\sin(\vartheta - \vartheta')}{\sin(\vartheta + \vartheta')} \\ t_\perp = t_s &= \frac{2n_1\cos\vartheta}{n_1\cos\vartheta + n_2\cos\vartheta'} = \frac{2\cos\vartheta\sin\vartheta'}{\sin(\vartheta + \vartheta')} \end{aligned}}$$

Természetesen igaz a Snellius-Descartes-törvény is: $n_1 \sin\vartheta = n_2 \sin\vartheta'$

TM módus, tranzverzális mágneses, $\mathbf{E}\,||$ a beesési síkra





tangenciális (felület menti)

E_t folytonos: $(1+r)\cos\vartheta = t\cos\vartheta'$

H_t folytonos: $n_1(1-r) = n_2\, t$

beszorozva $\sin\vartheta\sin\vartheta'$

Fresnel-formulák:

$$r_{\|} = r_p = \frac{n_1\cos\vartheta' - n_2\cos\vartheta}{n_1\cos\vartheta' + n_2\cos\vartheta} = -\frac{\tan(\vartheta-\vartheta')}{\tan(\vartheta+\vartheta')}$$

$$t_{\|} = t_p = \frac{2n_1\cos\vartheta}{n_2\cos\vartheta + n_1\cos\vartheta'} = \frac{2\cos\vartheta\sin\vartheta'}{\sin(\vartheta+\vartheta')\cos(\vartheta-\vartheta')}$$

Természetesen igaz a Snellius-Descartes-törvény is: $n_1\sin\vartheta = n_2\sin\vartheta'$

Megj.: gyakran a visszavert fényre az E tér irányát ellentétesnek veszik.

Brewster-szög

TM módusra $\vartheta = \vartheta_B$ Brewster-szögnél $r_{||} = 0$

Ilyenkor nincs visszavert TM módus!

$$n_2 \cos\vartheta = n_1 \cos\vartheta'$$

S & D $\longrightarrow$ $n_1 \sin\vartheta = n_2 \sin\vartheta'$

$$\Downarrow$$

$$\sin 2\vartheta = \sin 2\vartheta' \Rightarrow 2\vartheta = 180^\circ - 2\vartheta'$$

$$\Downarrow$$

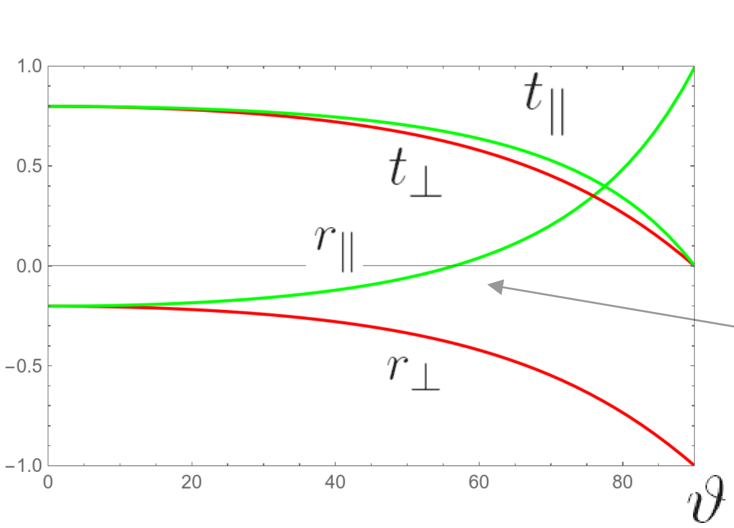
$$\vartheta + \vartheta' = 90^\circ$$

A megtört és a „visszavert” (valójában r = 0) fénysugarak egymásra merőlegesek

$$\boxed{\operatorname{tg}\vartheta_B = \frac{n_2}{n_1}}$$

Szemléletes magyarázat: ilyenkor a közegben dipólusok a reflexió irányában rezegnek, és így arrafelé nem sugároznak.

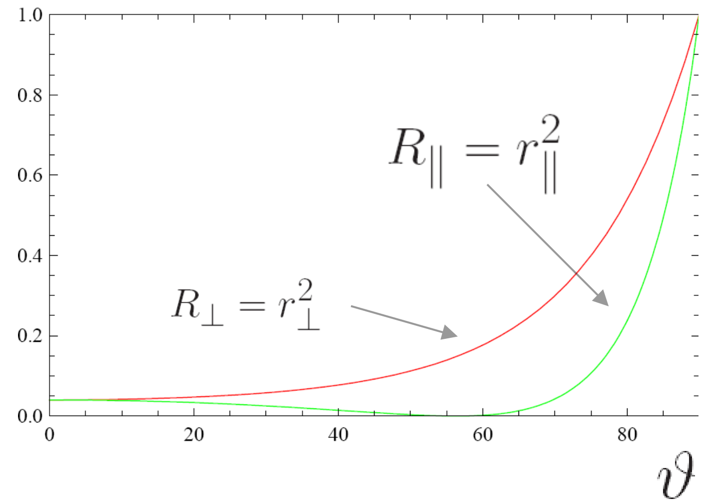
Fresnel-formulák: reflexiós és transzmissziós amplitúdók, numerikus példa



$n = 1.5 \leftarrow n \equiv \dfrac{n_2}{n_1}$

$\vartheta = \vartheta_B$ Brewster-szög

Ha $n_1 < n_2 \Rightarrow \forall\,\vartheta \quad r_{\perp} < 0$



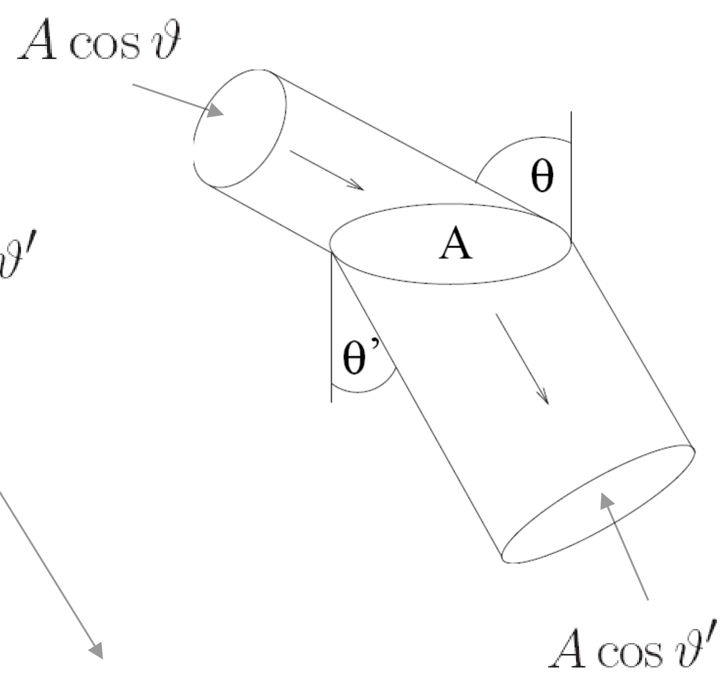
Ha a fény a „ritkább” közegből érkezik, akkor π fázisugrás lép fel az $\boldsymbol{E}$ tér merőleges komponensében reflexió során.

Fresnel-formulák: energia-megmaradás

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \sim n|E|^2$$

Az energia megmarad:

$$n_1|E|^2 \cos\vartheta = n_1|E|^2|r|^2 \cos\vartheta + n_2|E|^2|t|^2 \cos\vartheta'$$



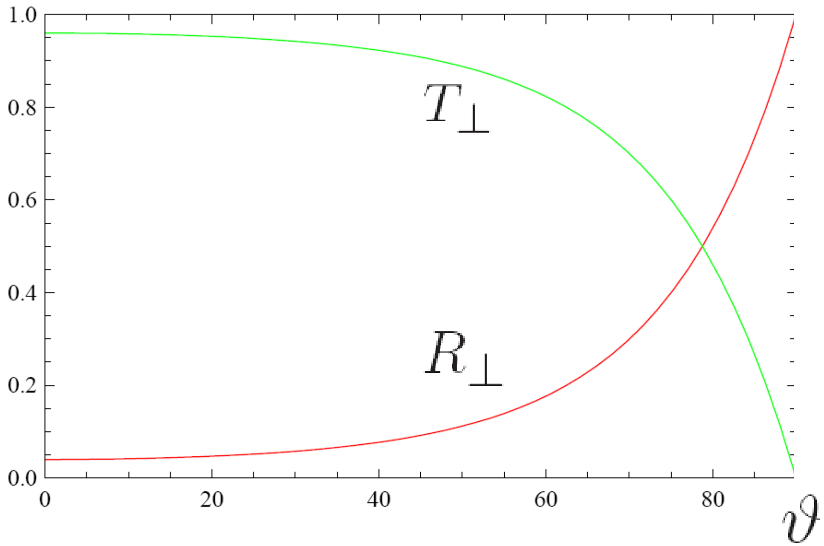
reflexiós és transzmissziós intenzitások:

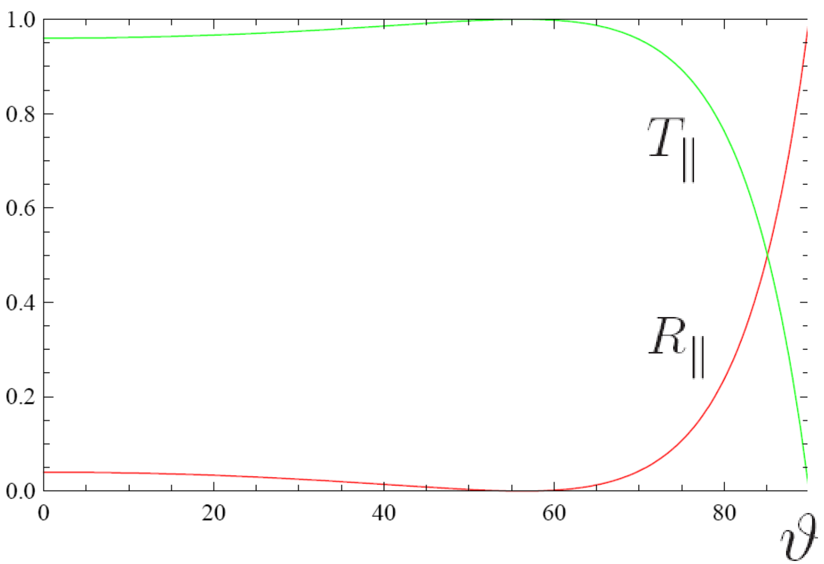
$$R = |r|^2$$

$$T = \frac{n_2 \cos\vartheta'}{n_1 \cos\vartheta} |t|^2$$

$$\boxed{1 = R + T}$$

Fresnel-formulák: reflexiós és transzmissziós intenzitások, numerikus példa





$$n = 1.5$$

Az energia megmarad:

$$R_\perp + T_\perp = 1$$

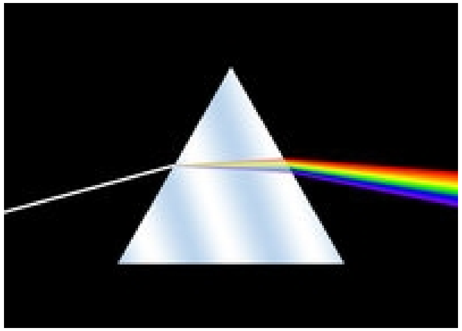
$$R_\parallel + T_\parallel = 1$$

minden beesési szögre és mindkét módusra (TE, TM)

Diszperzió és csoportsebesség

Diszperzió: a törésmutató függ a frekvenciától (a fény színétől) $n(\omega)$

$$\omega = c\,k = \frac{c_0}{n(\omega)}\,k$$



Diszperziós reláció: $\boxed{\omega(k)}$ kristályban: $\boxed{\omega(\mathbf{k})}$

Síkhullámok szuperpozíciója (pl. x irányban terjedő impulzus):

$$F(x,t) = \int dk\, C(k)\, e^{i[kx - \omega(k)t]}$$

Fourier-integrál

Feltevés:

C(k) „sima”, k_0 körül lassan változó függvény,
a $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ hullámszám-intervallumba eső síkhullámok szuperpozíciója

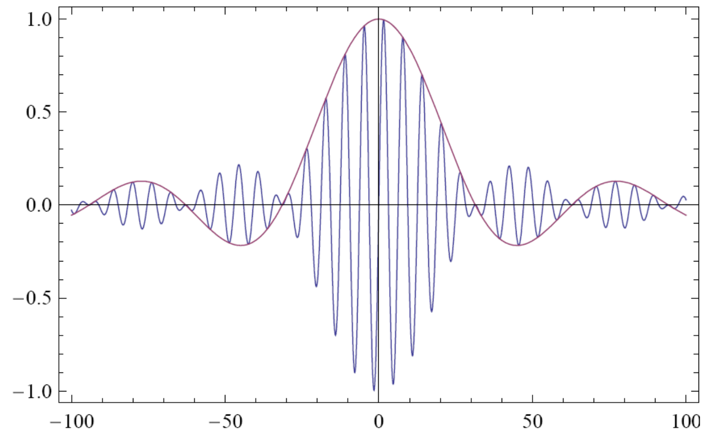
$$F(x,t) \approx C(k_0)\, e^{i[k_0 x - \omega(k_0)\, t]} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} dk\, e^{i(k-k_0)\left(x - \frac{d\omega}{dk} t\right)}$$

$$= \cdots = C(k_0)\, \frac{2i \sin\left[\Delta k \left(x - \frac{d\omega}{dk} t\right)\right]}{\Delta k \left(x - \frac{d\omega}{dk} t\right)}\, e^{i[k_0 x - \omega(k_0)\, t]}$$

modulált síkhullám

Az impulzus csúcsa ott van, ahol

$$x - \frac{d\omega}{dk} t = 0$$



Csoportsebesség: $\boxed{v_g = \dfrac{d\omega(k)}{dk}}$

Csoportsebesség vektorosan: $\boxed{\mathbf{v}_g = \dfrac{d\omega(\mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \equiv \mathrm{grad}_{\mathbf{k}}\, \omega(\mathbf{k})}$

Vákuumban a csoportsebesség = a fázissebességgel, azaz a fénysebességgel !