

# Optika és Relativitáselmélet

II. BsC fizikus hallgatóknak

6.

Geometriai optika – I.  
(hullámegyenlet alapján, eikonál,  
nemfény-optika)



# **A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata**

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$



# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

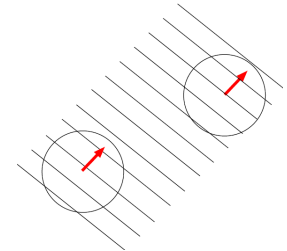
Homogén közeg    Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám

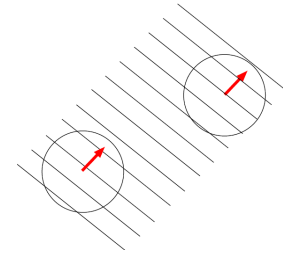


$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám



$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

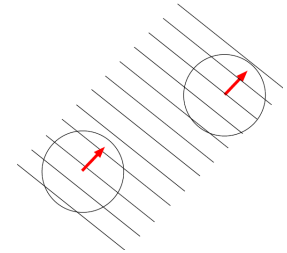
Inhomogén közeg

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

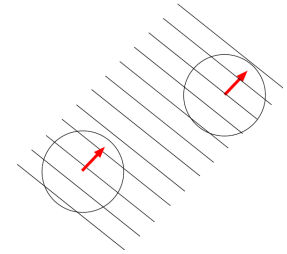


$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám



$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

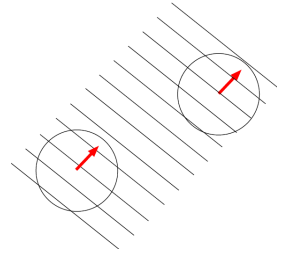
$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám



$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

Lassan változó közeg  $\swarrow$   
 $L \gg \lambda$

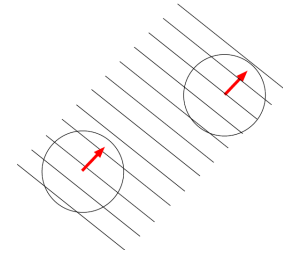
$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám

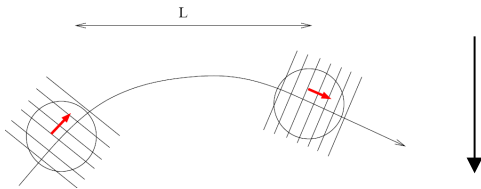


$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

$L \gg \lambda$

Lassan változó közeg



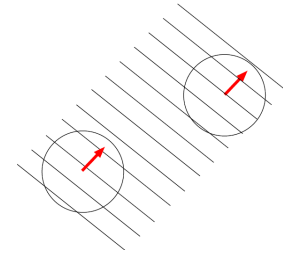
$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám

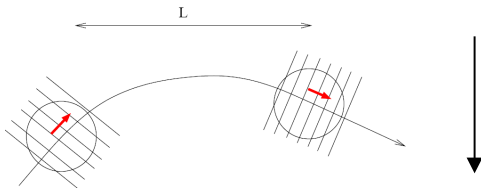


$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

$L \gg \lambda$

Lassan változó közeg



$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

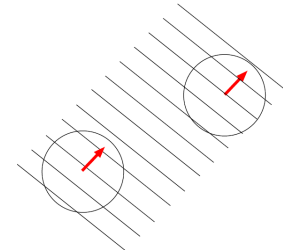
Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$



# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

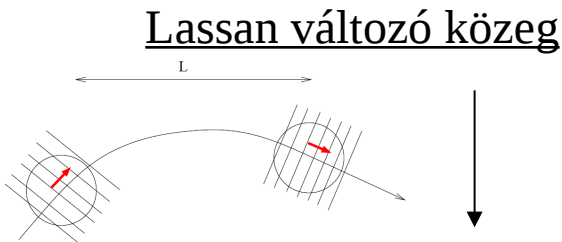
Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám



$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

$L \gg \lambda$



$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

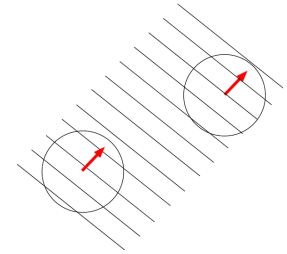
Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$

Lokális síkhullám-megoldás

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

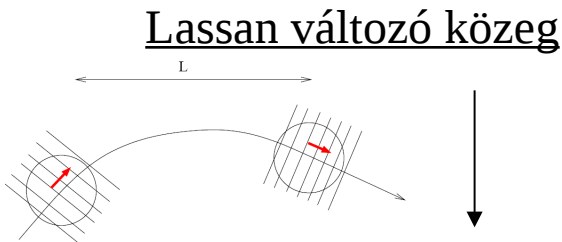
Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám



$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

$L \gg \lambda$



$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$

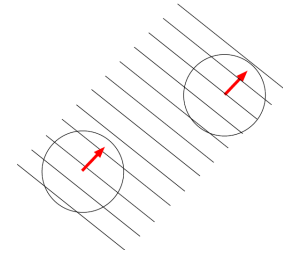
Lokális síkhullám-megoldás

Az  $A$  amplitudó lassan változik.

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

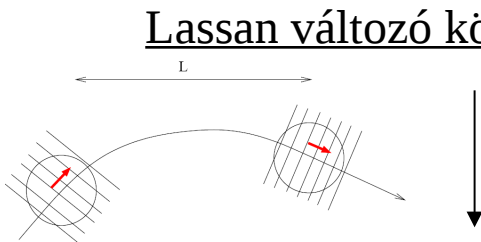
Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám



$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

$L \gg \lambda$



$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$

Lokális síkhullám-megoldás

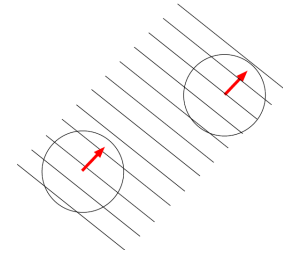
Az  $A$  amplitudó lassan változik.

$A$   $\varphi$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

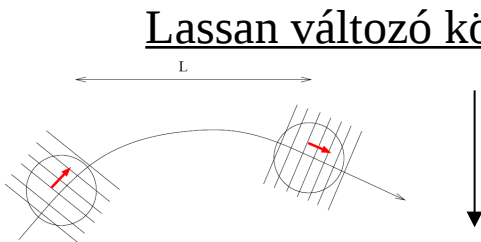
Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám



$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

$L \gg \lambda$



$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$

Lokális síkhullám-megoldás

Az  $A$  amplitudó lassan változik.

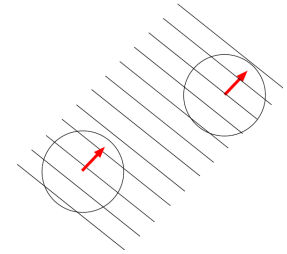
$A$   $\varphi$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  hordozza az információt. Ez a geometriai optika.

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám

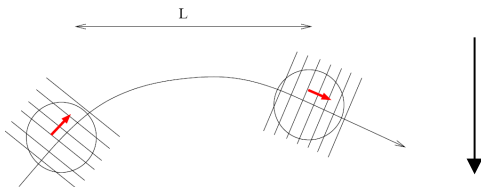


$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$



Lassan változó közeg



$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$

Lokális síkhullám-megoldás

Az  $A$  amplitudó lassan változik.

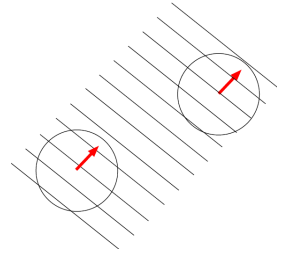
$A$   $\varphi$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  hordozza az információt. Ez a geometriai optika.

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám



$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

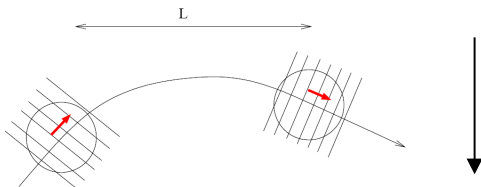
Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

$L \gg \lambda$

$L \sim \lambda$

Gyorsan változó közeg

Lassan változó közeg



$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$

Lokális síkhullám-megoldás

Az  $A$  amplitudó lassan változik.

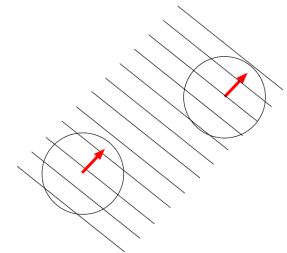
$A$   $\varphi$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  hordozza az információt. Ez a geometriai optika.

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám



$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

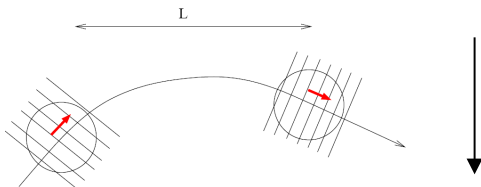
Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

$L \gg \lambda$

$L \sim \lambda$

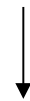
Lassan változó közeg

Gyorsan változó közeg



$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

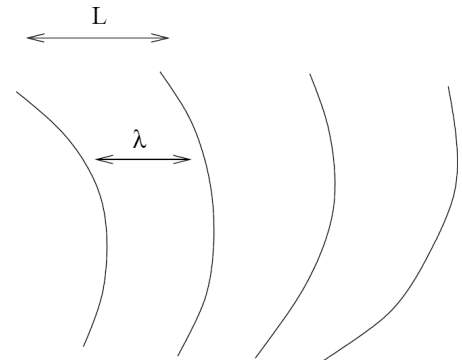


Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$

Lokális síkhullám-megoldás

Az  $A$  amplitudó lassan változik.

$A$   $\varphi$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

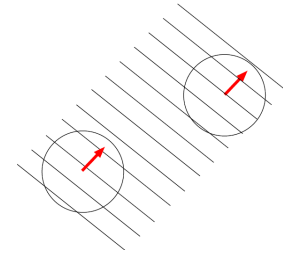


$\varphi(\mathbf{r}, t)$  hordozza az információt. Ez a geometriai optika.

# A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullám

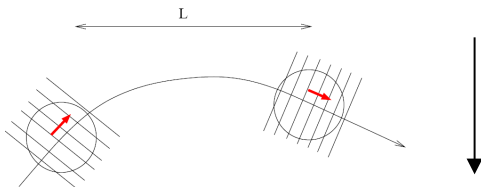


$\mathbf{k}$  mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámegyenlet:  $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

$L \gg \lambda$   $L \sim \lambda$

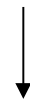
Lassan változó közeg



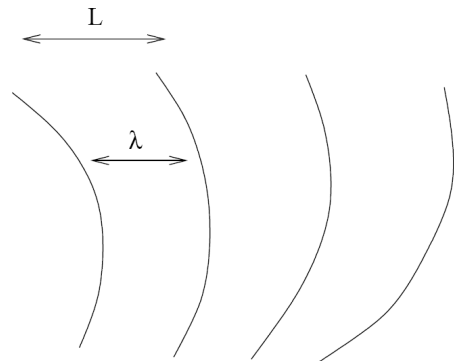
$L$  a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

Gyorsan változó közeg



Nincs értelme hullámról beszélni



Megoldás:  $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$

Lokális síkhullám-megoldás

Az  $A$  amplitudó lassan változik.

$A$   $\varphi$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  hordozza az információt. Ez a geometriai optika.



# Eikonál-közelítés

# Eikonál-közelítés

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik

# Eikonál-közelítés

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

# Eikonál-közelítés

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

# Eikonál-közelítés

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

# Eikonál-közelítés

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi}$$

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta\Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A) (\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$



# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A) (\text{grad}\varphi) + iA \Delta \varphi - A (\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A (\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámgyenletbe:

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A) (\text{grad}\varphi) + iA \Delta \varphi - A (\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A (\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámgyenletbe:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta\Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámgörvénybe:

ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámgörvénybe:

ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő) törésmutató}$$

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta\Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámgörbe egyenletbe:

ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő) törésmutató}$$

elsőrendű parc. diff. egyenlet

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámegyenletbe:

ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő)} \\ \text{törésmutató}$$

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámgörbe egyenletbe:

ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő) törésmutató}$$

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámgörvénybe:

ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő) törésmutató}$$

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámgörbe egyenletbe:

ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő) törésmutató}$$

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$
$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámmegyenletbe:  
ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő) törésmutató}$$

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$
$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Young-tétel:

$$\frac{\partial k_l}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x_l}$$

$$\frac{\partial k_l}{\partial x_m} = \frac{\partial k_m}{\partial x_l}$$



# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámmegyenletbe:  
ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő) törésmutató}$$

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$
$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Young-tétel:

$$\frac{\partial k_l}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x_l}$$
$$\frac{\partial k_l}{\partial x_m} = \frac{\partial k_m}{\partial x_l}$$

$$\text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) = 0$$

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámmegyenletbe:  
ez az **eikonál-egyenlet**

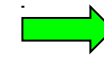
$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő) törésmutató}$$

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$

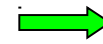
$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Young-tétel:

$$\frac{\partial k_l}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x_l}$$

$$\frac{\partial k_l}{\partial x_m} = \frac{\partial k_m}{\partial x_l}$$

$$\text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) = 0$$



$$\oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \oint \text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{F} = 0$$

Stokes-tétel

# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámegyenletbe:  
ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})}$  lokális (helyfüggő) törésmutató

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$

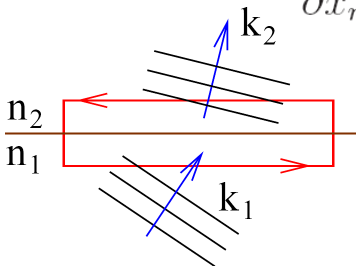
$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Young-tétel:  $\frac{\partial k_l}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x_l}$   
 $\frac{\partial k_l}{\partial x_m} = \frac{\partial k_m}{\partial x_l}$

$$\text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \oint \text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{F} = 0$$

Stokes-tétel



# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámgyenletbe:  
ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})}$  lokális (helyfüggő) törésmutató

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$

$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Young-tétel:

$$\frac{\partial k_l}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x_l}$$

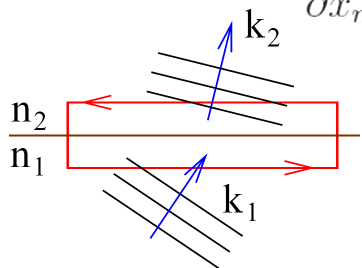
$$\frac{\partial k_l}{\partial x_m} = \frac{\partial k_m}{\partial x_l}$$

$$\text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \oint \text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{F} = 0$$

Stokes-tétel

$$0 = \oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int k_x^{(1)} dx + \int k_x^{(2)} (-dx)$$



# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámegyenletbe:  
ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})}$  lokális (helyfüggő)  
törésmutató

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$

$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Young-tétel:

$$\frac{\partial k_l}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x_l}$$

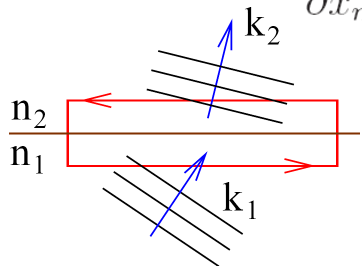
$$\frac{\partial k_l}{\partial x_m} = \frac{\partial k_m}{\partial x_l}$$

$$\text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \oint \text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{F} = 0$$

Stokes-tétel

$$0 = \oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int k_x^{(1)} dx + \int k_x^{(2)} (-dx) \quad \longrightarrow \quad k_x^{(1)} = k_x^{(2)}$$



# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámegyenletbe:  
ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})}$  lokális (helyfüggő) törésmutató  
elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$

$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Young-tétel:

$$\frac{\partial k_l}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x_l}$$

$$\frac{\partial k_l}{\partial x_m} = \frac{\partial k_m}{\partial x_l}$$

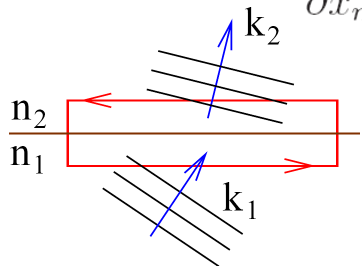
$$\text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \oint \text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{F} = 0$$

Stokes-tétel

$$0 = \oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int k_x^{(1)} dx + \int k_x^{(2)} (-dx) \quad \longrightarrow \quad k_x^{(1)} = k_x^{(2)}$$

$$\frac{\omega}{c_1} \sin \alpha = \frac{\omega}{c_2} \sin \beta$$





# Eikonál-közelítés

$$|\text{grad}A| \ll |\text{grad}\varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$  fázis gyorsan változik ( $\lambda$  távolságon  $2\pi$ ).

$A(\mathbf{r}, t)$  amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\varphi}) = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[ \Delta A + 2i(\text{grad}A)(\text{grad}\varphi) + iA\Delta\varphi - A(\text{grad}\varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámegyenletbe:  
ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad}\varphi)^2$$

$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})}$  lokális (helyfüggő) törésmutató  
elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist:  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0} e^{i(\nabla\varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim Ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t)$$

$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Young-tétel:

$$\frac{\partial k_l}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x_l}$$

$$\frac{\partial k_l}{\partial x_m} = \frac{\partial k_m}{\partial x_l}$$

$$\text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) = 0$$

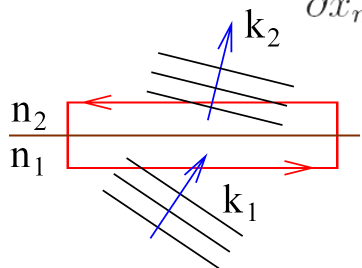
$$\oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \oint \text{rot}\mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{F} = 0$$

Stokes-tétel

$$0 = \oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int k_x^{(1)} dx + \int k_x^{(2)} (-dx) \quad \longrightarrow \quad k_x^{(1)} = k_x^{(2)}$$

$$\frac{\omega}{c_1} \sin \alpha = \frac{\omega}{c_2} \sin \beta$$

lokális Snellius-törvény



# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt:}$

# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$

# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ← „rövidített eikonál”

# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ←

„rövidített eikonál”

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega$$

$$\text{grad} \varphi = \text{grad} \psi$$

# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ←

„rövidített eikonál”

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \\ \text{grad} \varphi = \text{grad} \psi \end{array} \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2$$

# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ← „rövidített eikonál”

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\omega \\ \text{grad} \varphi &= \text{grad} \psi \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})$$



# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ← „rövidített eikonál”

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\omega \\ \text{grad} \varphi &= \text{grad} \psi \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})$$

Megoldásai:  $\psi(\mathbf{r})$

# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ← „rövidített eikonál”

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \\ \text{grad} \varphi = \text{grad} \psi \end{array} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})}$$

Megoldásai:  $\psi(\mathbf{r})$

$\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans felületek, a hullámfrontok}$

# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ← „rövidített eikonál”

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \\ \text{grad} \varphi = \text{grad} \psi \end{array} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})}$$

Megoldásai:  $\psi(\mathbf{r})$

$\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans felületek, a hullámfrontok}$

Ezekre merőlegesek a **fénysugarak**.

# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

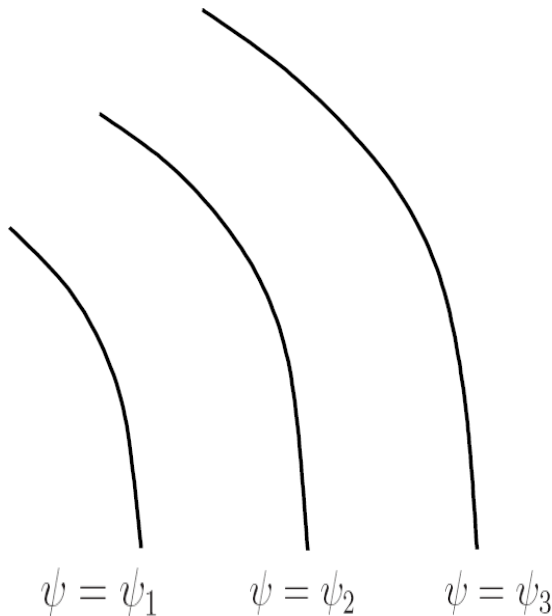
$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ← „rövidített eikonál”

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\omega \\ \text{grad} \varphi &= \text{grad} \psi \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})$$

Megoldásai:  $\psi(\mathbf{r})$

$\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans}$  felületek, a hullámfrontok

Ezekre merőlegesek a **fénysugarak**.



# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ← „rövidített eikonál”

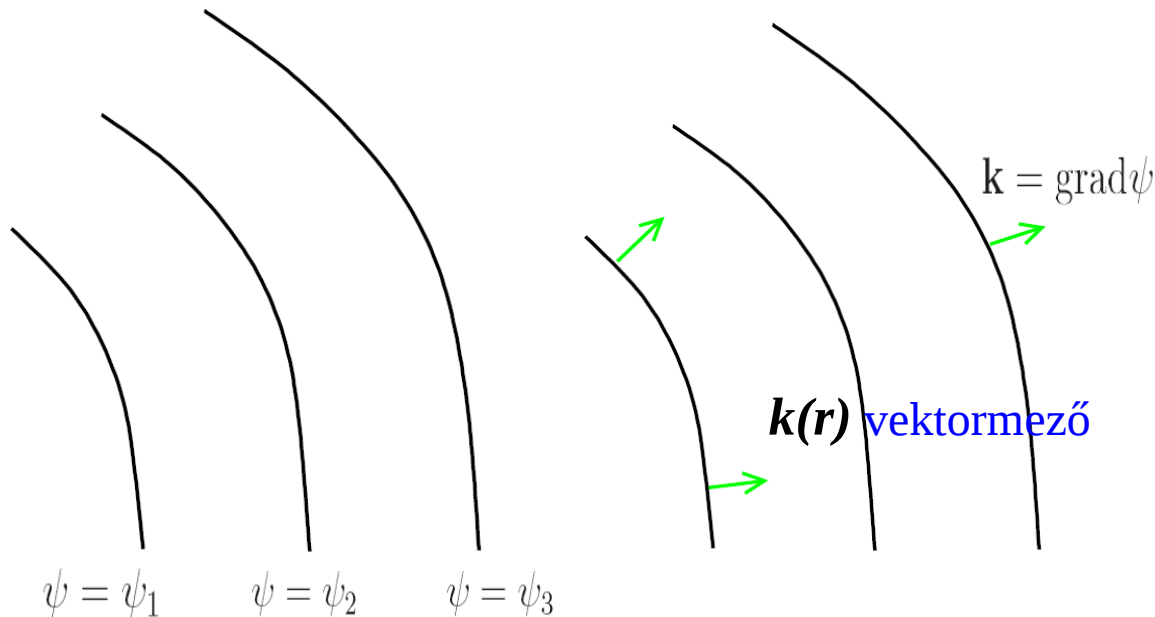
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})$$

$\text{grad} \varphi = \text{grad} \psi$

Megoldásai:  $\psi(\mathbf{r})$

$\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans}$  felületek, a hullámfrontok

Ezekre merőlegesek a **fénysugarak**.



# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ← „rövidített eikonál”

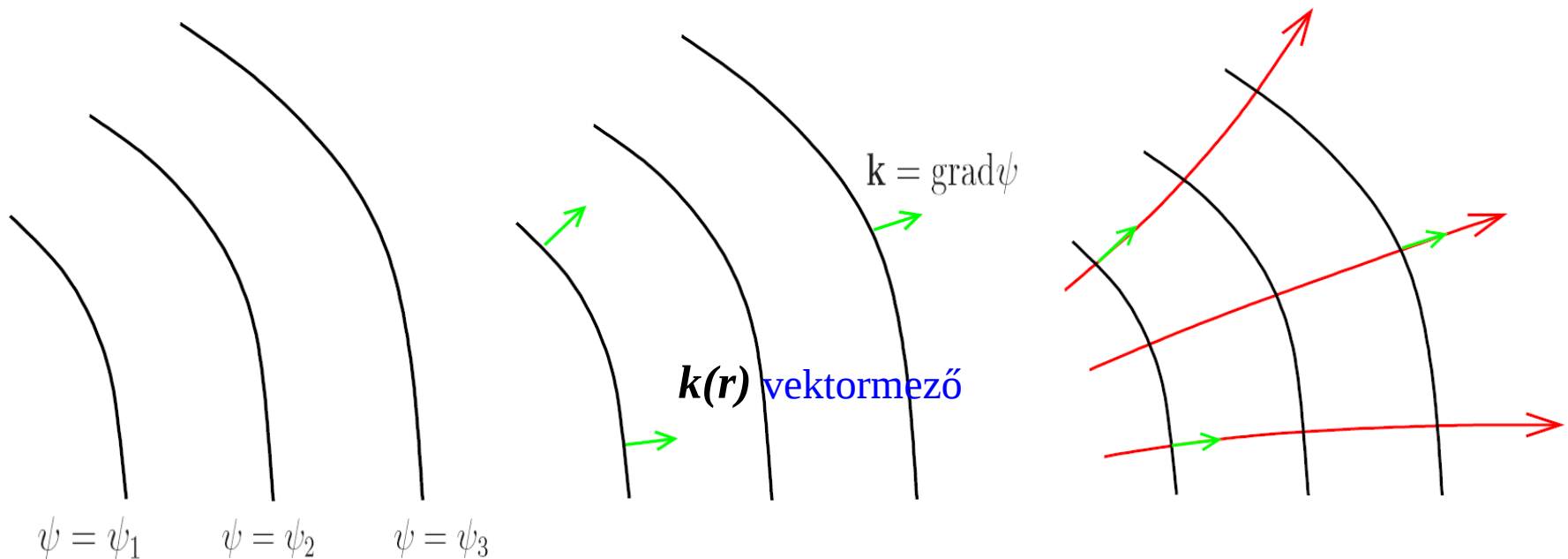
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega$$
$$\text{grad} \varphi = \text{grad} \psi$$

→  $\omega^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})$

Megoldásai:  $\psi(\mathbf{r})$

$\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans felületek, a hullámfrontok}$

Ezekre merőlegesek a **fénysugarak**.



# Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

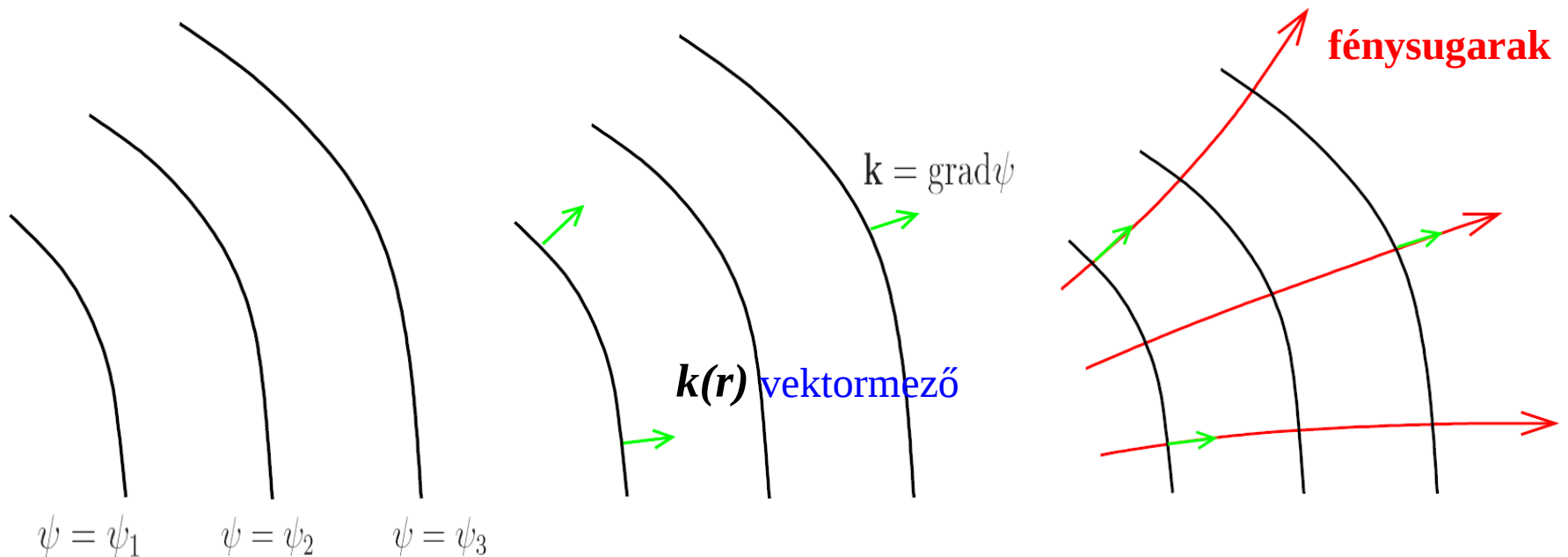
$\omega = \text{konstans mindig és mindenütt: } \varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$  ← „rövidített eikonál”

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\omega \\ \text{grad} \varphi &= \text{grad} \psi \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2 = \left( \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})}$$

Megoldásai:  $\psi(\mathbf{r})$

$\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans}$  felületek, a hullámfrontok

Ezekre merőlegesek a **fénysugarak**.



# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között



# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között



**Sir William Hamilton**  
(1805-1865)

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$



**Sir William Hamilton**  
(1805-1865)

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$



Sir William **Hamilton**  
(1805-1865)

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\mathbf{p} = \text{grad} S$$
$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$



Sir William **Hamilton**  
(1805-1865)

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\mathbf{p} = \text{grad} S$$
$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$



Sir William Hamilton  
(1805-1865)

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{k} = \text{grad} \varphi$$
$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\mathbf{p} = \text{grad} S$$
$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$



Sir William Hamilton

(1805-1865)

$$\mathbf{p} \sim \mathbf{k}$$
$$E \sim \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{k} = \text{grad} \varphi$$
$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\mathbf{p} = \text{grad} S$$
$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\mathbf{p} \sim \mathbf{k}$$

$$E \sim \omega$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{k} = \text{grad} \varphi$$
$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\mathbf{p} \sim \mathbf{k}$$

$$E \sim \omega$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$



# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\mathbf{p} = \text{grad} S$$
$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\mathbf{p} \sim \mathbf{k}$$
$$E \sim \omega$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{k} = \text{grad} \varphi$$
$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$



# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$

mozgásegyenletek:



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$

mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$

mozgásegyenletek:  
Hamilton-féle  
kanonikus  
egyenletek

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$

mozgásegyenletek:  
Hamilton-féle  
kanonikus  
egyenletek

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$



Sir William Hamilton

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{k}} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$

mozgásegyenletek:  
Hamilton-féle  
kanonikus  
egyenletek

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$



Sir William Hamilton

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{k}} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

csoportsebesség

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$

mozgásegyenletek:  
Hamilton-féle  
kanonikus  
egyenletek

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$



Sir William Hamilton

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{k}} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

csoportsebesség  
Hamilton-féle  
sugáregyenletek

# Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál:  $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$E$  mozgásállandó:

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$

mozgásegyenletek:  
Hamilton-féle  
kanonikus  
egyenletek

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$



Sir William **Hamilton**

(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál:  $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

$\omega$  mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{k}} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

csoportsebesség  
Hamilton-féle  
sugáregyenletek

Ezekből paraxiális közelítésben levezethető a lencsetörvény.

# Pályá

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



$$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$$

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

Ez épp a Fermat-elv!

$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$



# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$0 = \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt$$

$$= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$$



$$\delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



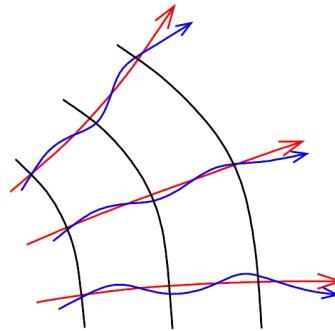
$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

Ez épp a Fermat-elv!



# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



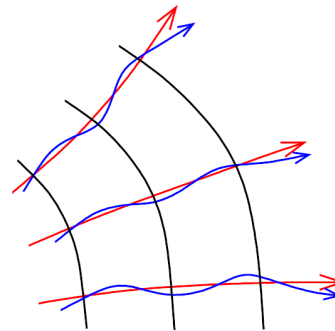
$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

**Ez épp a Fermat-elv!**



A valódi pályán és a szomszédos pályákon azonos az optikai úthossz:

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt \\ &= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



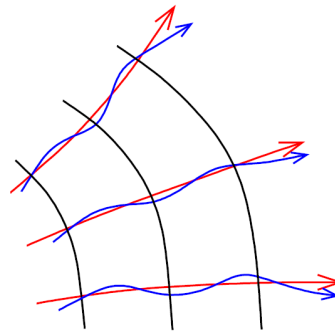
$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

Ez épp a Fermat-elv!



A valódi pályán és a szomszédos pályákon azonos az optikai úthossz: erősítő interferencia

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$0 = \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt$$

$$= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

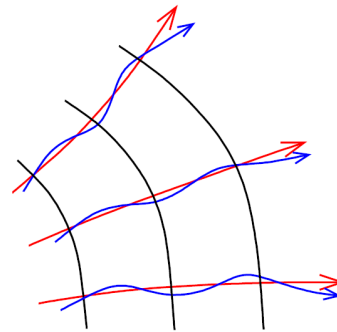
$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

Ez épp a Fermat-elv!

Rövidített eikonál:



A valódi pályán és a szomszédos pályákon azonos az optikai úthossz: **erősítő interferencia**

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$0 = \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt$$

$$= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r}$$



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



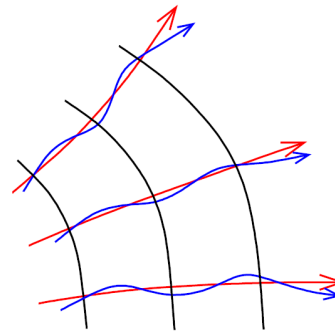
$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

Ez épp a Fermat-elv!



A valódi pályán és a szomszédos pályákon azonos az optikai úthossz: erősítő interferencia

Rövidített eikonál:

$$\psi = \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl \sim$$

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$0 = \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt$$

$$= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$$



$$\delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



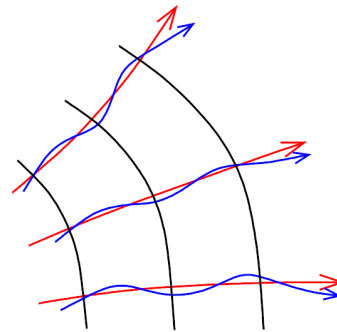
$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

**Ez épp a Fermat-elv!**



A valódi pályán és a szomszédos pályákon azonos az optikai úthossz: **erősítő interferencia**

Rövidített eikonál:

$$\psi = \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl \sim \text{optikai úthossz}$$



# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$0 = \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt$$

$$= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$$



$$\delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



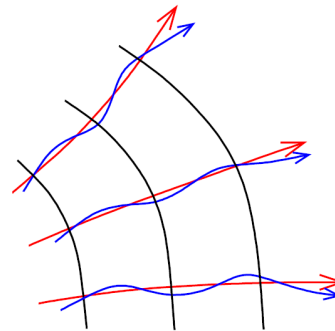
$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

Ez épp a Fermat-elv!



A valódi pályán és a szomszédos pályákon azonos az optikai úthossz: erősítő interferencia

Rövidített eikonál:

$$\psi = \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl \sim \text{optikai úthossz}$$

Melyik a legrövidebb út? Mindenütt **merőleges** a  $\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans}$  felületekre.

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$0 = \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt$$

$$= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$$



$$\delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



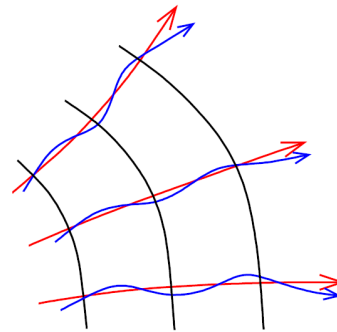
$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$

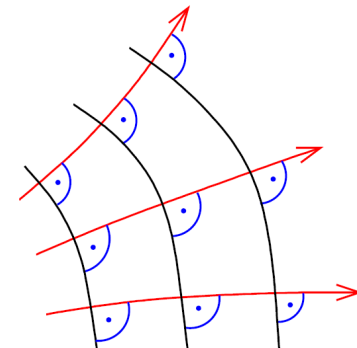


$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

Ez épp a Fermat-elv!



A valódi pályán és a szomszédos pályákon azonos az optikai úthossz: **erősítő interferencia**



Rövidített eikonál:

$$\psi = \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl \sim \text{optikai úthossz}$$

Melyik a legrövidebb út? Mindenütt **merőleges** a  $\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans}$  felületekre.

# Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

$$0 = \delta S = \delta \int L dt = \delta \int (K - V) dt = \delta \int (2K - E) dt = \delta \int 2K dt$$

$$= \delta \int mv^2 dt = \delta \int mv^2 \frac{dl}{v} = \delta \int mv dl = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$$



$$\delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető:  $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$



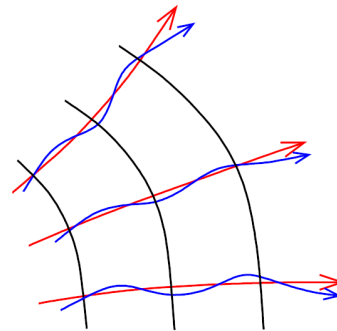
$$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$$

$$\delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$

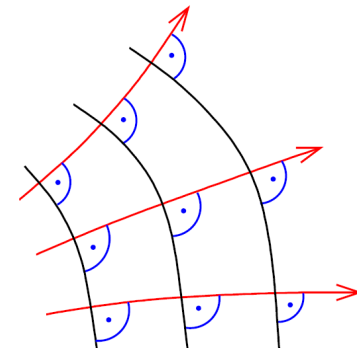


$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

Ez épp a Fermat-elv!



A valódi pályán és a szomszédos pályákon azonos az optikai úthossz: **erősítő interferencia**



Rövidített eikonál:

$$\psi = \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl \sim \text{optikai úthossz}$$

Melyik a legrövidebb út? Mindenütt **merőleges** a  $\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans}$  felületekre. A Fermat-elv által meghatározott fénysugarak a fázis-(eikonál-) felületek **ortogonális trajektóriái**.

# Valami hiányzik az analógiából

# Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

# Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$$

## Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L$$

## Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$$

$$H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L$$

$$L = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - H$$



## Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L$$

$$L = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - H$$

Keressük meg az optika Lagrange-függvényét!

## Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L$$

$$L = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - H$$

Keressük meg az optika Lagrange-függvényét!

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}\mathbf{k} - \Omega$$

## Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L$$

$$L = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - H$$

Keressük meg az optika Lagrange-függvényét!

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}\mathbf{k} - \Omega$$

$$\Omega = c(\mathbf{r}) |\mathbf{k}|$$

## Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L$$

$$\boxed{L = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - H}$$

Keressük meg az optika Lagrange-függvényét!

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}\mathbf{k} - \Omega$$

$$\Omega = c(\mathbf{r}) |\mathbf{k}|$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}} = c(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

# Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L \quad \boxed{L = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - H}$$

Keressük meg az optika Lagrange-függvényét!

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}\mathbf{k} - \Omega$$

$$\Omega = c(\mathbf{r}) |\mathbf{k}|$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}} = c(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

$$L = \left( c(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) \mathbf{k} - c(\mathbf{r}) |\mathbf{k}| \equiv 0$$

# Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L \quad \boxed{L = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - H}$$

Keressük meg az optika Lagrange-függvényét!

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}\mathbf{k} - \Omega$$

$\Omega = c(\mathbf{r}) |\mathbf{k}| \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}} = c(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$

$$L = \left( c(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) \mathbf{k} - c(\mathbf{r}) |\mathbf{k}| \equiv 0$$

A „Lagrange-függvény” azonosan zérus!

**hullámgyenlet**

**hullámegyenlet**

Hullámoptika



## hullámegyenlet

Hullámoptika

eikonál  
közelítés 

## hullámegyenlet

Hullámoptika

eikonál  
közelítés 

Geometriai optika

## hullámegyenlet

Hullámoptika

eikonál  
közelítés



Geometriai optika

**hullámegyenlet**

Hullámoptika

eikonál  
közelítés ↓

Geometriai optika

**eikonál-egyenlet**

## hullámegyenlet



Hullámoptika

eikonál  
közelítés

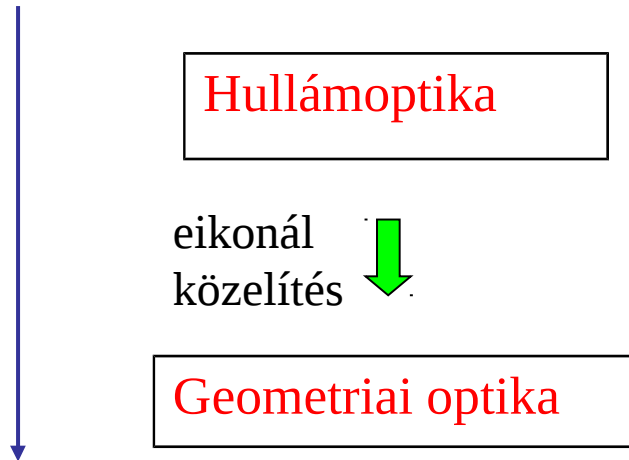


Geometriai optika

## eikonál-egyenlet

(diszperziós  
reláció )

## hullámegyenlet



## eikonál-egyenlet

(diszperziós

reláció:  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ )

## hullámegyenlet

Hullámoptika

eikonál  
közelítés ↓

Geometriai optika

Pontmechanika

## eikonál-egyenlet

(diszperziós

reláció:  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ )

## hullámegyenlet

Hullámoptika

eikonál  
közelítés ↓

Geometriai optika

Pontmechanika

## eikonál-egyenlet

(diszperziós

reláció:  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ )

$E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$



**hullámegyenlet**

Hullámoptika

eikonál  
közelítés ↓

Geometriai optika

Pontmechanika

$E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$

**eikonál-egyenlet**

(diszperziós

reláció:  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ )



**hullámgörbe**



Hullámoptika

eikonál  
közelítés ↓

Geometriai optika



**Schrödinger-egyenlet**



Pontmechanika

$E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$

**eikonál-egyenlet**

(diszperziós

reláció:  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ )

**hullámegyenlet**



Hullámoptika

eikonál  
közelítés ↓

Geometriai optika

**eikonál-egyenlet**

(diszperziós

reláció:  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ )

**Schrödinger-egyenlet**

Hullámmechanika

Pontmechanika



$E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$



**hullámegyenlet**

**Schrödinger-egyenlet**

Hullámoptika

Hullámmechanika

eikonál  
közelítés ↓

Geometriai optika

Pontmechanika

**eikonál-egyenlet**

(diszperziós

reláció:  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ )

$E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$



**hullámgyenlet**

**Schrödinger-egyenlet**

Hullámoptika

Hullámmechanika

eikonál  
közelítés ↓



Geometriai optika

Pontmechanika

**eikonál-egyenlet**

(diszperziós

reláció:  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ )

$E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$



**hullámgörbe**

**Schrödinger-egyenlet**

Hullámoptika

Hullámmechanika

eikonál  
közelítés ↓

↓ WKB közelítés

Geometriai optika

Pontmechanika

**eikonál-egyenlet**

(diszperziós

reláció:  $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ )

$E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$



Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

Mechanika

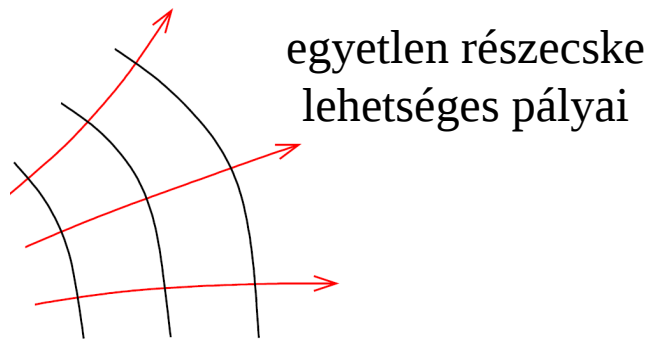
Optika



# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

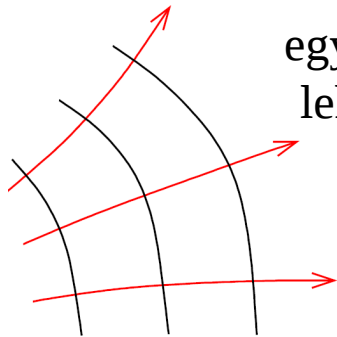
Mechanika

Optika



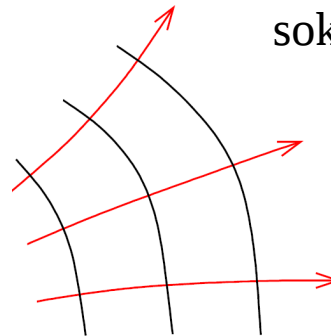
# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

Mechanika



egyetlen részecske  
lehetséges pályái

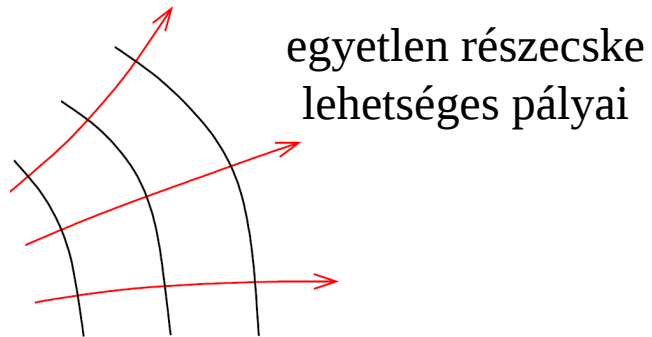
Optika



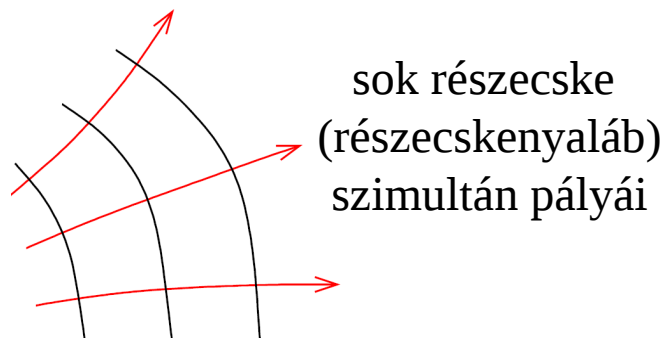
sok fénysugár (fénynyaláb)  
szimultán pályái

# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

## Mechanika

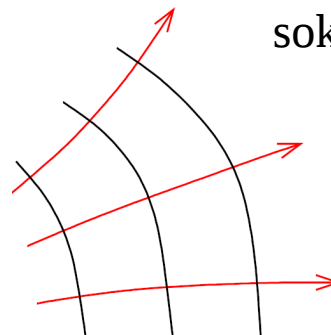


egyetlen részecske  
lehetséges pályái



sok részecske  
(részecskenyaláb)  
szimultán pályái

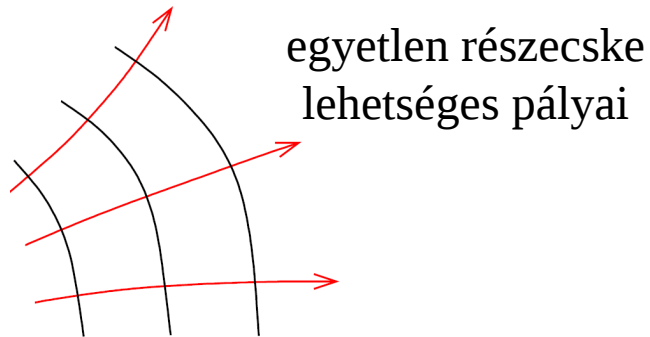
## Optika



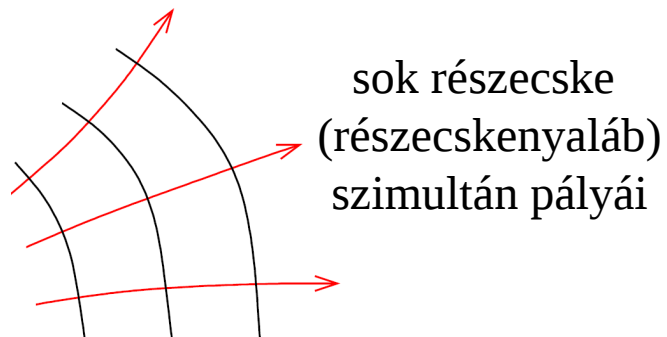
sok fénysugár (fénynyaláb)  
szimultán pályái

# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

## Mechanika

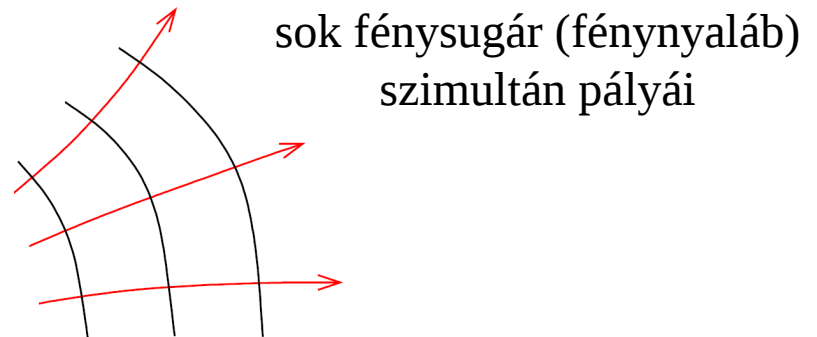


egyetlen részecske  
lehetséges pályái

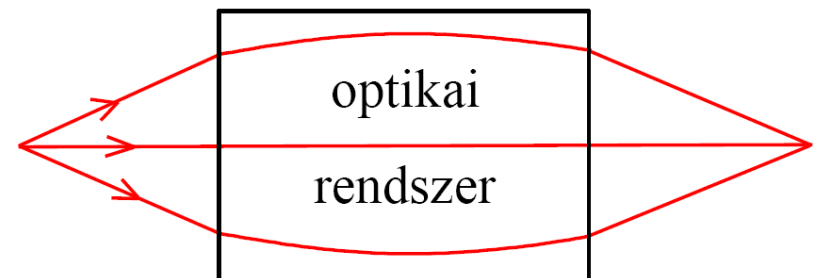


sok részecske  
(részecskenyaláb)  
szimultán pályái

## Optika

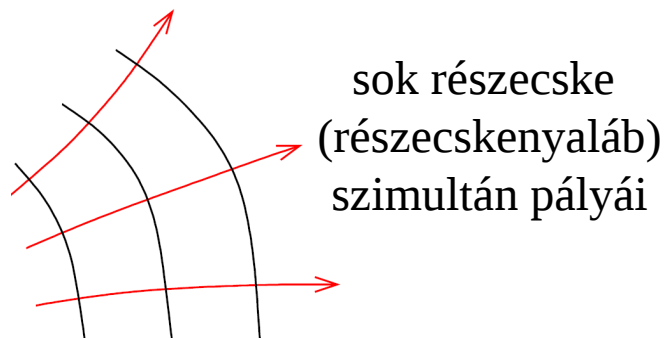
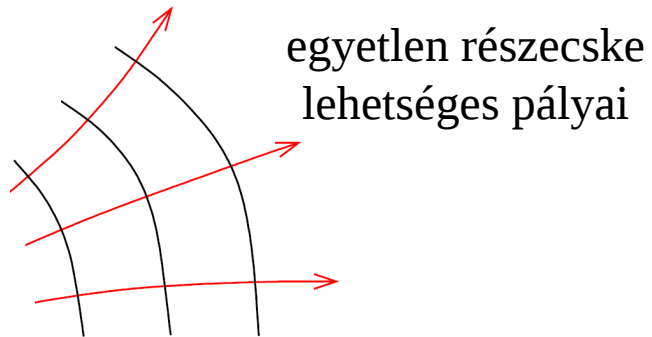


sok fénysugár (fénynyaláb)  
szimultán pályái

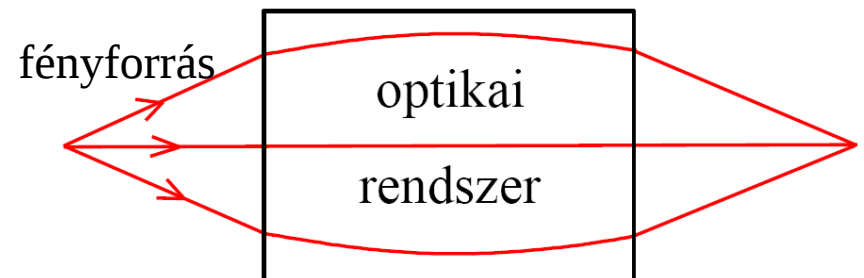
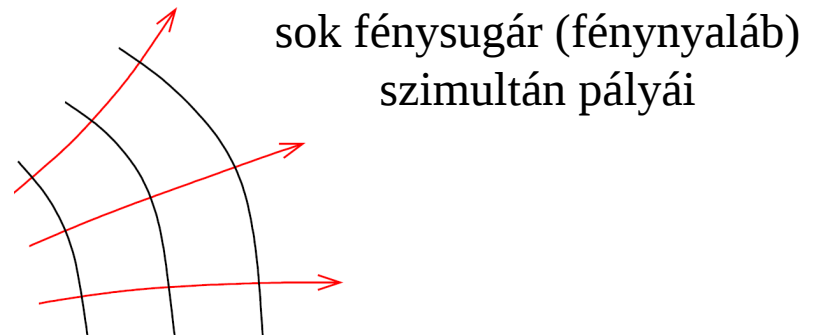


# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

## Mechanika

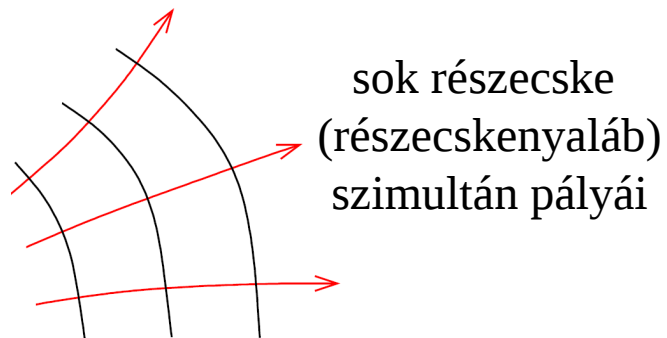
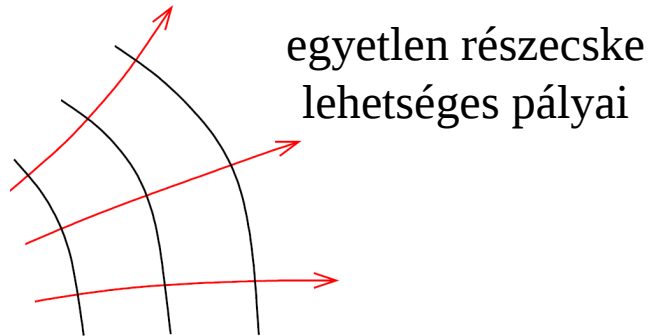


## Optika

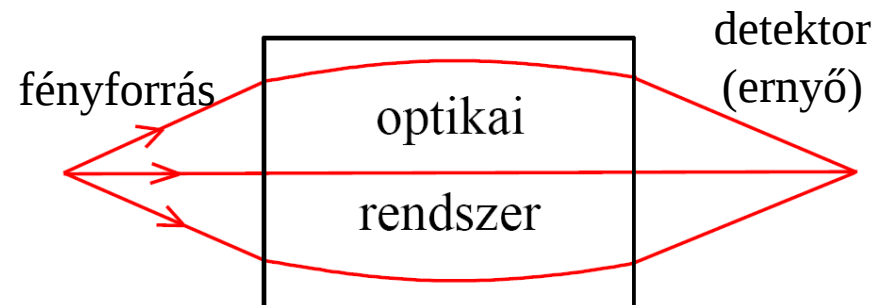
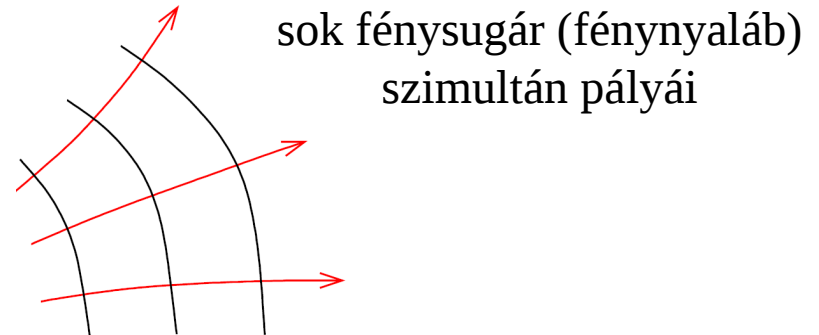


# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

## Mechanika

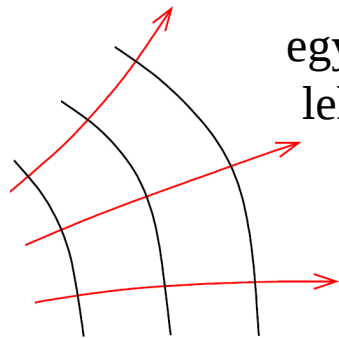


## Optika

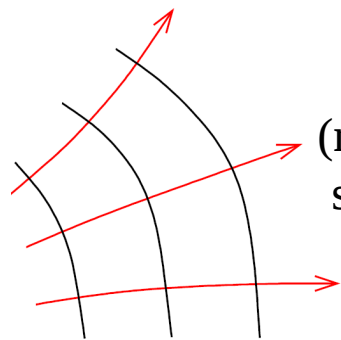


# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

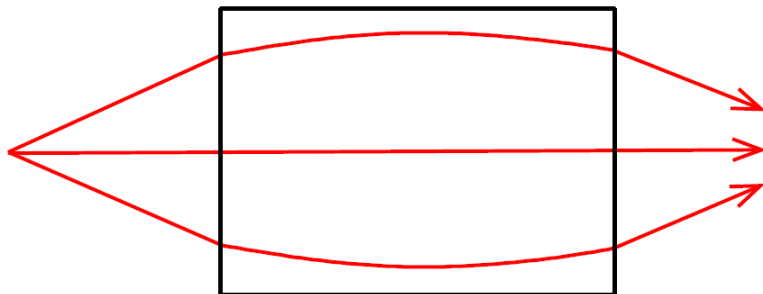
## Mechanika



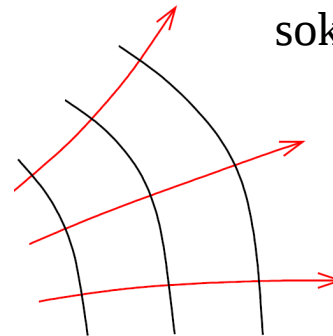
egyetlen részecske  
lehetséges pályái



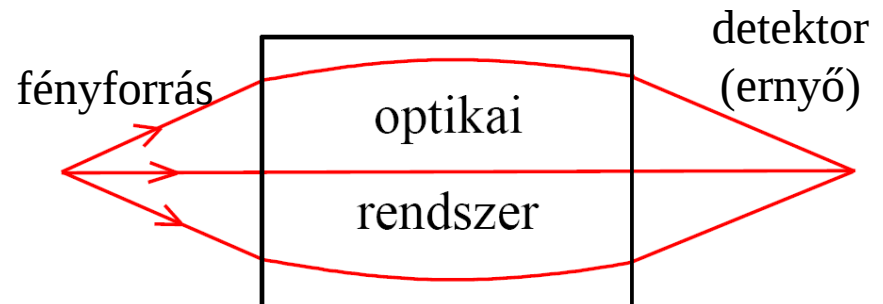
sok részecske  
(részecskenyaláb)  
szimultán pályái



## Optika

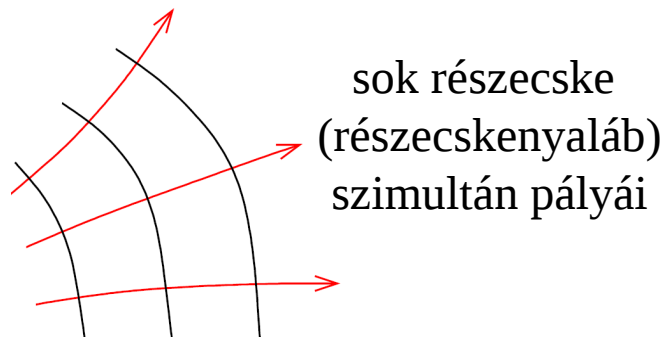
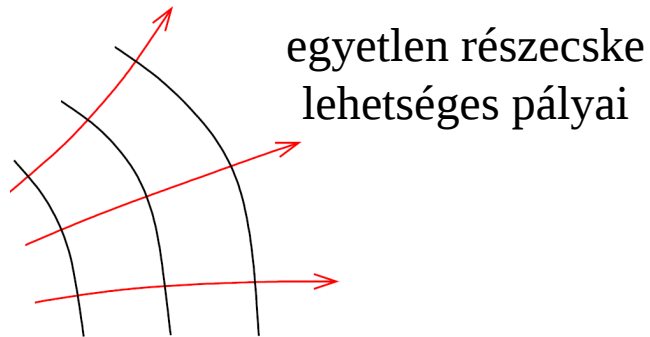


sok fénysugár (fénynyaláb)  
szimultán pályái

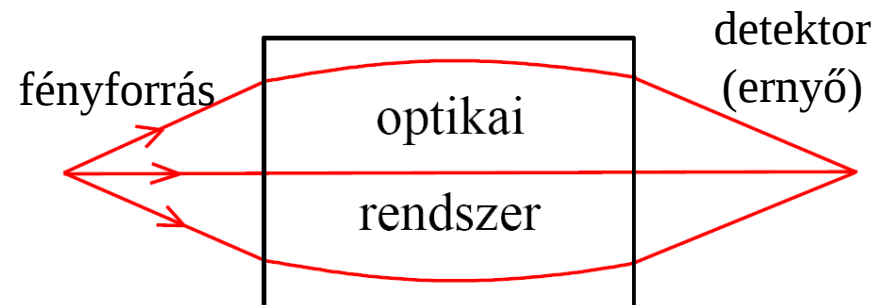
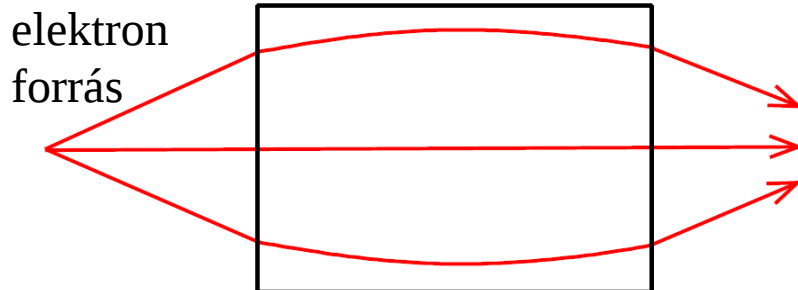
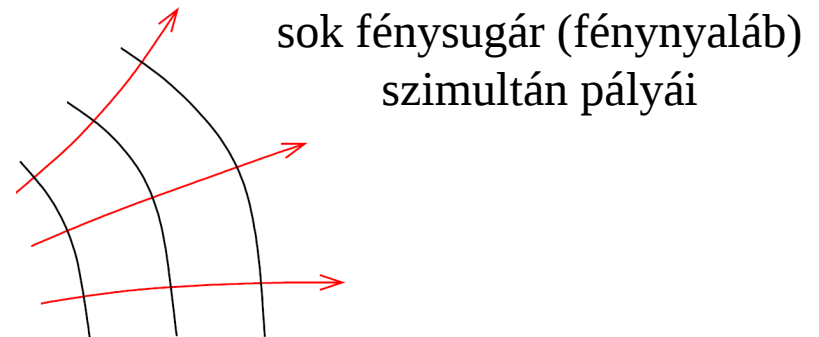


# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

## Mechanika



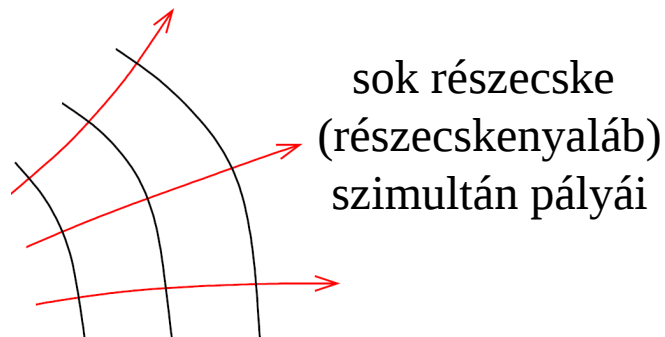
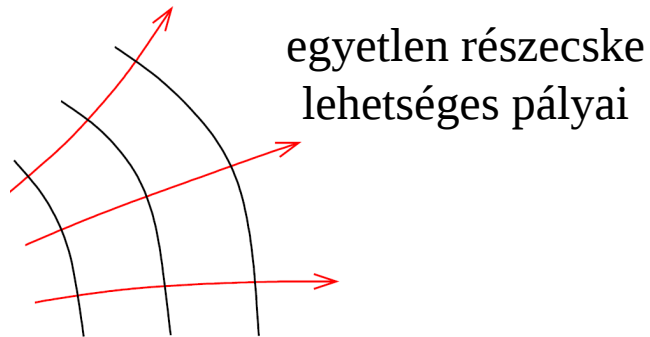
## Optika



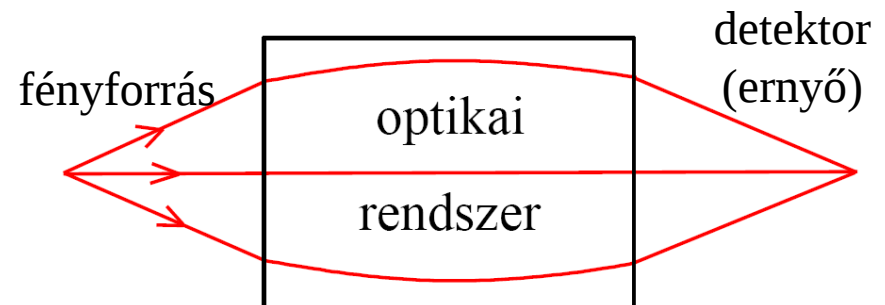
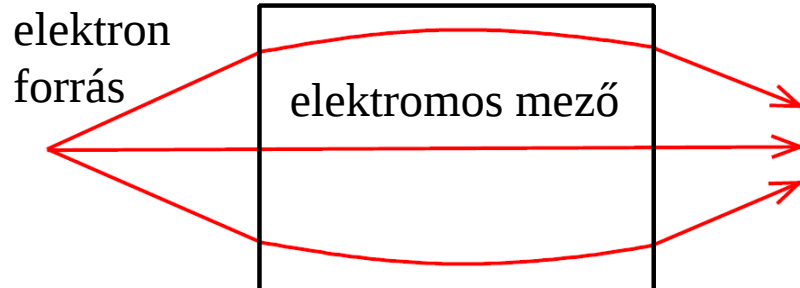
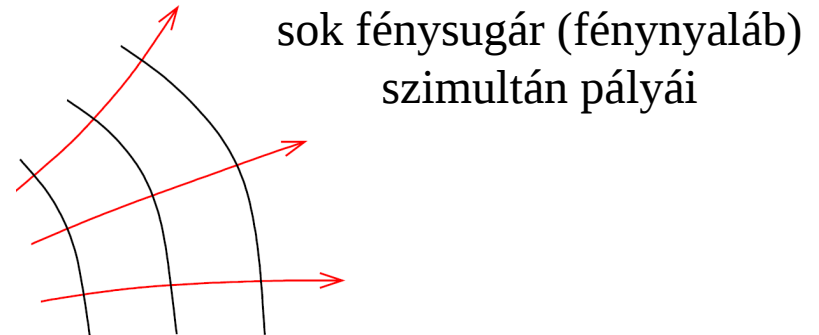


# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

## Mechanika

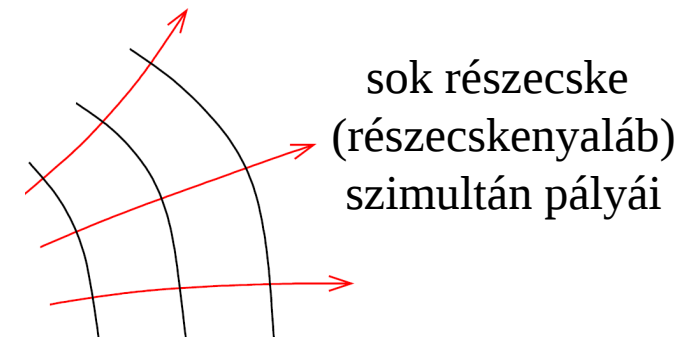
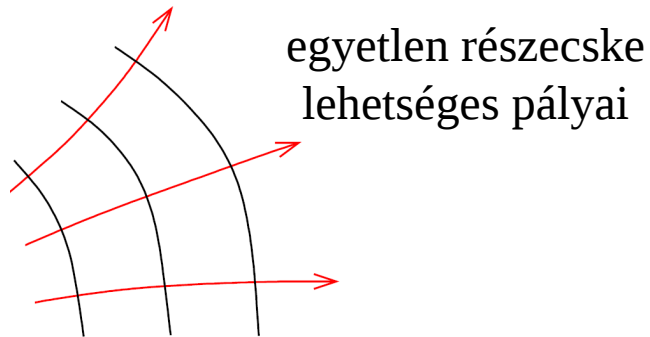


## Optika

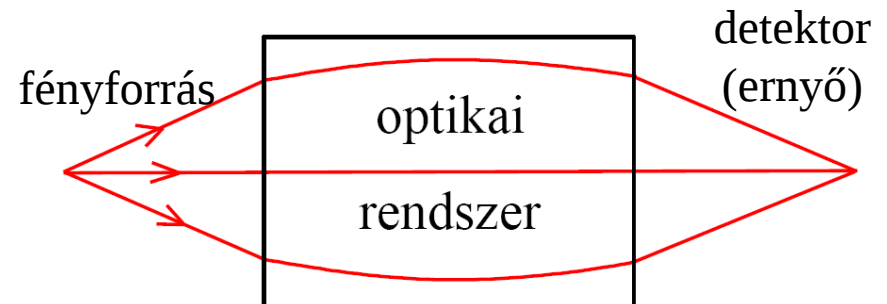
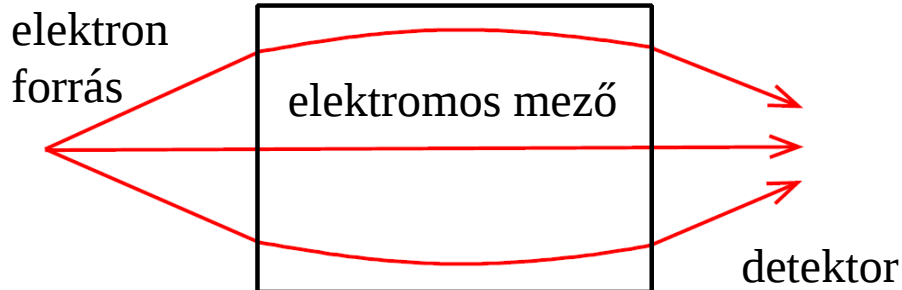
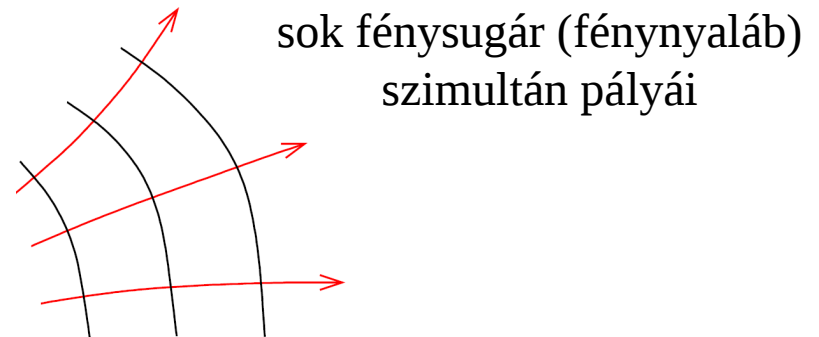


# Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

## Mechanika



## Optika



# Részecske-optika

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl$

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$



# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$

$\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség,

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia:

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:



# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

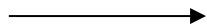
Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Maupertius:



# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Maupertius:  $0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Optika: Fermat-elv:

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Optika: Fermat-elv:

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$  alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Optika: Fermat-elv:

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$  alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

---

Különbségek

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Optika: Fermat-elv:

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$  alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

---

részecske  $\longleftarrow$  **Különbségek**  $\longrightarrow$  optika



# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Optika: Fermat-elv:

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$  alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

---

részecske ← **Különbségek** → optika

$n(E, \mathbf{r})$  függ a részecske energiájától,  
diszperzív közeg

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

---

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

---

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$  alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

---

részecske  $\longleftarrow$  **Különbségek**  $\longrightarrow$  optika

$n(E, \mathbf{r})$  függ a részecske energiájától,  
diszperzív közeg

$n(\omega, \mathbf{r})$  diszperzió

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$  alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

részecske  $\longleftarrow$  **Különbségek**  $\longrightarrow$  optika

$n(E, \mathbf{r})$  függ a részecske energiájától,  
diszperzív közeg

$n(\omega, \mathbf{r})$  diszperzió

éles képhez monoenergetikus elektronok  
kellenek.

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$  alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

részecske ← **Különbségek** → optika

$n(E, \mathbf{r})$  függ a részecske energiájától,  
diszperzív közeg

$n(\omega, \mathbf{r})$  diszperzió

éles képhez monoenergetikus elektronok  
kellenek.

éles képhez monokromatikus  
fény kell.

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$  alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

részecske ← **Különbségek** → optika

$n(E, \mathbf{r})$  függ a részecske energiájától,  
diszperzív közeg

$n(\omega, \mathbf{r})$  diszperzió

éles képhez monoenergetikus elektronok  
kellenek.  $n(\mathbf{r})$  nincs korlát

éles képhez monokromatikus  
fény kell.

# Részecske-optika

Optika: Fermat-elv:  $\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$  a mechanikai analogonja

Téves analógia:  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$   $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$  **TÉVES!!!**

Ok:  $c(\mathbf{r})$  a fázissebesség, de a  $v(\mathbf{r})$  részecskesebesség a  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  csoportsebesség analogonja.

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Optika: Fermat-elv:

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$  alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

részecske ← **Különbségek** → optika

$n(E, \mathbf{r})$  függ a részecske energiájától,  
diszperzív közeg

éles képhez monoenergetikus elektronok  
kellenek.  $n(\mathbf{r})$  nincs korlát

$n(\omega, \mathbf{r})$  diszperzió

éles képhez monokromatikus  
fény kell.

$n > 1$ , mert  $C < c_0$

# Elektronmikroszkóp

# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m

# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:

# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6} \text{ m}$  baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Elég nagy gyorsítófeszültséggel tetszőleges kis hullámhossz érhető el.





# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Elég nagy gyorsítófeszültséggel tetszőleges kis hullámhossz érhető el.

- vírusok



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Elég nagy gyorsítófeszültséggel tetszőleges kis hullámhossz érhető el.

- vírusok
- molekulák



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Elég nagy gyorsítófeszültséggel tetszőleges kis hullámhossz érhető el.

- vírusok
- molekulák
- atomok



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6} \text{ m}$  baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Elég nagy gyorsítófeszültséggel tetszőleges kis hullámhossz érhető el.

- vírusok
- molekulák
- atomok
- kvarkok a proton belsejében  $10^{-15} \text{ m}$





# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Elég nagy gyorsítófeszültséggel tetszőleges kis hullámhossz érhető el.

- vírusok
- molekulák
- atomok
- kvarkok a proton belsejében  $10^{-15}$  m

Vigyázat: a képképzés itt is hullámjelenség, de QM szerint az elektron is hullám!



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Elég nagy gyorsítófeszültséggel tetszőleges kis hullámhossz érhető el.

- vírusok
- molekulák
- atomok
- kvarkok a proton belsejében  $10^{-15}$  m

Vigyázat: a képképzés itt is hullámjelenség, de QM szerint az elektron is hullám!

Vigyázat: kis méreteknél a szóróobjektumok is kvantumosak



# Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség fénynél:  $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Elég nagy gyorsítófeszültséggel tetszőleges kis hullámhossz érhető el.

- vírusok
- molekulák
- atomok
- kvarkok a proton belsejében  $10^{-15}$  m

Vigyázat: a képképzés itt is hullámjelenség, de QM szerint az elektron is hullám!

Vigyázat: kis méreteknél a szóróobjektumok is kvantumosak



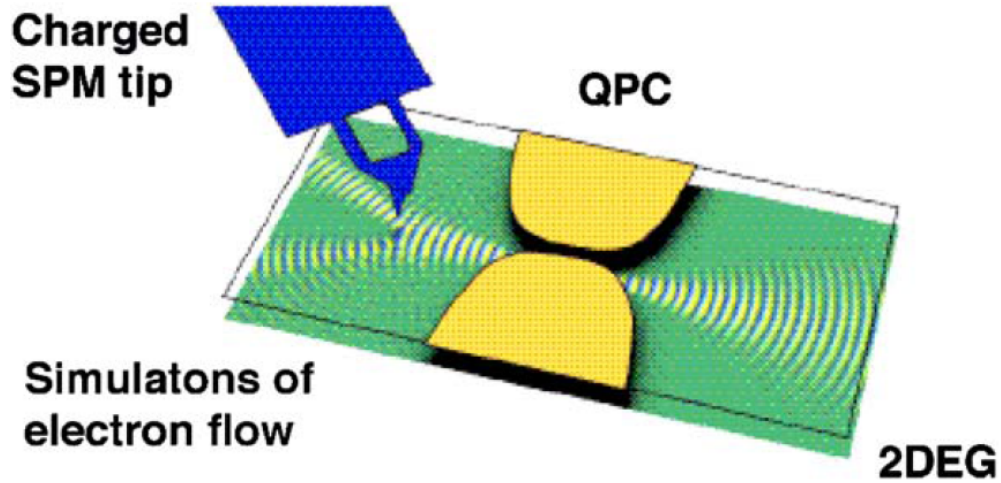
kvantummechanikai szóráselmélet



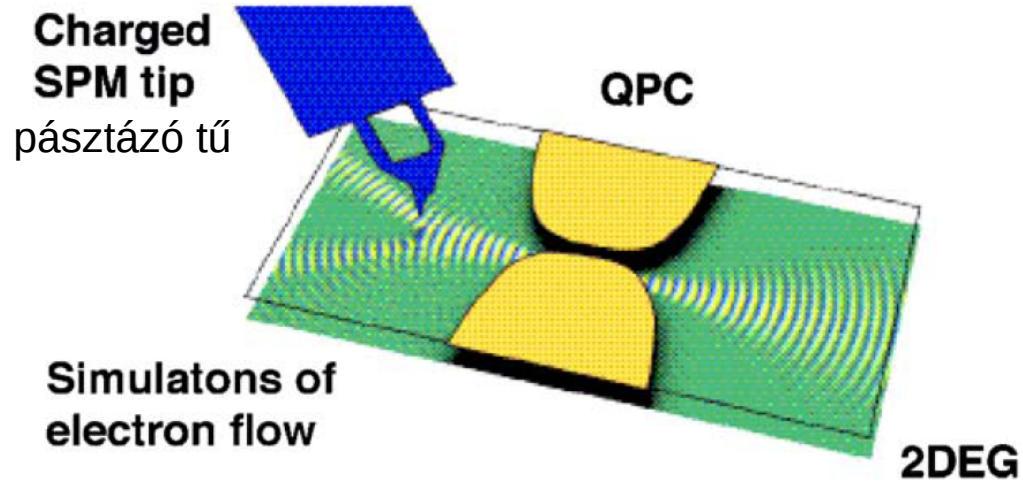
# **Elektronok hullámfüggvényének „mérése” pásztázó elektronmikroszkóppal**



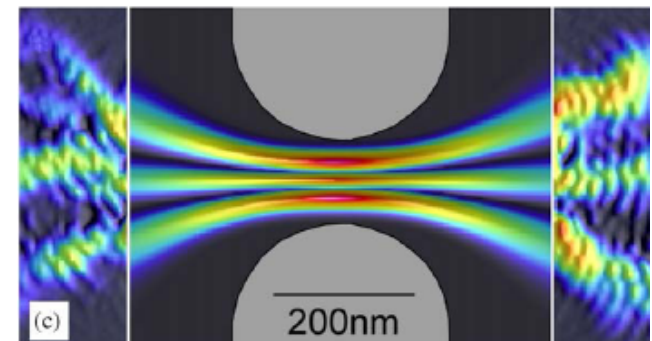
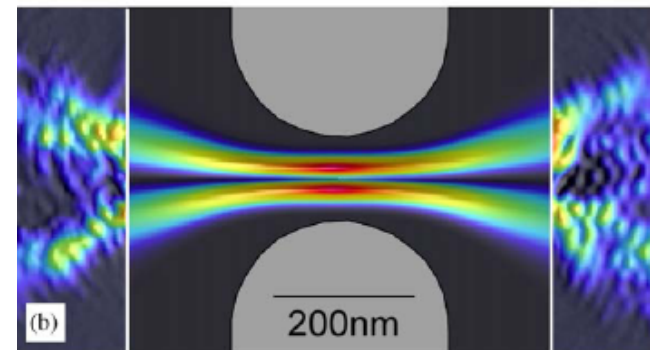
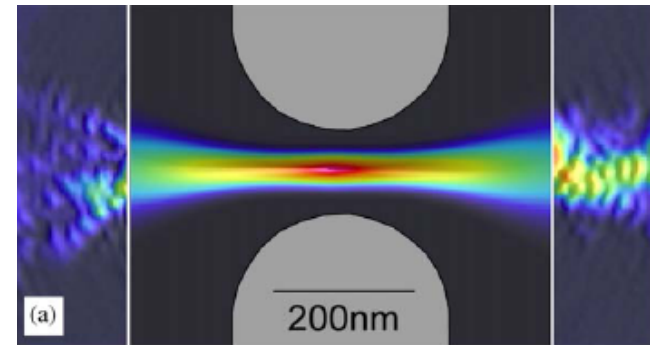
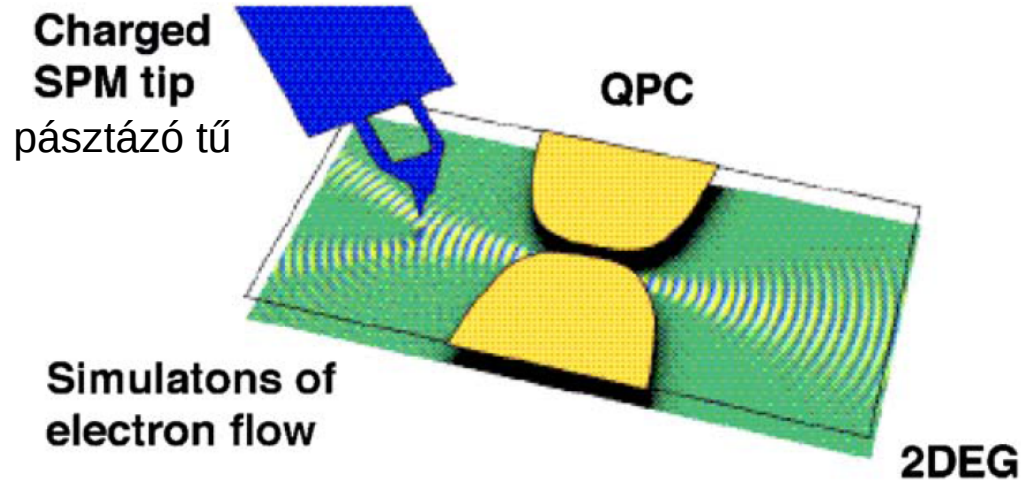
# Elektronok hullámfüggvényének „mérése” pásztázó elektronmikroszkóppal



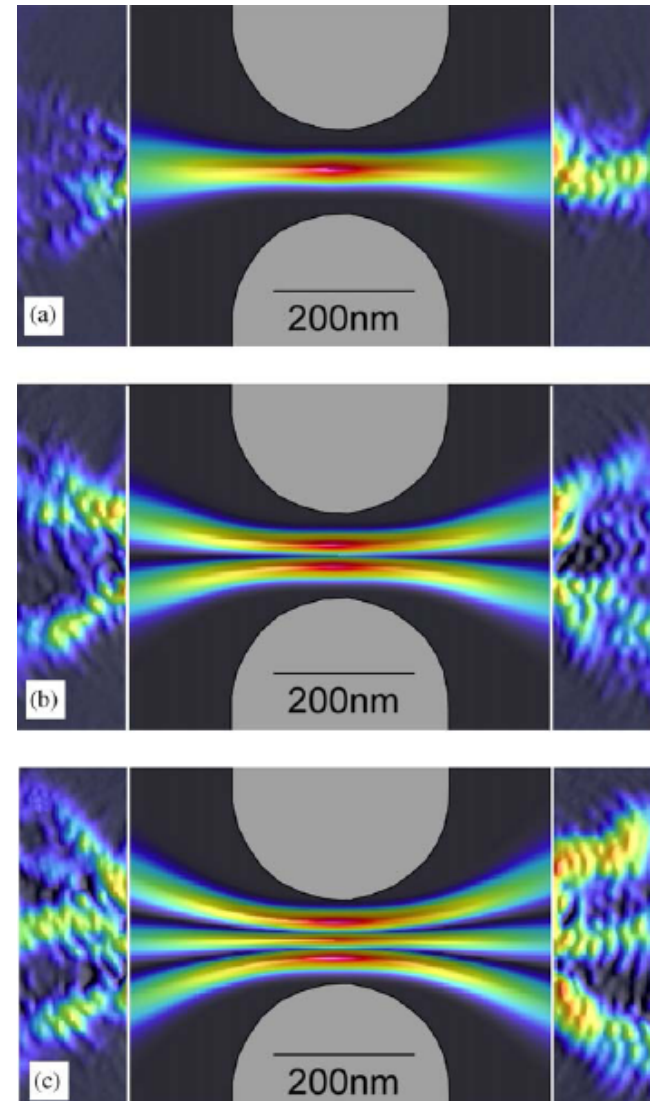
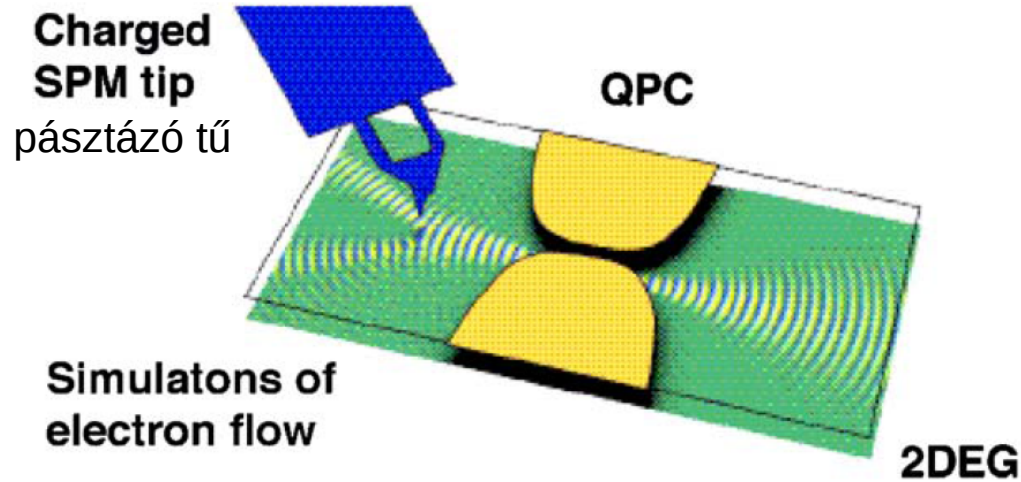
# Elektronok hullámfüggvényének „mérése” pásztázó elektronmikroszkóppal



# Elektronok hullámfüggvényének „mérése” pásztázó elektronmikroszkóppal



# Elektronok hullámfüggvényének „mérése” pásztázó elektronmikroszkóppal



R. M. Westervelt, M. A. Topinka, B. J. LeRoy, A. C. Bleszynski, K. Aida, S.E.J. Shaw, E. J. Heller, K.D. Maranowski, A. C. Gossard:  
Imaging electron waves,  
Physica E **24**, 63-69 (2004)

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.



# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

**Az idő irreleváns paraméter** (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

$$\text{Ekkor: } dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

**Az idő irreleváns paraméter** (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw$$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.


Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw$$

$L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$



# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

**Az idő irreleváns paraméter** (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw$$



Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$



# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

ez a pályaequation: másodrendű közönséges diff. egyenlet

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet  
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet  
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet  
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

Speciális paraméterezés:

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet  
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

Speciális paraméterezés: ívhosszparaméter:

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet  
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

Speciális paraméterezés: ívhosszparaméter:  $w = s \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e} \quad e^2 = 1 \quad |\dot{\mathbf{r}}| = 1$



# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet  
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

Speciális paraméterezés: ívhosszparaméter:  $w = s \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e} \quad e^2 = 1 \quad |\dot{\mathbf{r}}| = 1$

$$\frac{d}{ds} [n(\mathbf{r})\mathbf{e}] = \text{grad } n(\mathbf{r})$$

$$n \mathbf{e}'(s) + \mathbf{e} \left( \text{grad } n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n$$

$$n \mathbf{e}'(s) = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}) \text{grad } n$$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

**Az idő irreleváns paraméter** (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet  
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

Speciális paraméterezés: ívhosszparaméter:  $w = s \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e} \quad \mathbf{e}^2 = 1 \quad |\dot{\mathbf{r}}| = 1$

$$\frac{d}{ds} [n(\mathbf{r})\mathbf{e}] = \text{grad } n(\mathbf{r})$$

$$n \mathbf{e}'(s) + \mathbf{e} \left( \text{grad } n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n$$

$$n \mathbf{e}'(s) = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}) \text{grad } n$$

$$\mathbf{e}'(s) = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}) \text{grad } (\ln n(\mathbf{r}))$$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter

(nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

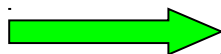
ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet  
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

Speciális paraméterezés: ívhosszparaméter:  $w = s \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e} \quad \mathbf{e}^2 = 1 \quad |\dot{\mathbf{r}}| = 1$

$$\frac{d}{ds} [n(\mathbf{r})\mathbf{e}] = \text{grad } n(\mathbf{r})$$

$$n \mathbf{e}'(s) + \mathbf{e} \left( \text{grad } n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n$$

$$n \mathbf{e}'(s) = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}) \text{grad } n$$



$$\mathbf{e}'(s) = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}) \text{grad } (\ln n(\mathbf{r}))$$

síkprobléma:  $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$

# Pálya számítása a Fermat-elvvel

## Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges  $w$  paraméterrel adjuk meg:  $\mathbf{r}(w)$

Ekkor:  $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[ n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény:  $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[ n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

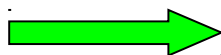
ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet  
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

Speciális paraméterezés: ívhosszparaméter:  $w = s \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e} \quad \mathbf{e}^2 = 1 \quad |\dot{\mathbf{r}}| = 1$

$$\frac{d}{ds} [n(\mathbf{r})\mathbf{e}] = \text{grad } n(\mathbf{r})$$

$$n \mathbf{e}'(s) + \mathbf{e} \left( \text{grad } n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n$$

$$n \mathbf{e}'(s) = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}) \text{grad } n$$



$$\mathbf{e}'(s) = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}) \text{grad } (\ln n(\mathbf{r}))$$

síkprobléma:  $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$

$$\varphi'(s) = \dots$$

egyetlen egyenlet

Speciális (egyszerű) törésmutató:

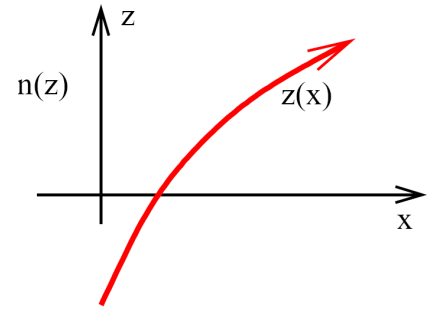
Speciális (egyszerű) törésmutató: pl.  $n(z)$

Speciális (egyszerű) törésmutató: pl.  $n(z)$

Pálya:  $z(x)$

Speciális (egyszerű) törésmutató: pl.  $n(z)$

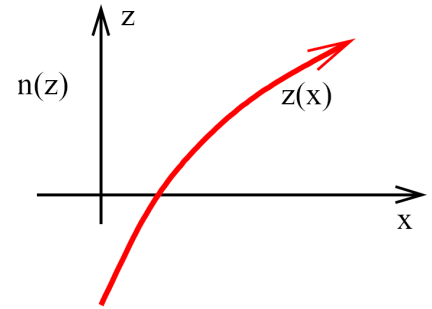
Pálya:  $z(x)$





Speciális (egyszerű) törésmutató: pl.  $n(z)$

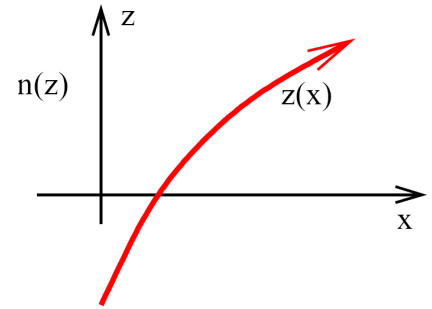
Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$



Speciális (egyszerű) törésmutató: pl.  $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx$$

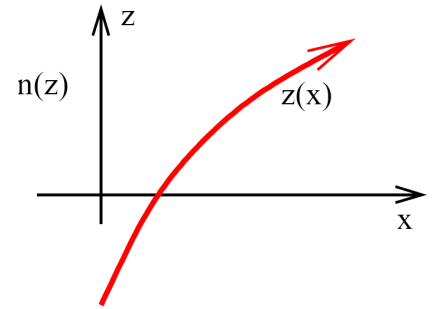


Speciális (egyszerű) törésmutató: pl.  $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx$$

$L(z, z')$

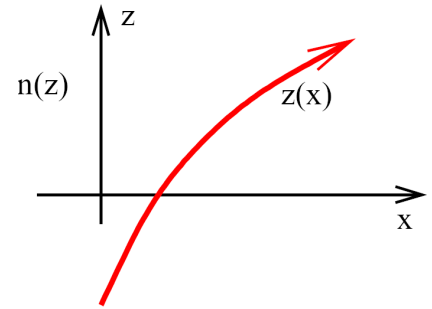


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2}$$

$L(z, z')$

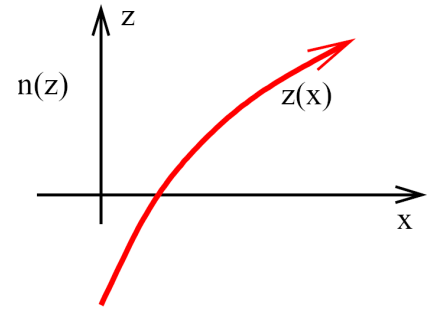


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{array}$$

$L(z, z')$

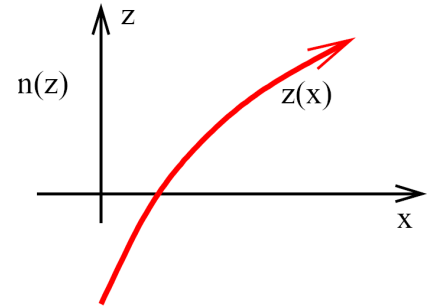


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{array}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:

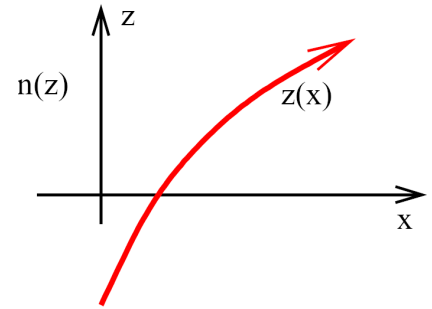
## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{array}$$

$L(z, z')$

Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x)) z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x)) \sqrt{1 + z'(x)^2}$

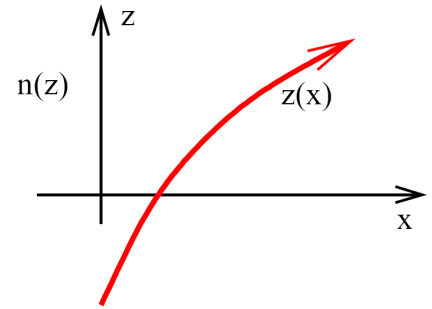


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{array}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x)) z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x)) \sqrt{1 + z'(x)^2}$

Trükk a mechanikából:

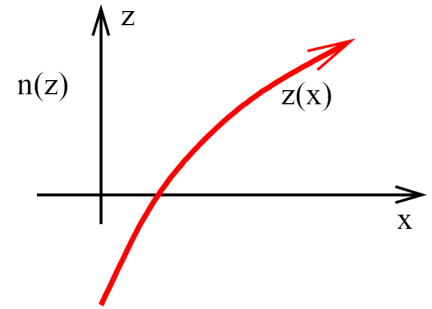


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{array}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x)) z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x)) \sqrt{1 + z'(x)^2}$

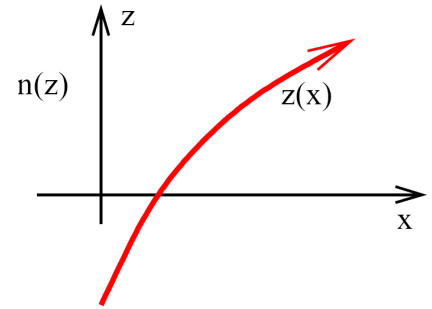
Trükk a mechanikából:  **$L$  nem függ expliciten  $x$ -től**

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{array}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x)) z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x)) \sqrt{1 + z'(x)^2}$

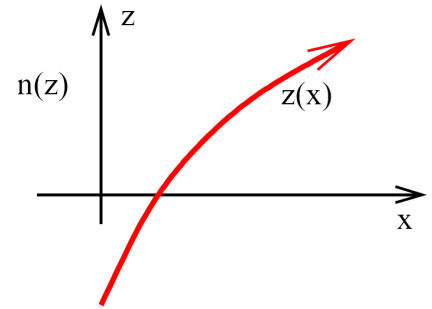
Trükk a mechanikából:  **$L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:**

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{array}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

Trükk a mechanikából:  **$L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:**

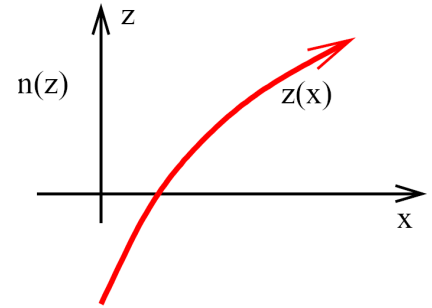
$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L$$

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

Trükk a mechanikából:  **$L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:**

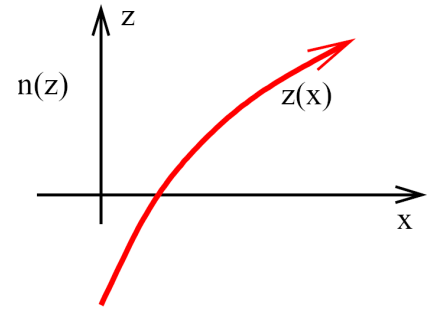
$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

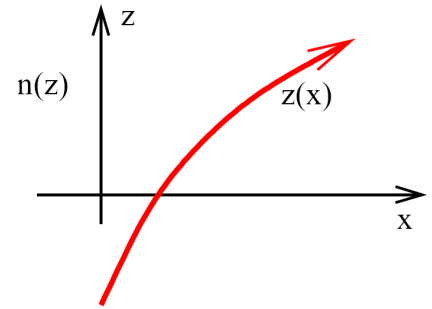
$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{nz'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n\sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{nz'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n\sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

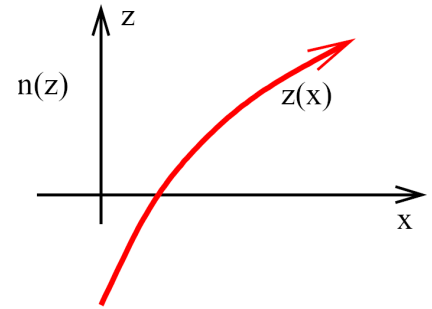
Közvetlenül is kijön:

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$

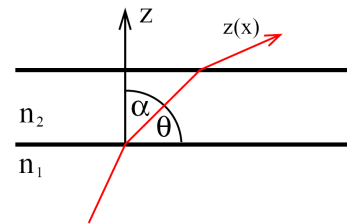


Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{nz'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n\sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

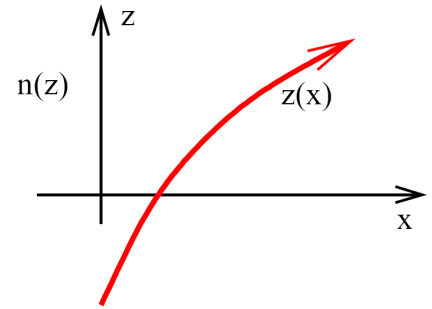


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



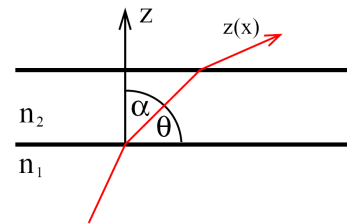
Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{nz'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n\sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$



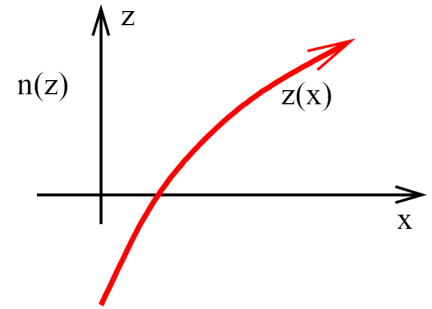


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

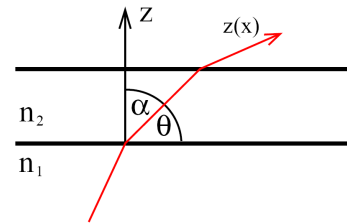
Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{n z'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n \sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x)$$

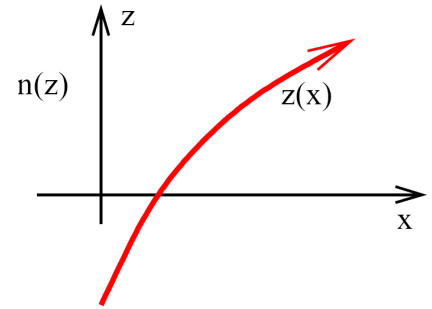


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

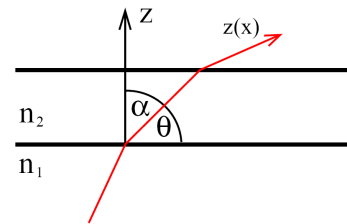
Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{n z'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n \sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x) \quad \cos \vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$

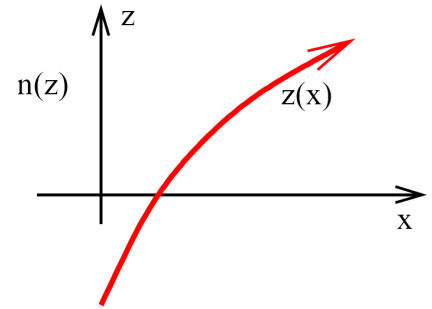


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

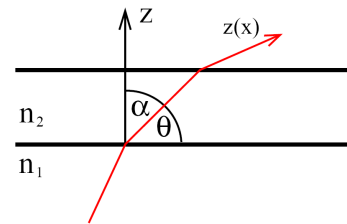
Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{nz'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n\sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x) \quad \cos \vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$



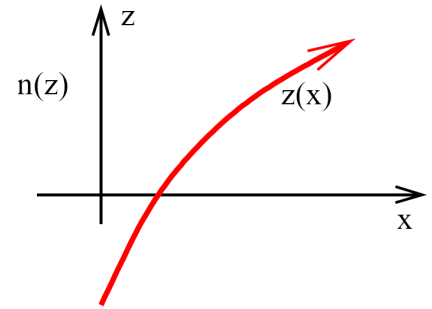
Lapos sugármenet:

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

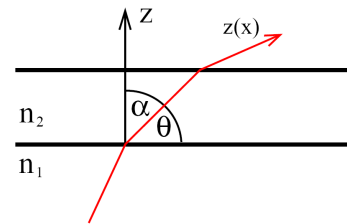
$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{nz'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n\sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x) \quad \cos \vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$

Lapos sugármenet:  $\vartheta \ll 1 \quad \sin \vartheta \approx \text{tg} \vartheta \approx \vartheta$

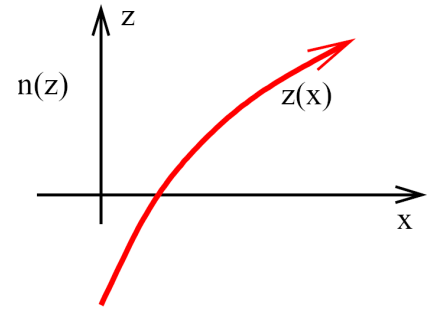


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

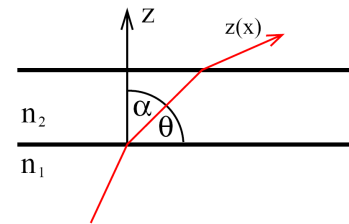
Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{n z'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n \sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x) \quad \cos \vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$



Lapos sugármenet:  $\vartheta \ll 1$   $\sin \vartheta \approx \text{tg} \vartheta \approx \vartheta$

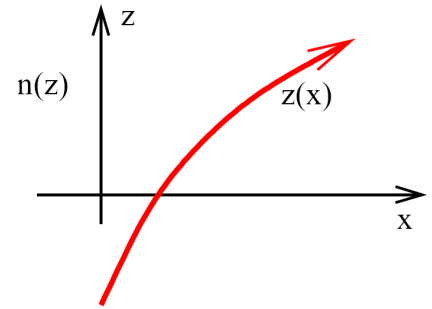
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz} (n(z) \cos \vartheta(z)) = n'(z) \cos \vartheta(z) + n \frac{d \cos \vartheta(z)}{dz} = n'(z) \cos \vartheta(z) - n \sin \vartheta(z) \frac{d\vartheta(z)}{dz} = \\ &= n'(z) \cos \vartheta - n \sin \vartheta \frac{dx}{dz} \frac{d\vartheta}{dx} = \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d\vartheta}{dx} \right) \approx \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d(\text{tg} \vartheta)}{dx} \right) = \\ &= n'(z) - n(z) \frac{d}{dx} \frac{dz}{dx} \end{aligned}$$

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x))z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x))\sqrt{1 + z'(x)^2}$

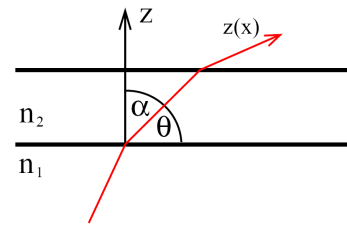
Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{n z'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n \sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x) \quad \cos \vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$



Lapos sugármenet:  $\vartheta \ll 1$   $\sin \vartheta \approx \text{tg} \vartheta \approx \vartheta$

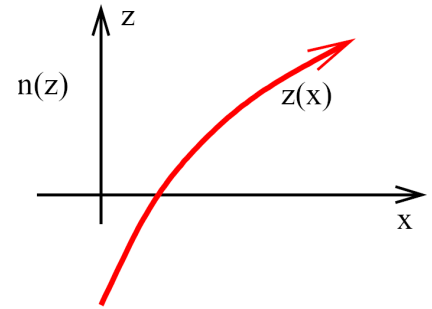
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz} (n(z) \cos \vartheta(z)) = n'(z) \cos \vartheta(z) + n \frac{d \cos \vartheta(z)}{dz} = n'(z) \cos \vartheta(z) - n \sin \vartheta(z) \frac{d\vartheta(z)}{dz} = \\ &= n'(z) \cos \vartheta - n \sin \vartheta \frac{dx}{dz} \frac{d\vartheta}{dx} = \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d\vartheta}{dx} \right) \approx \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d(\text{tg} \vartheta)}{dx} \right) = \\ &= n'(z) - n(z) \frac{d}{dx} \frac{dz}{dx} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \frac{n'}{n(z)} = \frac{d}{dz} \ln n(z)$$

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x)) z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x)) \sqrt{1 + z'(x)^2}$

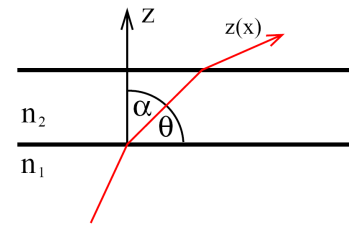
Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{n z'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n \sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x) \quad \cos \vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$



Lapos sugármenet:  $\vartheta \ll 1$   $\sin \vartheta \approx \text{tg} \vartheta \approx \vartheta$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz} (n(z) \cos \vartheta(z)) = n'(z) \cos \vartheta(z) + n \frac{d \cos \vartheta(z)}{dz} = n'(z) \cos \vartheta(z) - n \sin \vartheta(z) \frac{d\vartheta(z)}{dz} = \\ &= n'(z) \cos \vartheta - n \sin \vartheta \frac{dx}{dz} \frac{d\vartheta}{dx} = \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d\vartheta}{dx} \right) \approx \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d(\text{tg} \vartheta)}{dx} \right) = \\ &= n'(z) - n(z) \frac{d}{dx} \frac{dz}{dx} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \frac{n'}{n(z)} = \frac{d}{dz} \ln n(z)$$

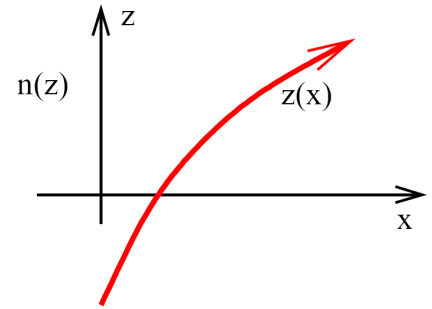
ismert függvény

## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x)) z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x)) \sqrt{1 + z'(x)^2}$

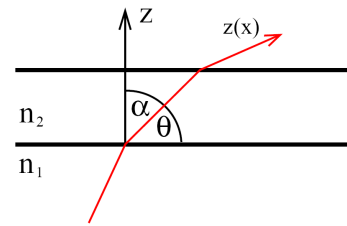
Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{n z'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n \sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x) \quad \cos \vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$



Lapos sugármenet:  $\vartheta \ll 1$   $\sin \vartheta \approx \text{tg} \vartheta \approx \vartheta$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz} (n(z) \cos \vartheta(z)) = n'(z) \cos \vartheta(z) + n \frac{d \cos \vartheta(z)}{dz} = n'(z) \cos \vartheta(z) - n \sin \vartheta(z) \frac{d\vartheta(z)}{dz} = \\ &= n'(z) \cos \vartheta - n \sin \vartheta \frac{dx}{dz} \frac{d\vartheta}{dx} = \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d\vartheta}{dx} \right) \approx \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d(\text{tg} \vartheta)}{dx} \right) = \\ &= n'(z) - n(z) \frac{d}{dx} \frac{dz}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \frac{n'}{n(z)} = \frac{d}{dz} \ln n(z)$$

ismert függvény

Olyan, mint a Newton-egyenlet

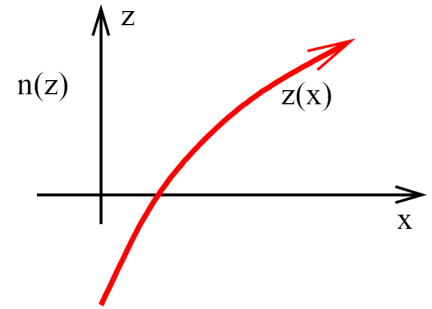


## Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya:  $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left( n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \begin{cases} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{n(z(x)) z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x)) \sqrt{1 + z'(x)^2}$

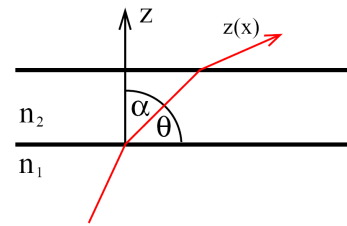
Trükk a mechanikából:  $L$  nem függ expliciten  $x$ -től, ezért  $H$  mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{n z'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n \sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x) \quad \cos \vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$



Lapos sugármenet:  $\vartheta \ll 1$   $\sin \vartheta \approx \text{tg} \vartheta \approx \vartheta$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz} (n(z) \cos \vartheta(z)) = n'(z) \cos \vartheta(z) + n \frac{d \cos \vartheta(z)}{dz} = n'(z) \cos \vartheta(z) - n \sin \vartheta(z) \frac{d\vartheta(z)}{dz} = \\ &= n'(z) \cos \vartheta - n \sin \vartheta \frac{dx}{dz} \frac{d\vartheta}{dx} = \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d\vartheta}{dx} \right) \approx \cos \vartheta \left( n'(z) - n(z) \frac{d(\text{tg} \vartheta)}{dx} \right) = \\ &= n'(z) - n(z) \frac{d}{dx} \frac{dz}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \frac{n'}{n(z)} = \frac{d}{dz} \ln n(z)$$

ismert függvény

Olyan, mint a Newton-egyenlet

Hasonló egyenlet hengerszimmetrikus esetben is levezethető.

**SELFOC lemez**

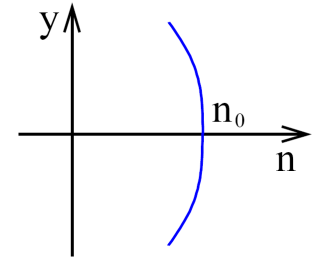
**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRradient in the **IN**dex):

**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):


$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

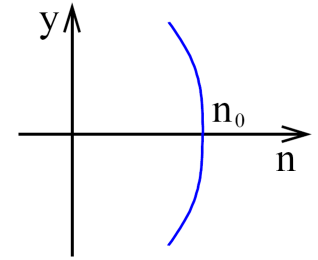
**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$



**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

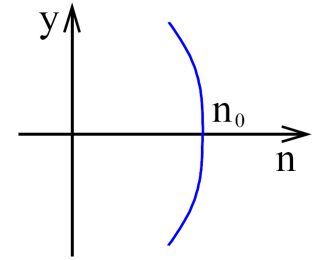
$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y$$
$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$




**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

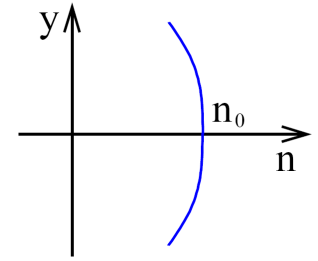
$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \quad \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1}$$



**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

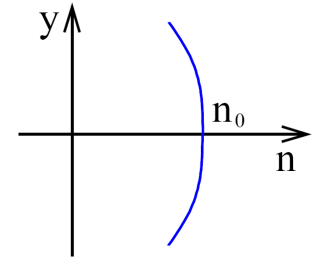




**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$



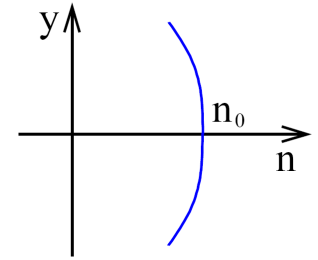
pályaegyenlet:

**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaeqyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y$

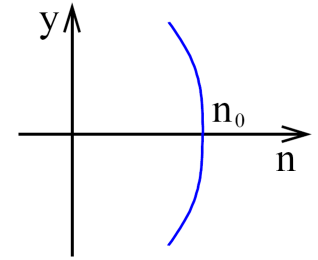


**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow \boxed{y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)}$

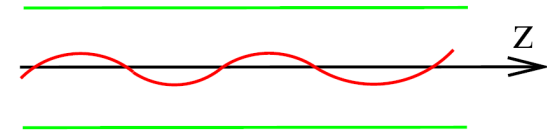
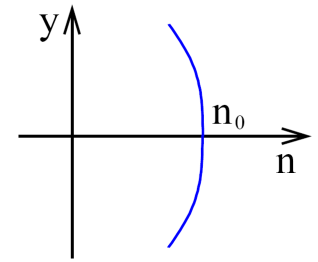


**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow \boxed{y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)}$



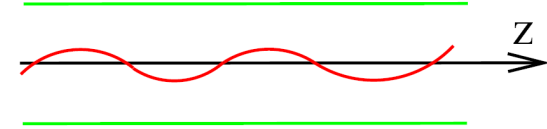
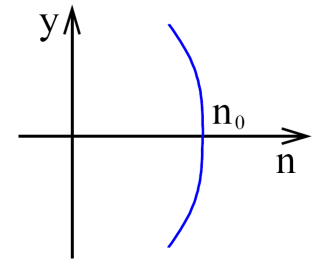
hullámvezető

**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow \boxed{y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)}$



hullámvezető

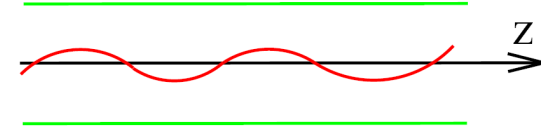
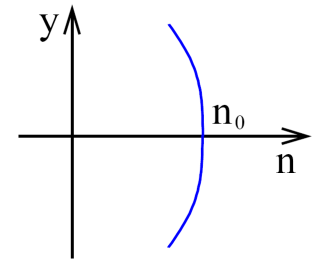
Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:

**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

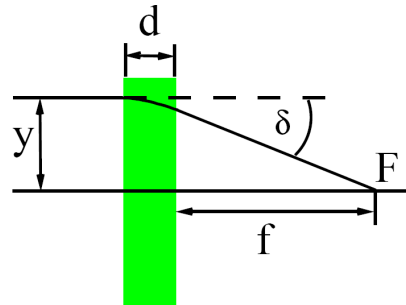
$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow \boxed{y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)}$



hullámvezető

**Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:**

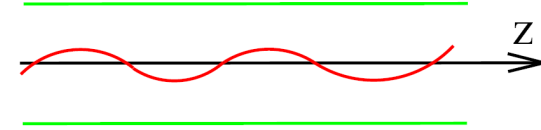
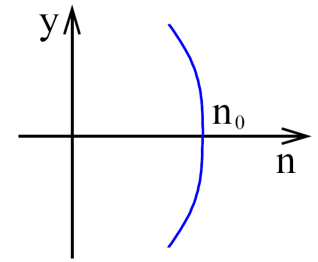


**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaeqyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)$

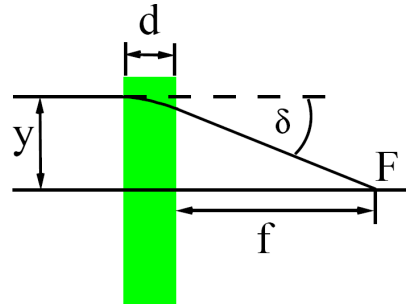


hullámvezető

**Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:**

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$

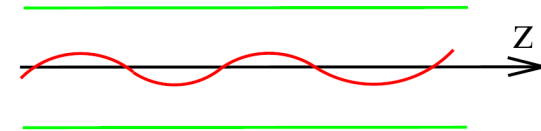
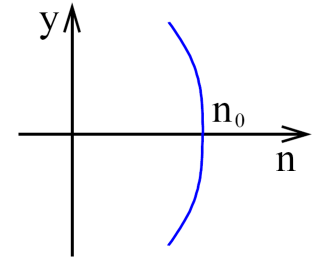


**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow \boxed{y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)}$

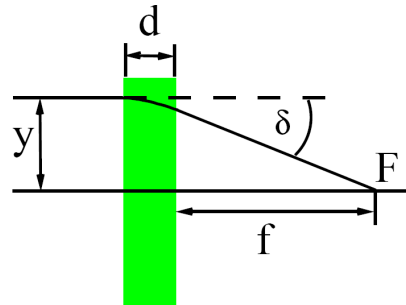


hullámvezető

**Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:**

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$



**SELFOC-szál vagy rúd (hengerszimmetrikus):**

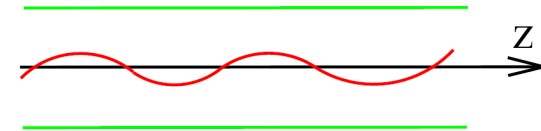
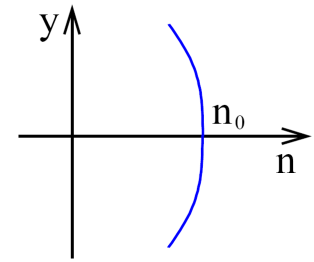


**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)$

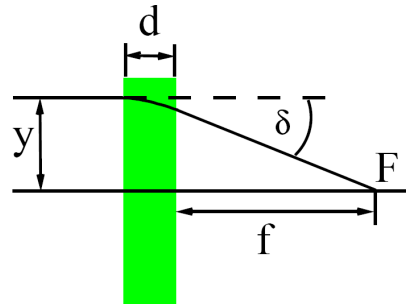


hullámvezető

Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$



**SELFOC-szál vagy rúd** (hengerszimmetrikus):

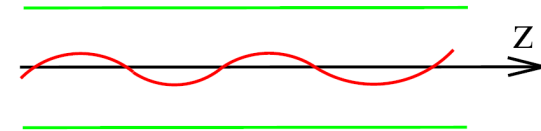
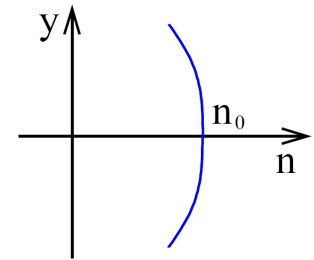
Két független, merőleges komponens:

**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)$

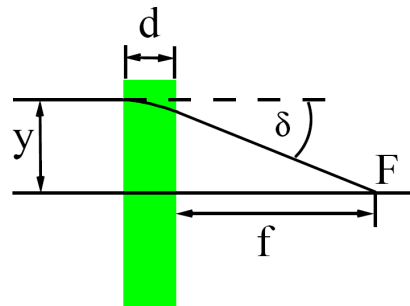


hullámvezető

**Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:**

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$



**SELFOC-szál vagy rúd (hengerszimmetrikus):**

Két független, merőleges komponens:

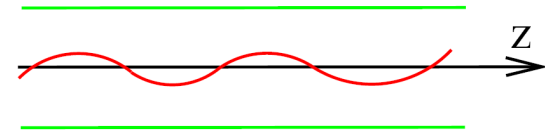
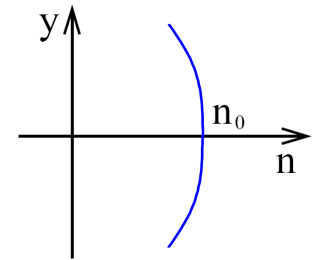
$$n(r) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} r^2 \right) \quad r^2 = x^2 + y^2$$

**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaeqyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)$

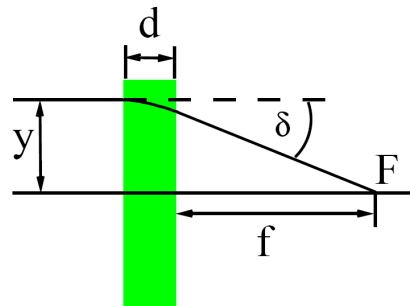


hullámvezető

**Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:**

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

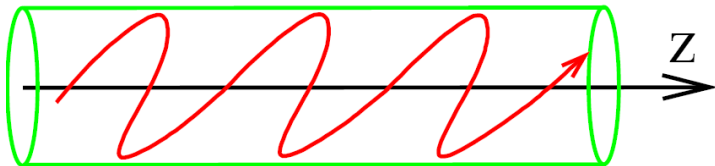
$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$



**SELFOC-szál vagy rúd (hengerszimmetrikus):**

$$n(r) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} r^2 \right) \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Két független, merőleges komponens:



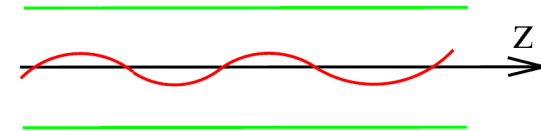
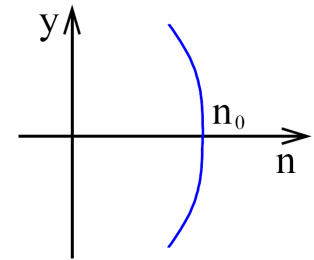
meridionális sugármenet

**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)$

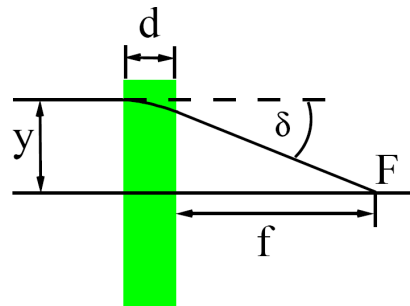


hullámvezető

**Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:**

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

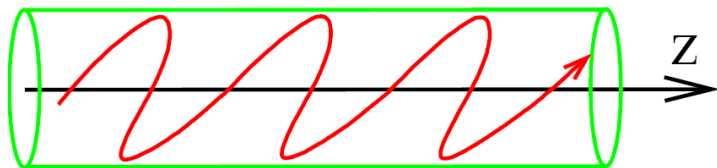
$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$



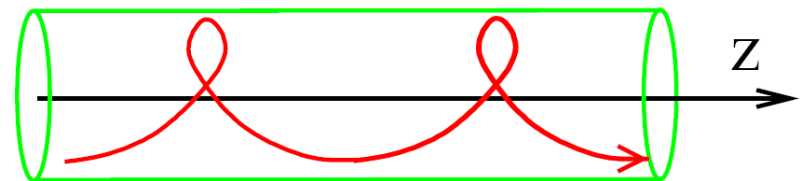
**SELFOC-szál vagy rúd (hengerszimmetrikus):**

$$n(r) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} r^2 \right) \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Két független, merőleges komponens:



meridionális sugármenet



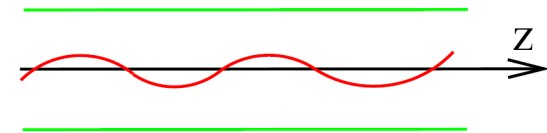
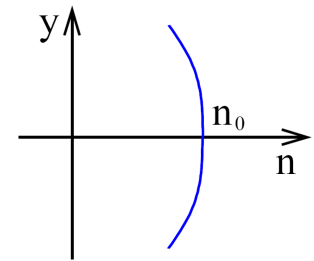
helikális sugármenet

**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)$

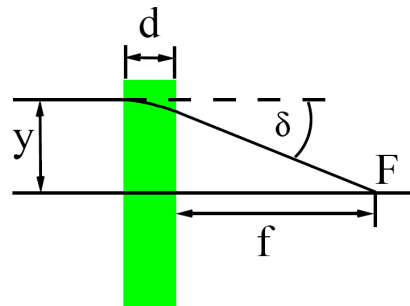


hullámvezető

**Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:**

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

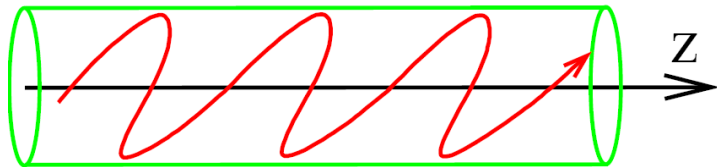
$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$



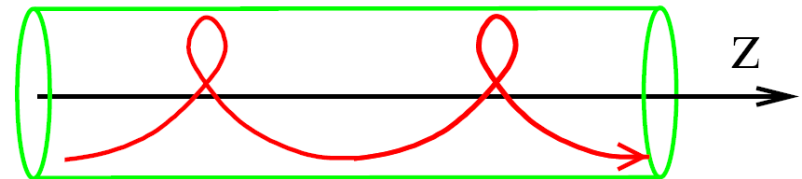
**SELFOC-szál vagy rúd (hengerszimmetrikus):**

$$n(r) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} r^2 \right) \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Két független, merőleges komponens:



meridionális sugármenet



helikális sugármenet

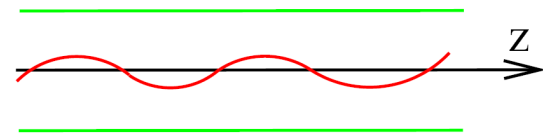
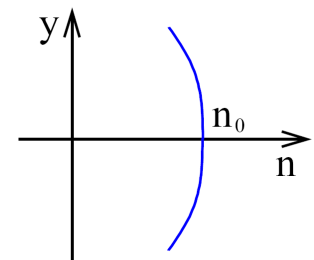
**SELFOC lencse: a rúd szelete**

**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)$

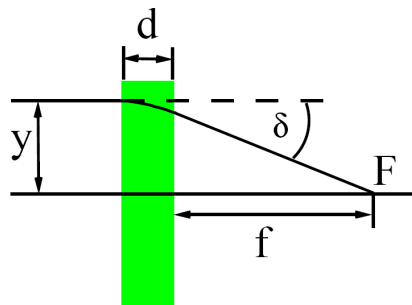


hullámvezető

**Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:**

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

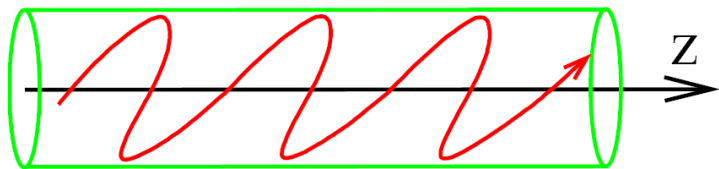
$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$



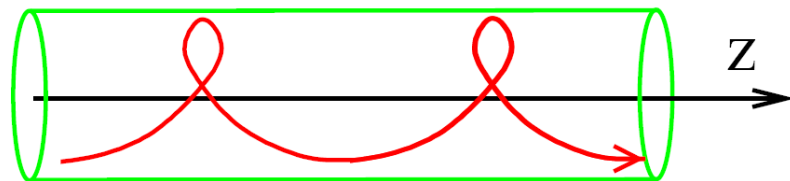
**SELFOC-szál vagy rúd (hengerszimmetrikus):**

$$n(r) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} r^2 \right) \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Két független, merőleges komponens:

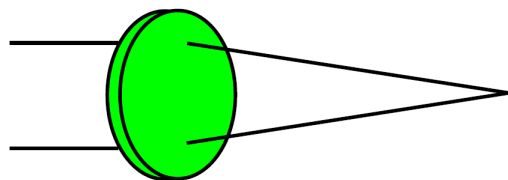


meridionális sugármenet



helikális sugármenet

**SELFOC lencse: a rúd szelete**

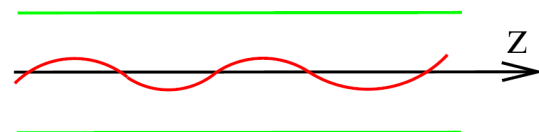
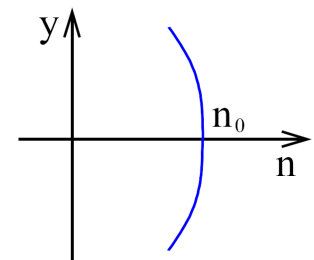


**SELFOC lemez** („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaeqyenlet:  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)$

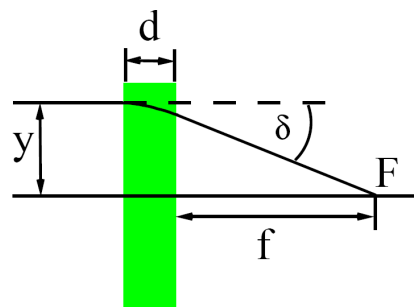


hullámvezető

**Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:**

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

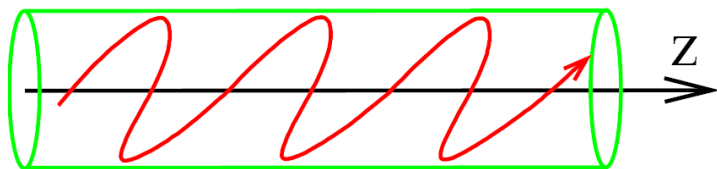
$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$



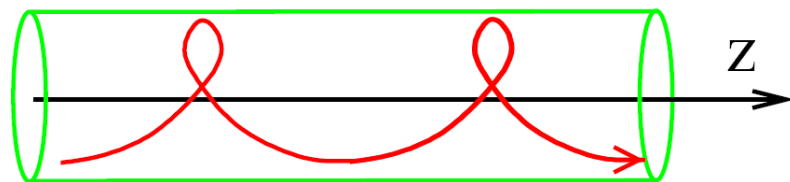
**SELFOC-szál vagy rúd (hengersizmetrikus):**

$$n(r) = n_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} r^2 \right) \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Két független, merőleges komponens:

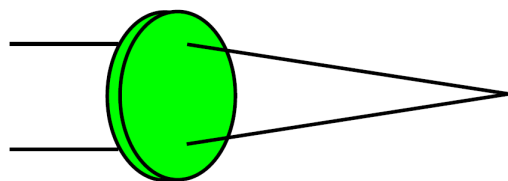


meridionális sugármenet



helikális sugármenet

**SELFOC lencse: a rúd szelete**



vékony, mégis nagy dioptriájú szemüveg

# Alkalmazások



# Alkalmazások

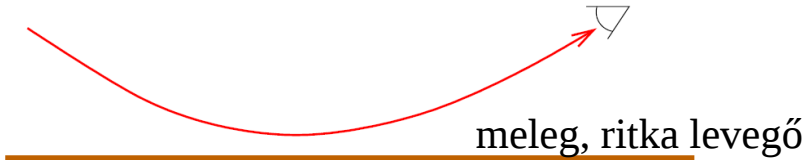
a) Légekoptika: délibáb

# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\varrho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\varrho(z) \rightarrow n(z)$

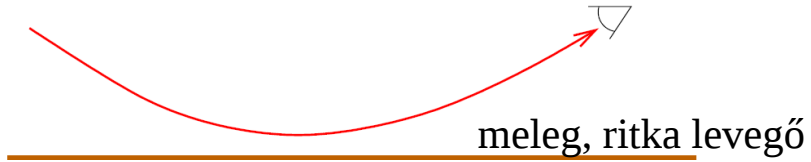
# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\varrho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\varrho(z) \rightarrow n(z)$



# Alkalmazások

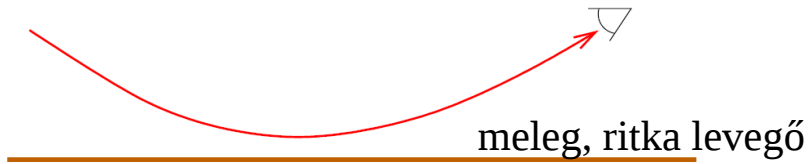
a) Légekoptika: délibáb  $n(\varrho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\varrho(z) \rightarrow n(z)$



Az eget látjuk!

# Alkalmazások

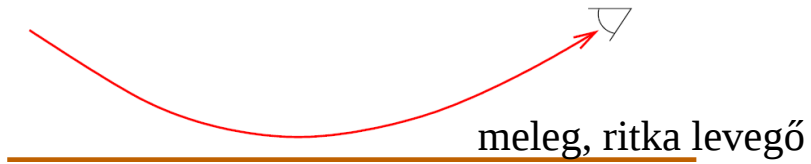
a) Légekoptika: délibáb  $n(\rho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\rho(z) \rightarrow n(z)$



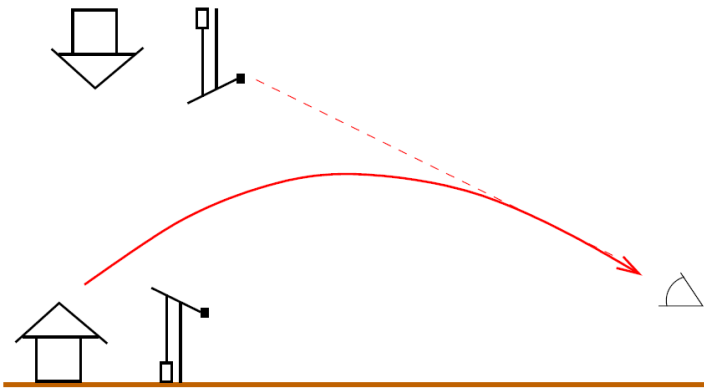
Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.

# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\rho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\rho(z) \rightarrow n(z)$

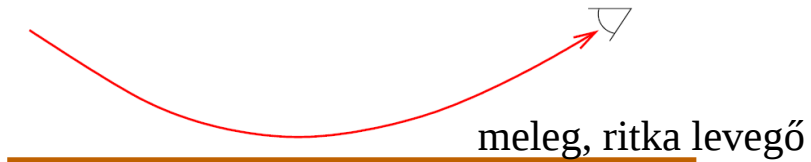


Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.

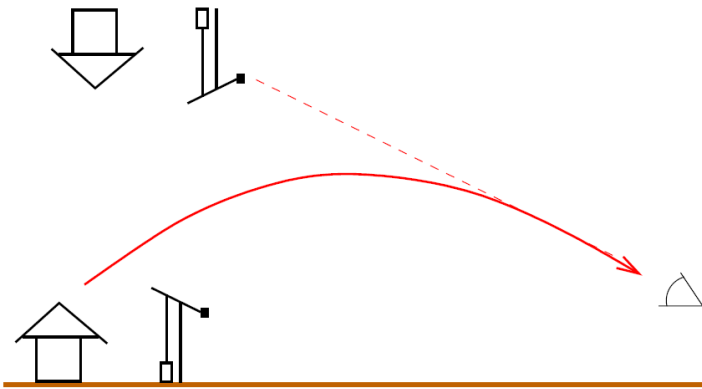


# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\rho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\rho(z) \rightarrow n(z)$



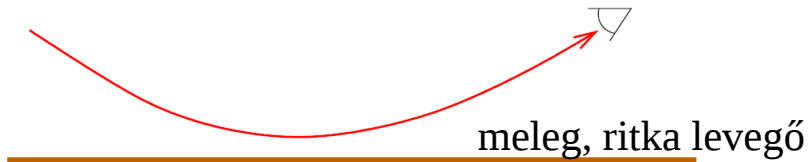
Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



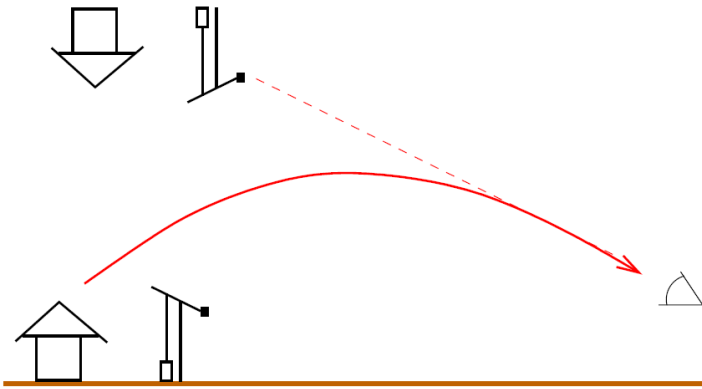
Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.

# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\rho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\rho(z) \rightarrow n(z)$



Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



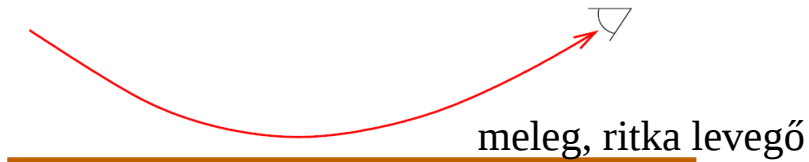
Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.

b) Hangterjedés az óceánban

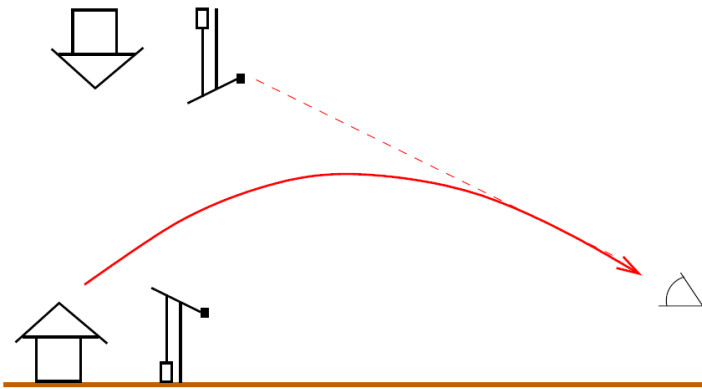


# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\varrho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\varrho(z) \rightarrow n(z)$



Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



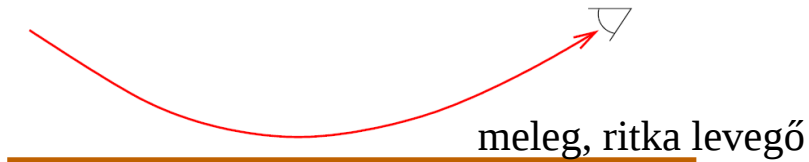
Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.

b) Hangterjedés az óceánban

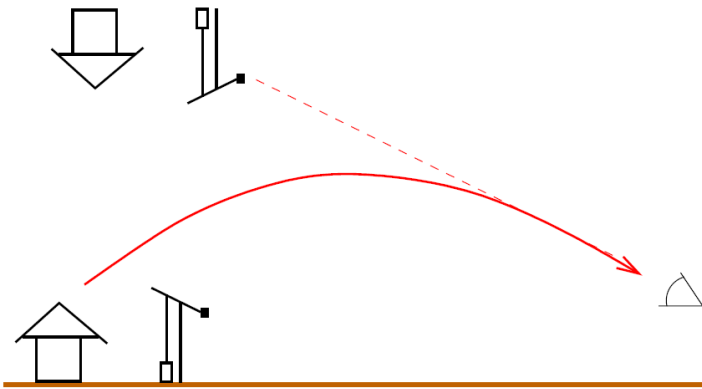
$n(\varrho, T)$   $T(z)$ ,  $\varrho(z)$   $z$  : mélység

# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\varrho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\varrho(z) \rightarrow n(z)$



Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



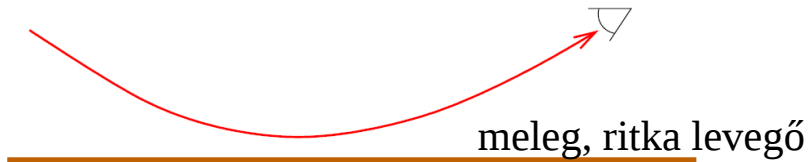
Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.

b) Hangterjedés az óceánban

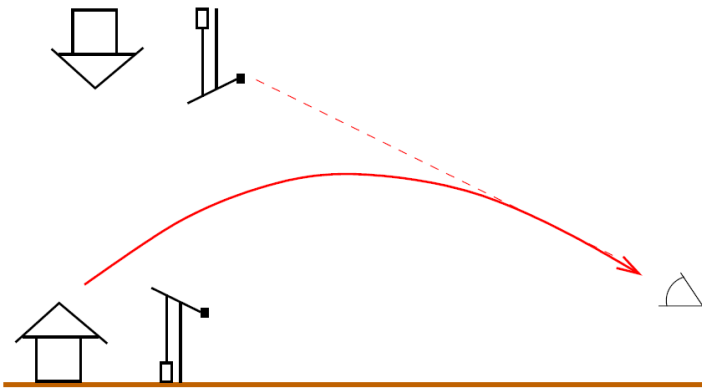
$n(\varrho, T)$   $T(z)$ ,  $\varrho(z)$   $z$  : mélység  
sókonzentráció

# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\varrho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\varrho(z) \rightarrow n(z)$

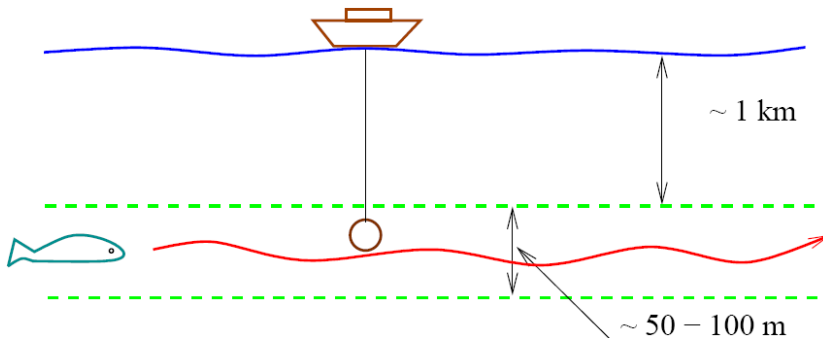


Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.

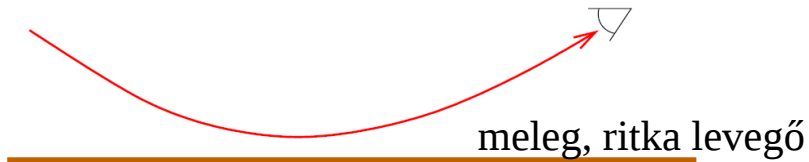
b) Hangterjedés az óceánban



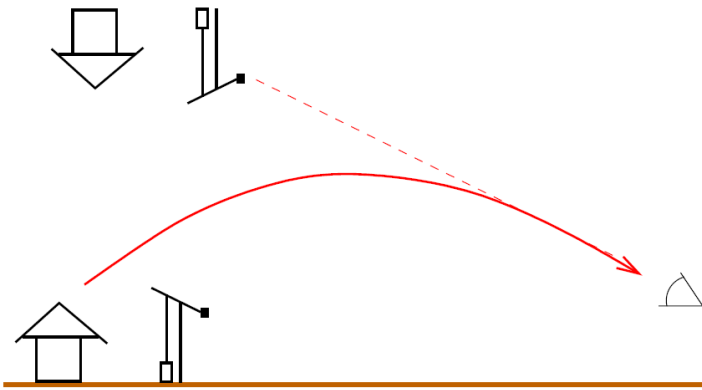
$n(\varrho, T)$   $T(z)$ ,  $\varrho(z)$   $z$  : mélység  
sókonzentráció

# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\varrho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\varrho(z) \rightarrow n(z)$

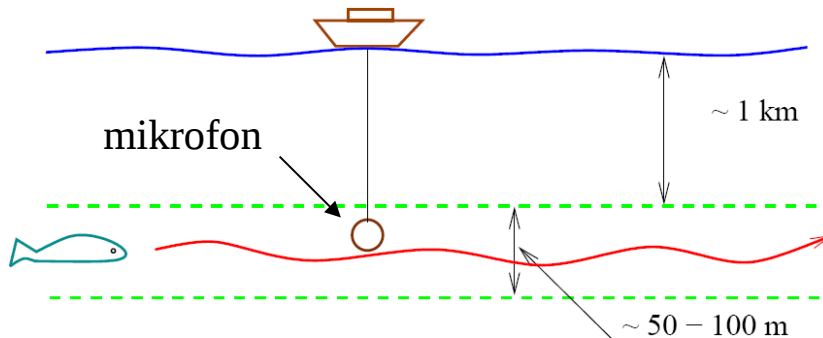


Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.

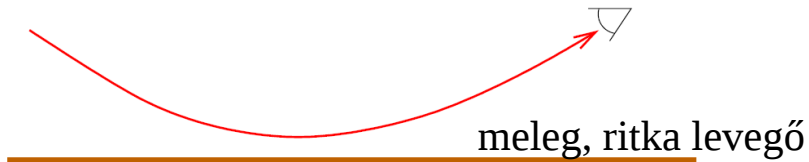
b) Hangterjedés az óceánban



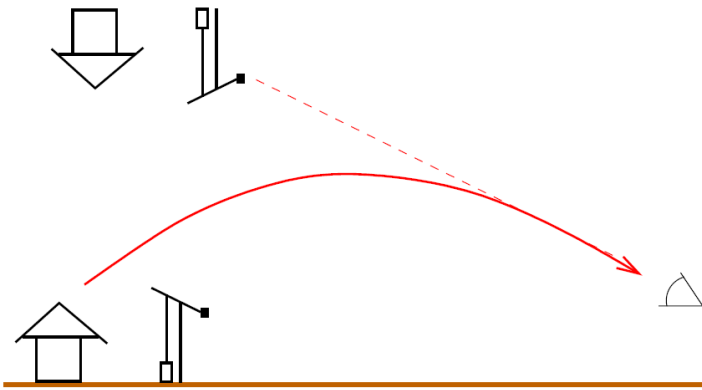
$n(\varrho, T)$   $T(z)$ ,  $\varrho(z)$   $z$  : mélység  
sókonzentráció

# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\varrho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\varrho(z) \rightarrow n(z)$

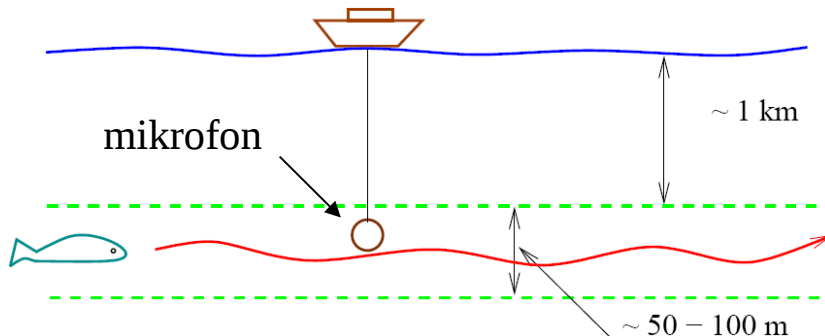


Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.

b) Hangterjedés az óceánban

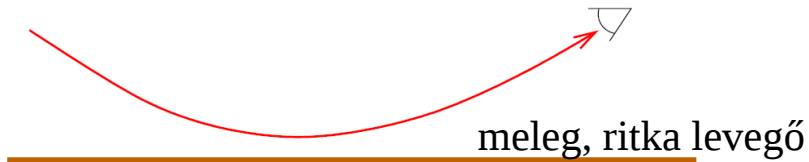


$n(\varrho, T)$   $T(z)$ ,  $\varrho(z)$   $z$  : mélység  
sókonzentráció

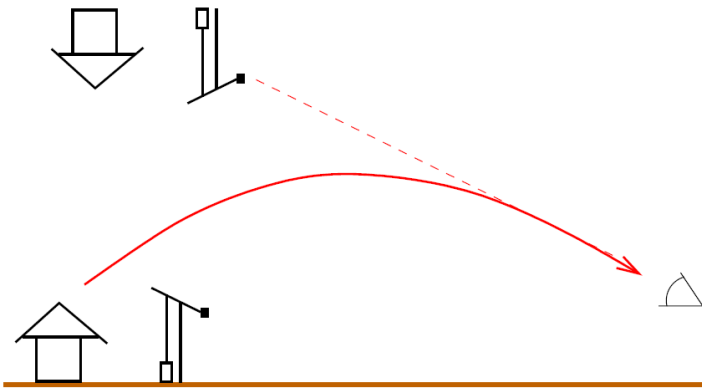
hullámvezető réteg:

# Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb  $n(\rho, T)$ ,  $T(z)$ ,  $\rho(z) \rightarrow n(z)$

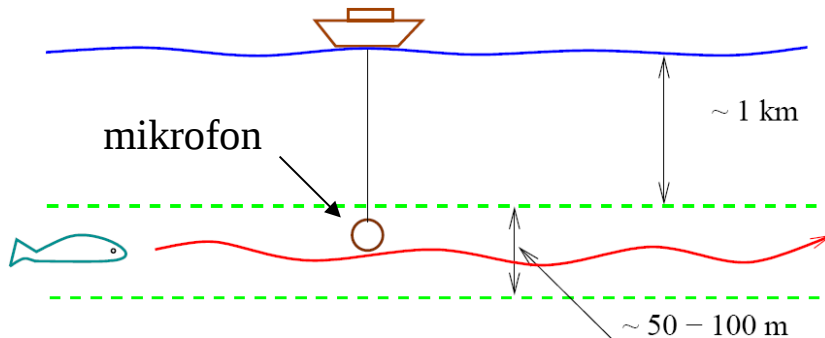


Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.

b) Hangterjedés az óceánban



$n(\rho, T)$   $T(z)$ ,  $\rho(z)$   $z$  : mélység  
sókonzentráció

**hullámvezető réteg:**  
a bálnák füttyögése 1000 km-re is eljut

# Akusztooptika

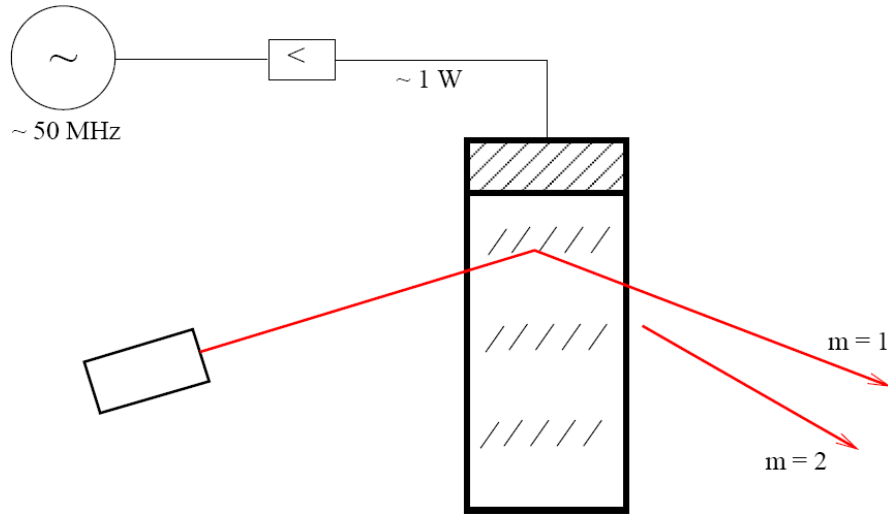
# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú álló sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



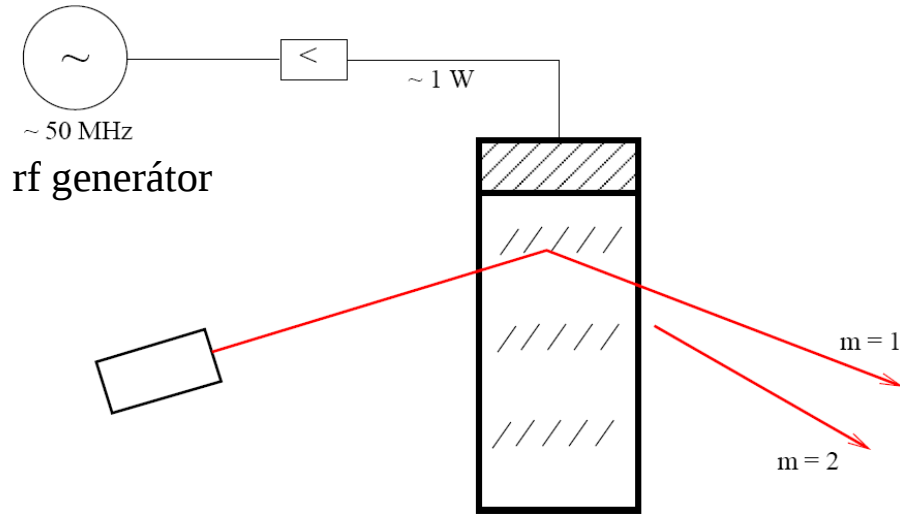
# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



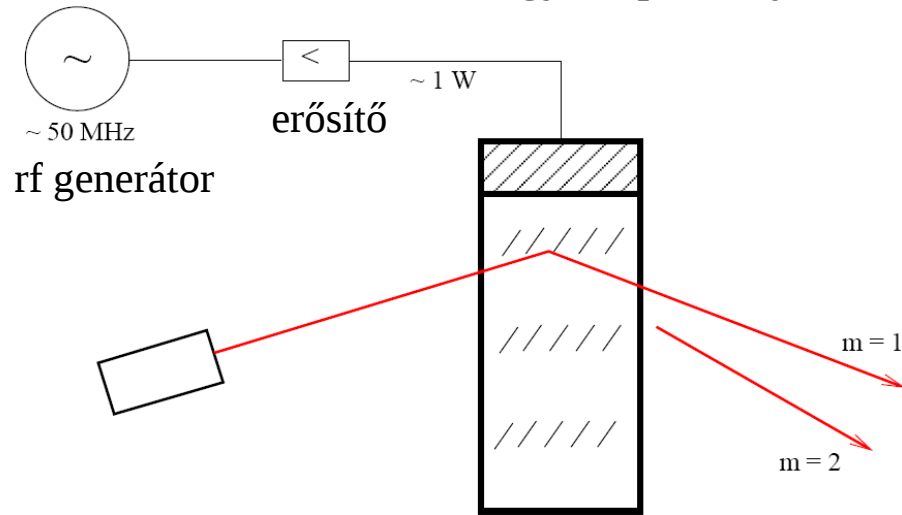
# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



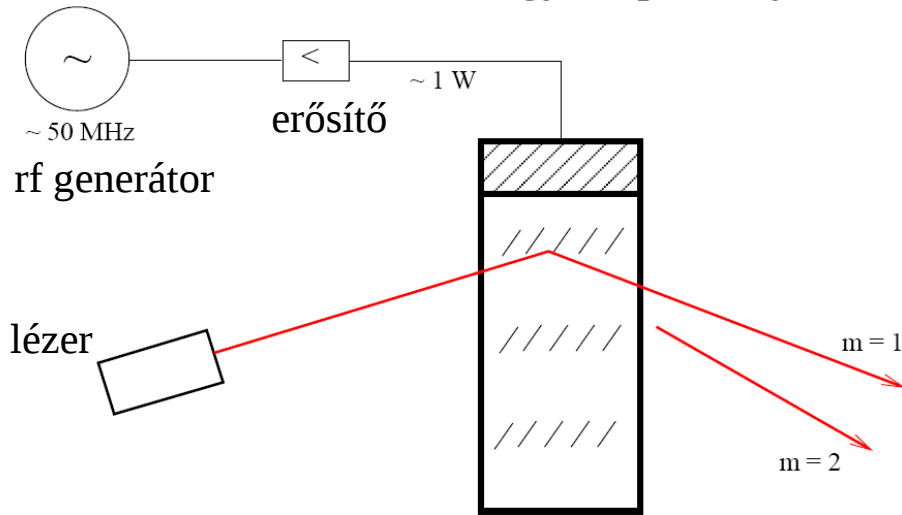
# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



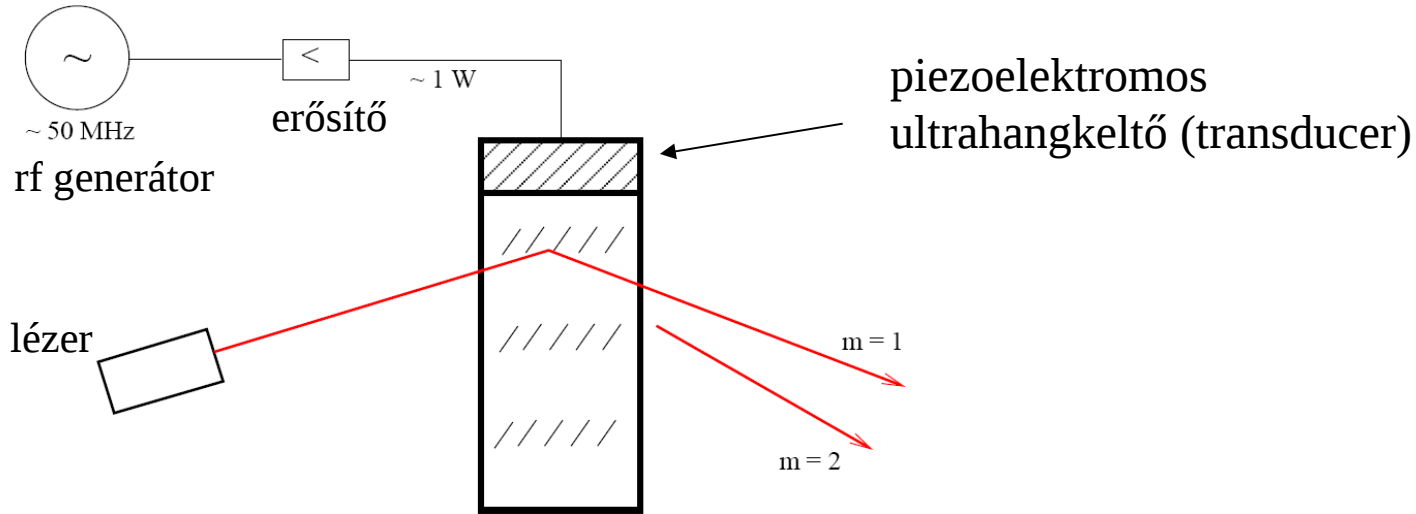
# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



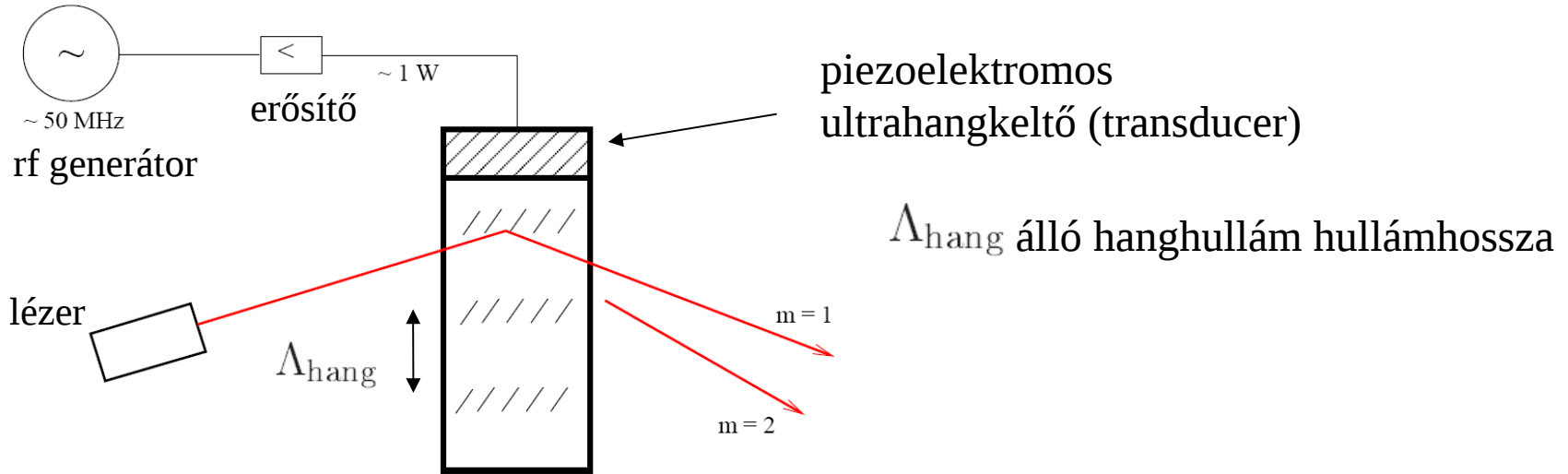
# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



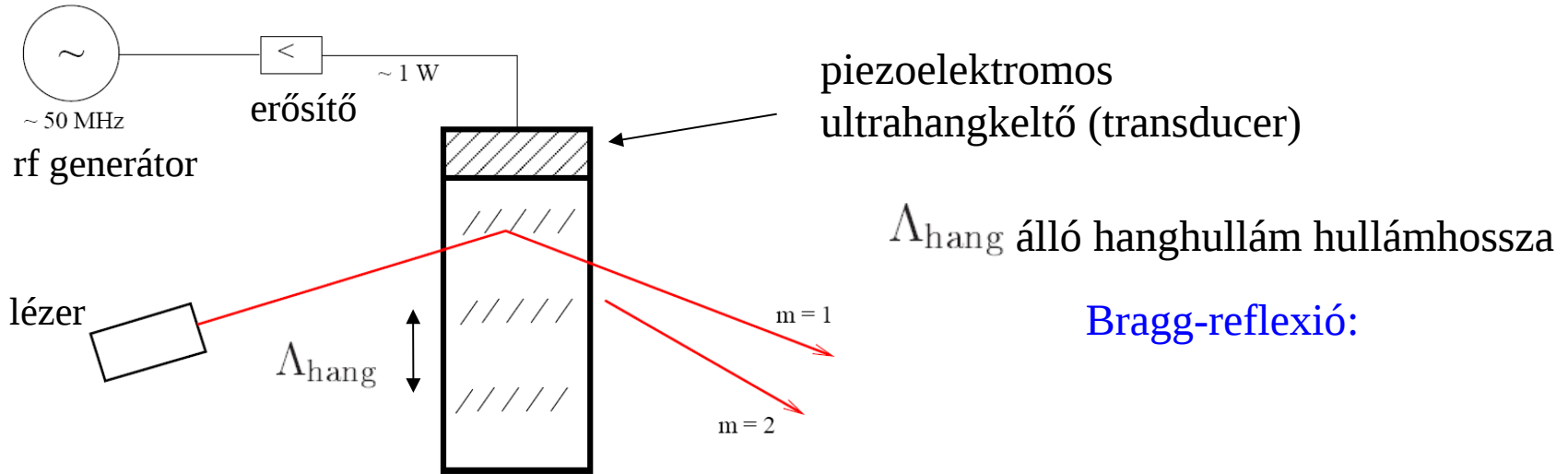
# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



# Akusztooptika

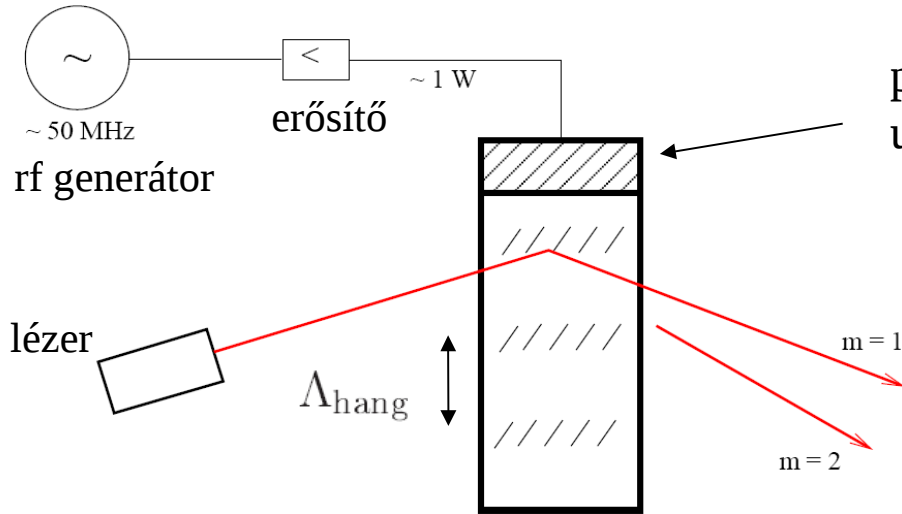
A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



**Bragg-reflexió:**

# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



$\Lambda_{\text{hang}}$  álló hanghullám hullámhossza

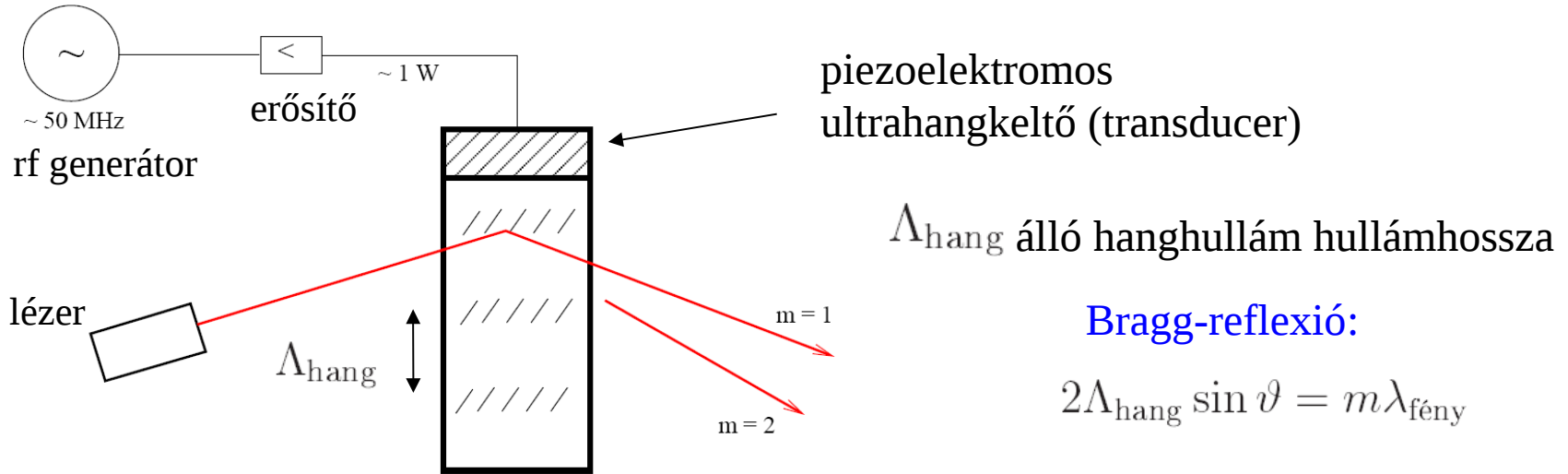
**Bragg-reflexió:**

$$2\Lambda_{\text{hang}} \sin \vartheta = m\lambda_{\text{fény}}$$



# Akusztooptika

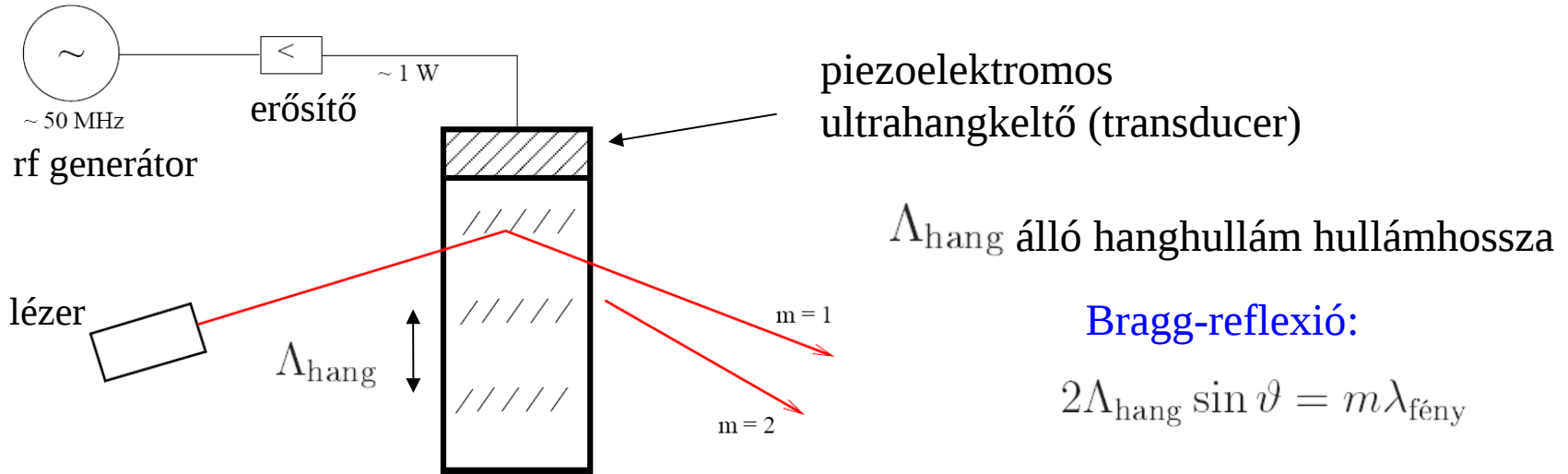
A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahang hullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

# Akusztóoptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.

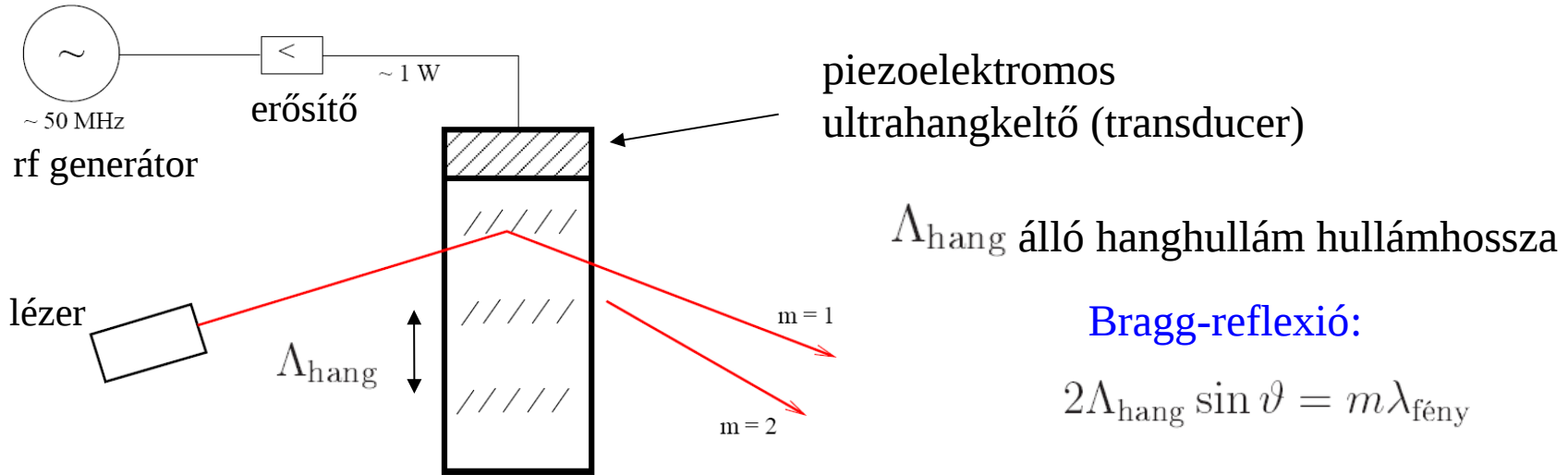


Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahang hullám.



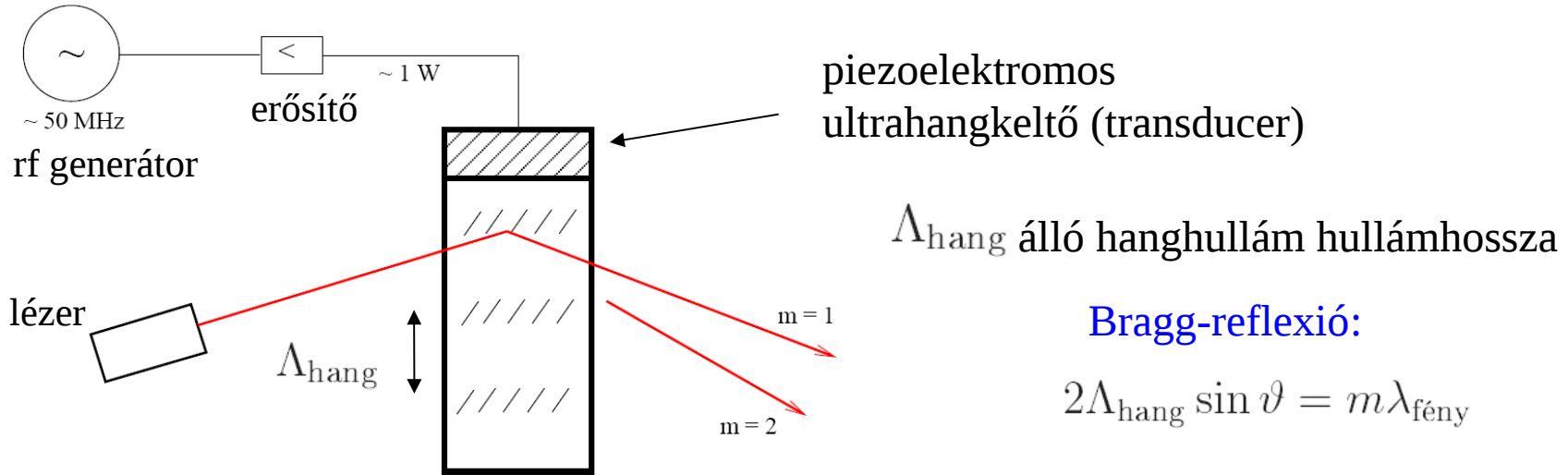
Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m}$$

# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

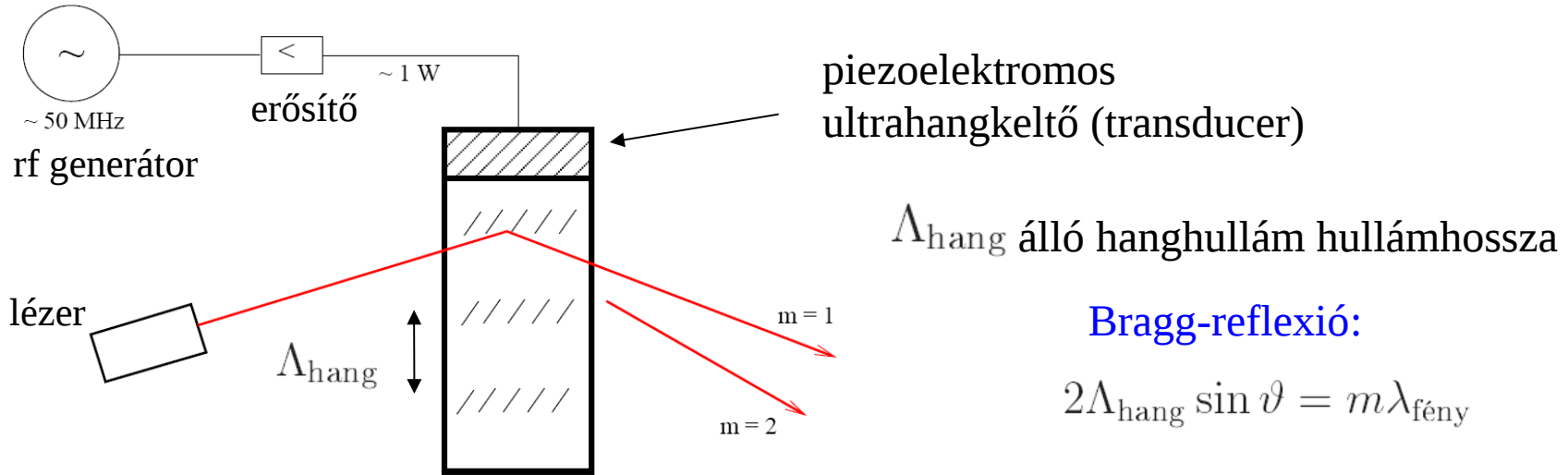
Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{fény}} \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahang hullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

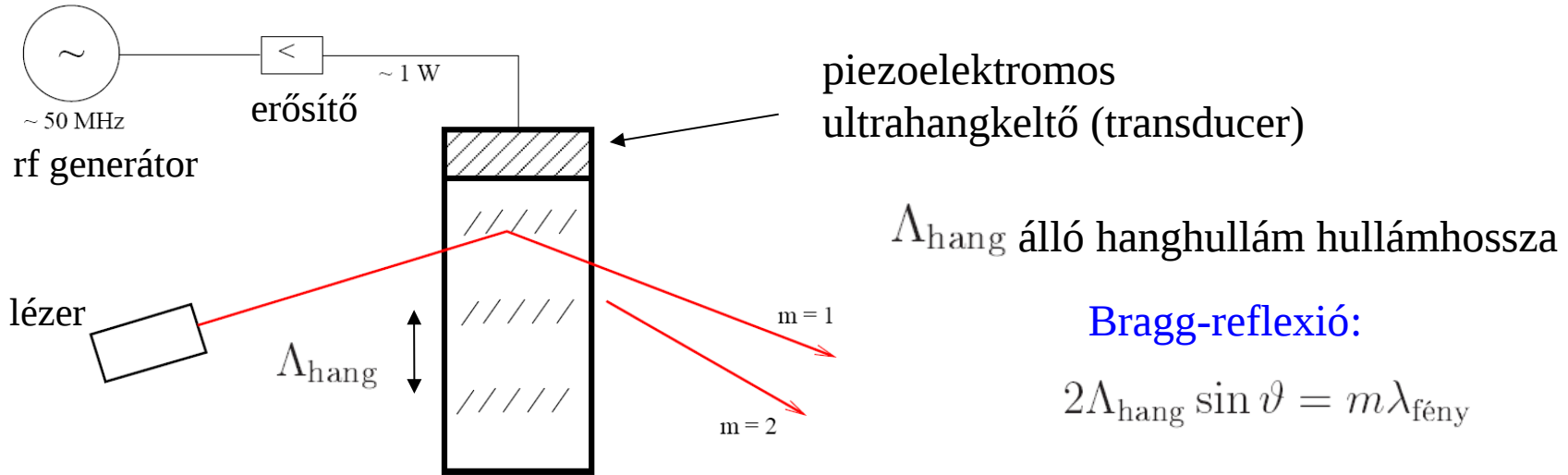
Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m.} \quad \longrightarrow \quad 2\vartheta \sim 2 \sin \vartheta \sim \frac{\lambda_{\text{fény}}}{\Lambda_{\text{hang}}} \sim 0,1 \text{ rad} \sim 5^\circ$$

$$\lambda_{\text{fény}} \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

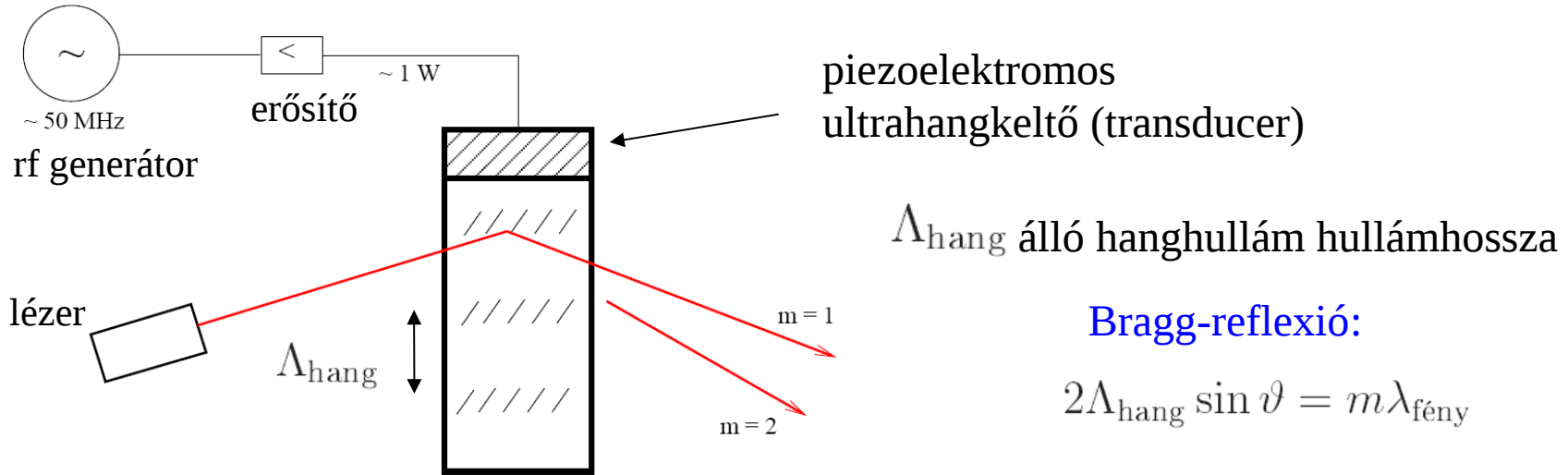
$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m.} \quad \longrightarrow \quad 2\vartheta \sim 2 \sin \vartheta \sim \frac{\lambda_{\text{fény}}}{\Lambda_{\text{hang}}} \sim 0,1 \text{ rad} \sim 5^\circ$$

$$\lambda_{\text{fény}} \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Ha a bejövő hangfrekvenciát változtatjuk, a szög lassan változik:

# Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

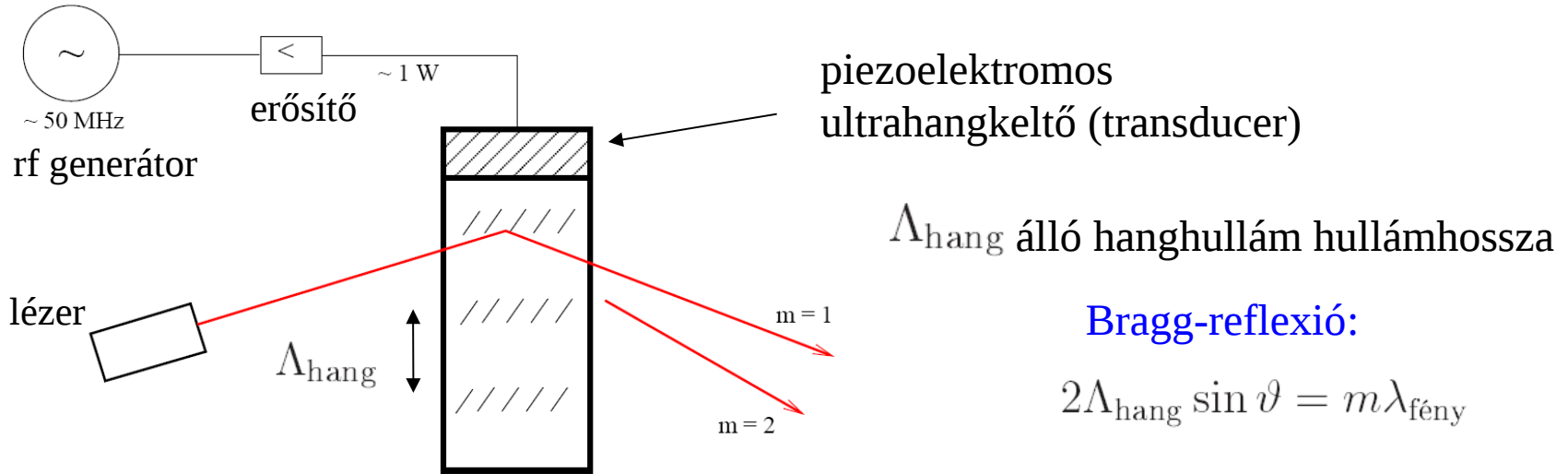
$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m.} \quad \longrightarrow \quad 2\vartheta \sim 2 \sin \vartheta \sim \frac{\lambda_{\text{fény}}}{\Lambda_{\text{hang}}} \sim 0,1 \text{ rad} \sim 5^\circ$$

$$\lambda_{\text{fény}} \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Ha a bejövő hangfrekvenciát változtatjuk, a szög lassan változik:  
**mechanikai mozgó alkatrész nélküli SCANNER**

# Akusztóoptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m.} \quad \longrightarrow \quad 2\vartheta \sim 2 \sin \vartheta \sim \frac{\lambda_{\text{fény}}}{\Lambda_{\text{hang}}} \sim 0,1 \text{ rad} \sim 5^\circ$$

$$\lambda_{\text{fény}} \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

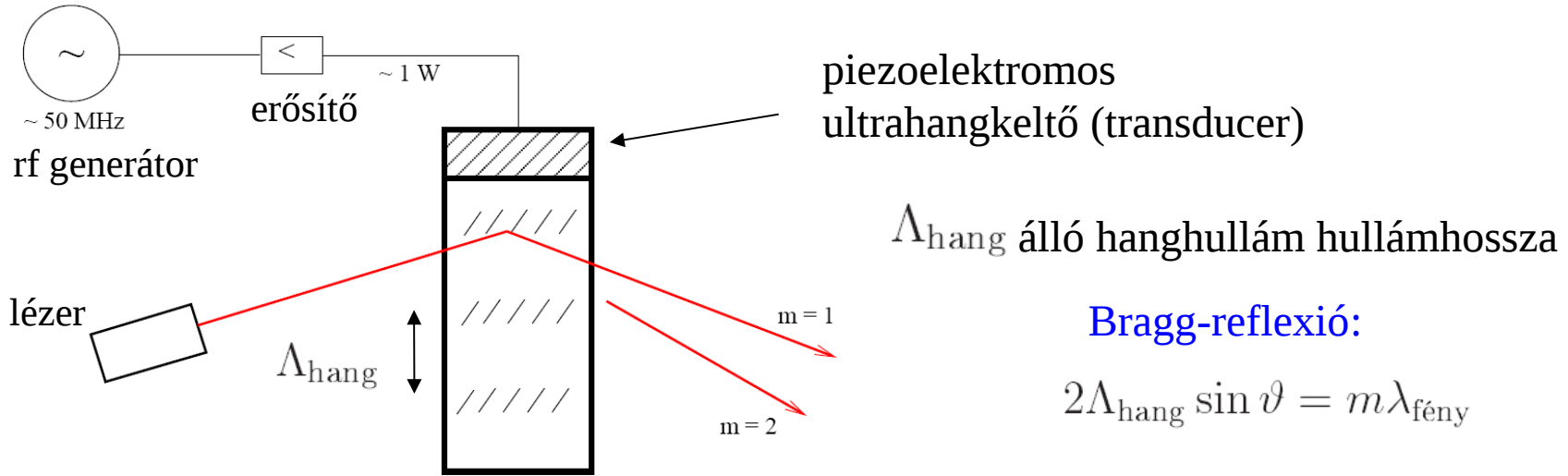
Ha a bejövő hangfrekvenciát változtatjuk, a szög lassan változik:  
**mechanikai mozgó alkatrész nélküli SCANNER**

A Bragg-feltétel adott szögre csak éles frekvencián teljesül: **akusztóoptikai szűrő**, TV-ben használják



# Akusztóoptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

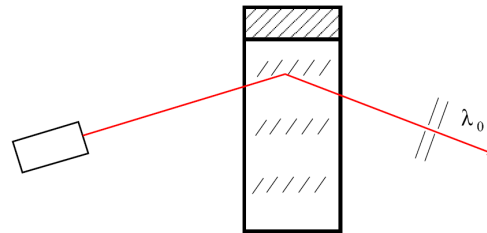
Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m.} \quad \longrightarrow \quad 2\vartheta \sim 2 \sin \vartheta \sim \frac{\lambda_{\text{fény}}}{\Lambda_{\text{hang}}} \sim 0,1 \text{ rad} \sim 5^\circ$$

$$\lambda_{\text{fény}} \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

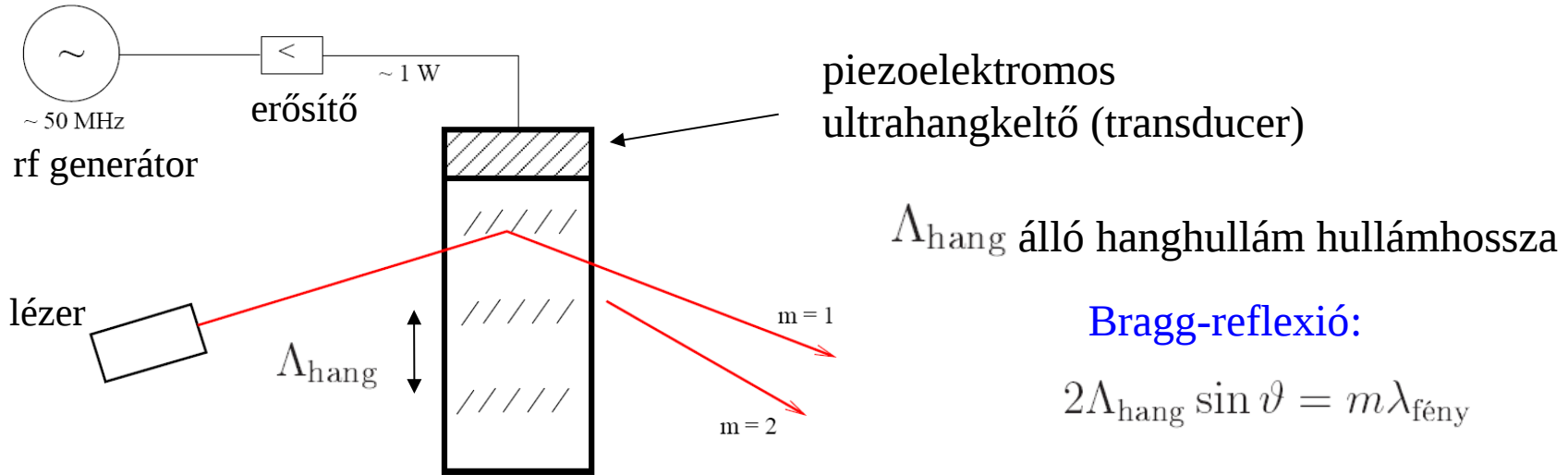
Ha a bejövő hangfrekvenciát változtatjuk, a szög lassan változik:  
**mechanikai mozgó alkatrész nélküli SCANNER**

A Bragg-feltétel adott szögre csak éles frekvencián teljesül: **akusztóoptikai szűrő**, TV-ben használják



# Akusztóoptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

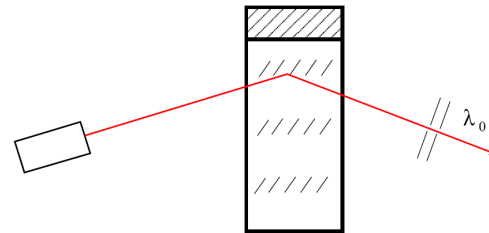
Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m.} \quad \longrightarrow \quad 2\vartheta \sim 2 \sin \vartheta \sim \frac{\lambda_{\text{fény}}}{\Lambda_{\text{hang}}} \sim 0,1 \text{ rad} \sim 5^\circ$$

$$\lambda_{\text{fény}} \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Ha a bejövő hangfrekvenciát változtatjuk, a szög lassan változik:  
**mechanikai mozgó alkatrész nélküli SCANNER**

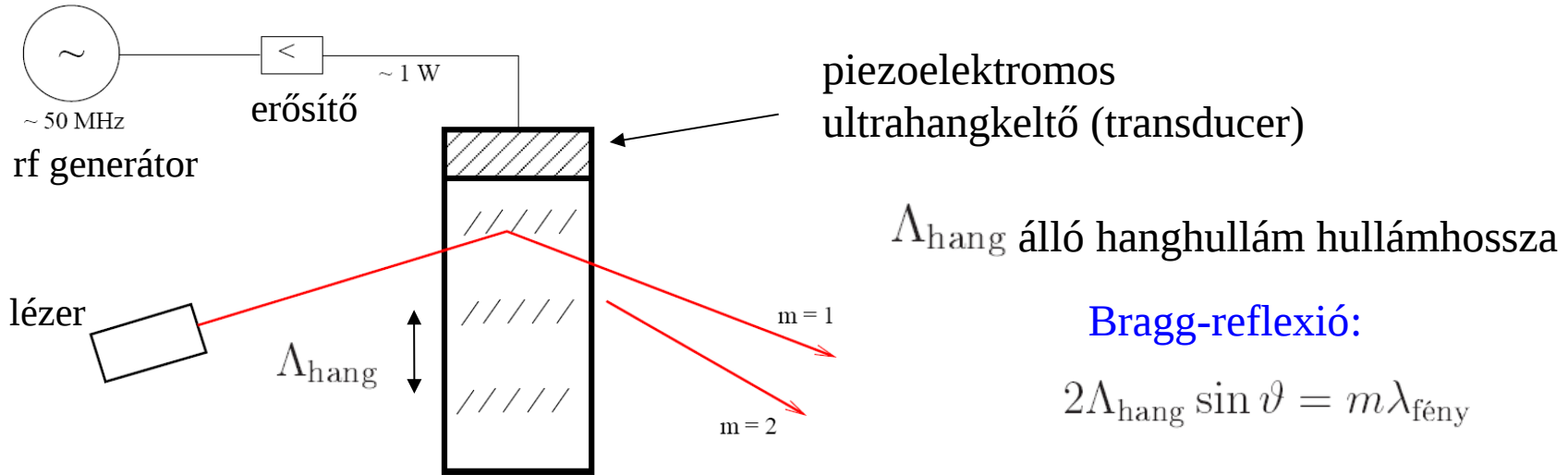
A Bragg-feltétel adott szögre csak éles frekvencián teljesül: **akusztóoptikai szűrő**, TV-ben használják



A fény egy haladó hanghullámon Doppler-eltolódást szenved:

# Akusztóoptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak  $m = 1$

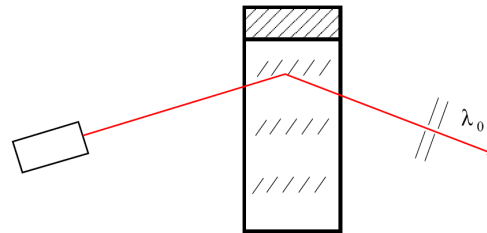
Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul  $m = 2$  és  $3$  is észlelhető

$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m.} \quad \longrightarrow \quad 2\vartheta \sim 2 \sin \vartheta \sim \frac{\lambda_{\text{fény}}}{\Lambda_{\text{hang}}} \sim 0,1 \text{ rad} \sim 5^\circ$$

$$\lambda_{\text{fény}} \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Ha a bejövő hangfrekvenciát változtatjuk, a szög lassan változik:  
**mechanikai mozgó alkatrész nélküli SCANNER**

A Bragg-feltétel adott szögre csak éles frekvencián teljesül: **akusztóoptikai szűrő**, TV-ben használják



A fény egy haladó hanghullámon Doppler-eltolódást szenved: Raman-Nath-effektus

# Fényterjedés plazmában

# Fényterjedés plazmában

szabadon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)

# Fényterjedés plazmában

szabadon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)



$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

# Fényterjedés plazmában

szabadon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)



$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek

# Fényterjedés plazmában

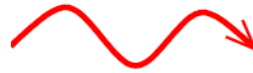
szabadon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)



$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak



# Fényterjedés plazmában



$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek




sugároznak

szabadon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)

ez interferál  
az eredeti hullámmal



# Fényterjedés plazmában


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak


szabandon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

# Fényterjedés plazmában


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

szabandon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)

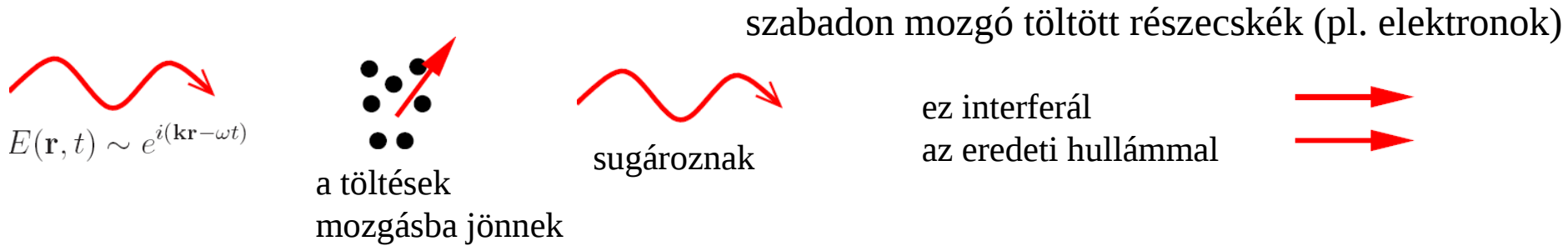
ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0$$


# Fényterjedés plazmában



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r})$$

# Fényterjedés plazmában


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

szabandon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


ez interferál  
az eredeti hullámmal




Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó}$$

# Fényterjedés plazmában


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

szabandon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó} \quad m: \text{elektrontömeg}$$

# Fényterjedés plazmában


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

szabandon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)

ez interferál  
az eredeti hullámmal

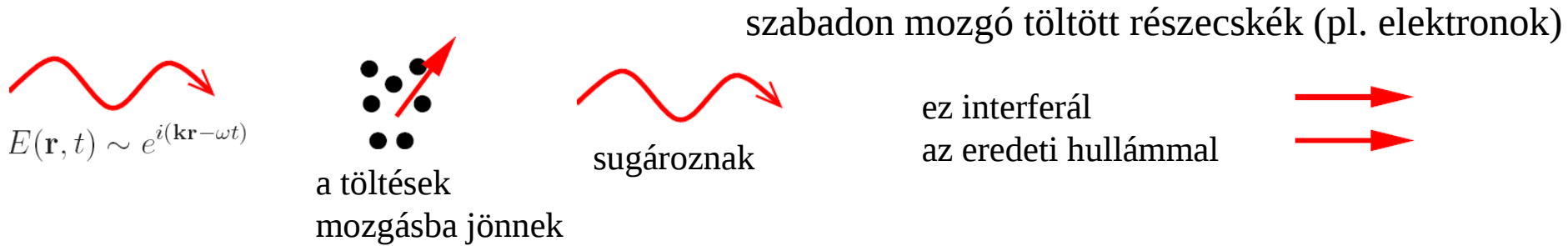


Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r})$$

dielektromos állandó  $m$ : elektrontömeg  
 $e$ : elektrontöltés

# Fényterjedés plazmában



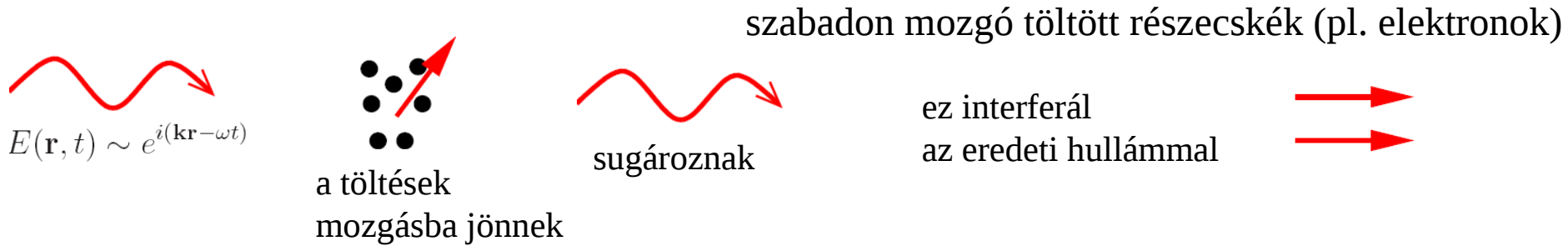
Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r})$$

dielektromos állandó  $m$ : elektrontömeg  
 $e$ : elektrontöltés  
 $N$ : elektronsűrűség ( $\frac{1}{\text{m}^3}$ )



# Fényterjedés plazmában

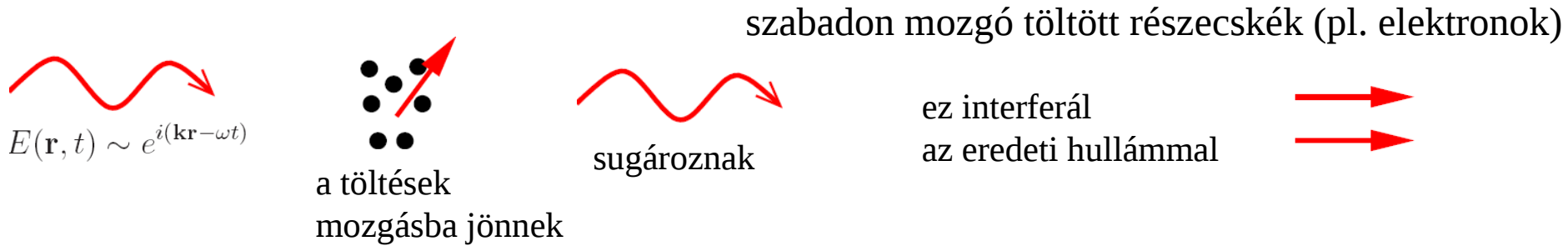


Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó}$$
$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}}$$

$m$ : elektrontömeg  
 $e$ : elektrontöltés  
 $N$ : elektronsűrűség ( $\frac{1}{\text{m}^3}$ )

# Fényterjedés plazmában




Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó}$$
$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}}$$
$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$m$ : elektrontömeg  
 $e$ : elektrontöltés  
 $N$ : elektronsűrűség ( $\frac{1}{\text{m}^3}$ )

# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!


$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó} \quad m: \text{elektrontömeg}$$
$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}} \quad e: \text{elektrontöltés}$$
$$N: \text{elektronsűrűség } \left(\frac{1}{\text{m}^3}\right)$$

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m}$$

# Fényterjedés plazmában

szabandon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó}$$

$m$ : elektrontömeg  
 $e$ : elektrontöltés  
 $N$ : elektronsűrűség ( $\frac{1}{\text{m}^3}$ )


$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}}$$

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$

# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó}$$

$m$ : elektrontömeg  
 $e$ : elektrontöltés  
 $N$ : elektronsűrűség ( $\frac{1}{\text{m}^3}$ )

$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}}$$


$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$

$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0$$

# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó}$$

$m$ : elektrontömeg  
 $e$ : elektrontöltés  
 $N$ : elektronsűrűség ( $\frac{1}{\text{m}^3}$ )

$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}}$$


$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$

$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0 \quad \text{\textit{n} képzetes:}$$

# Fényterjedés plazmában

szabandon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó} \quad m: \text{elektrontömeg}$$
$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}} \quad e: \text{elektrontöltés}$$
$$N: \text{elektronsűrűség } \left(\frac{1}{\text{m}^3}\right)$$


$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$

$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0 \quad n \text{ képzetes: elnyelődés, teljes visszaverődés}$$

# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó} \quad m: \text{elektrontömeg}$$
$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}} \quad e: \text{elektrontöltés}$$
$$N: \text{elektronsűrűség } \left(\frac{1}{\text{m}^3}\right)$$

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$


$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0 \quad n \text{ képzetes: elnyelődés, teljes visszaverődés}$$

Változó elektronsűrűség: ahol  $\Omega(\mathbf{r}) = \omega$ , ott **tükröződés**



# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

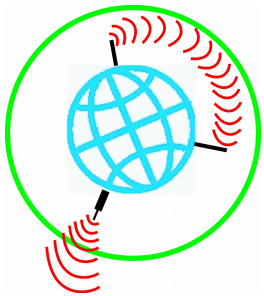
$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó} \quad m: \text{elektrontömeg}$$
$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}} \quad e: \text{elektrontöltés}$$
$$N: \text{elektronsűrűség } \left(\frac{1}{\text{m}^3}\right)$$

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$


$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0 \quad n \text{ képzetes: elnyelődés, teljes visszaverődés}$$

Változó elektronsűrűség: ahol  $\Omega(\mathbf{r}) = \omega$ , ott **tükröződés**



# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)



$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

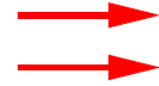


a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó} \quad m: \text{elektrontömeg}$$

$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}} \quad e: \text{elektrontöltés}$$

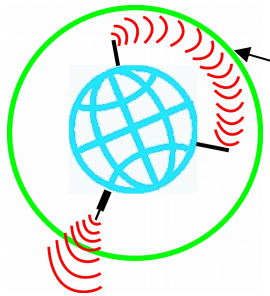
$$N: \text{elektronsűrűség } \left(\frac{1}{\text{m}^3}\right)$$

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$

$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0 \quad n \text{ képzetes: elnyelődés, teljes visszaverődés}$$


Változó elektronsűrűség: ahol  $\Omega(\mathbf{r}) = \omega$ , ott **tükröződés**



középhullámú rádióadás  
visszaverődik az ionoszféráról

# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)


$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

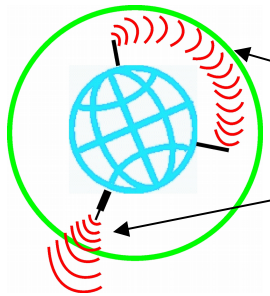
$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó} \quad m: \text{elektrontömeg}$$
$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}} \quad e: \text{elektrontöltés}$$
$$N: \text{elektronsűrűség } \left(\frac{1}{\text{m}^3}\right)$$

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$

$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0 \quad n \text{ képzetes: elnyelődés, teljes visszaverődés}$$


Változó elektronsűrűség: ahol  $\Omega(\mathbf{r}) = \omega$ , ott **tükröződés**



középhullámú rádióadás  
visszaverődik az ionoszféráról  
nagyfrekvenciás TV-adás: áthatol

# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)



$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó} \quad m: \text{elektrontömeg}$$

$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}} \quad e: \text{elektrontöltés}$$

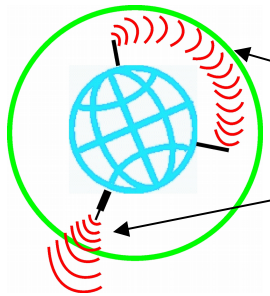
$$N: \text{elektronsűrűség } \left(\frac{1}{\text{m}^3}\right)$$

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

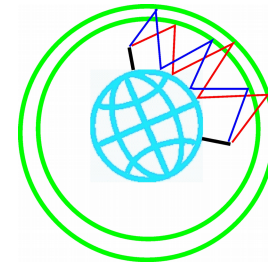
$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$

$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0 \quad n \text{ képzetes: elnyelődés, teljes visszaverődés}$$

Változó elektronsűrűség: ahol  $\Omega(\mathbf{r}) = \omega$ , ott **tükröződés**




középhullámú rádióadás  
visszaverődik az ionoszféráról  
nagyfrekvenciás TV-adás: áthatol



# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)



$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r})$$

$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}}$$

dielektromos állandó

$m$ : elektrontömeg

$e$ : elektrontöltés

$N$ : elektronsűrűség ( $\frac{1}{\text{m}^3}$ )

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

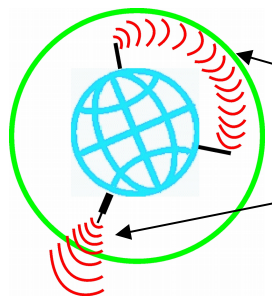
$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m}$$

plazmafrekvencia

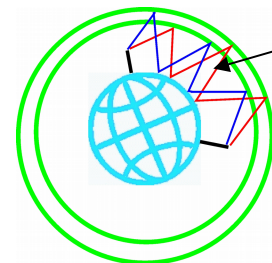
$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0$$

$n$  képzetes: elnyelődés, teljes visszaverődés

Változó elektronsűrűség: ahol  $\Omega(\mathbf{r}) = \omega$ , ott **tükröződés**




középhullámú rádióadás  
visszaverődik az ionoszféráról  
nagyfrekvenciás TV-adás: áthatol



lűktető  
ionoszféra

# Fényterjedés plazmában

szabodon mozgó töltött részecskék (pl. elektronok)



$$E(\mathbf{r}, t) \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$



a töltések  
mozgásba jönnek



sugároznak

ez interferál  
az eredeti hullámmal



Ugyenez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r})$$

$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}}$$

dielektromos állandó

$m$ : elektrontömeg

$e$ : elektrontöltés

$N$ : elektronsűrűség ( $\frac{1}{\text{m}^3}$ )

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

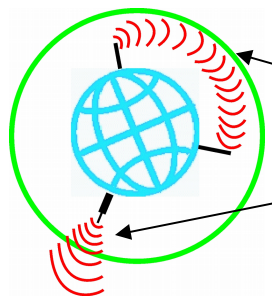
$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m}$$

plazmafrekvencia

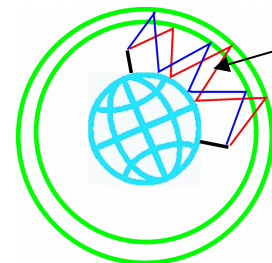
$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0$$

$n$  képzetes: elnyelődés, teljes visszaverődés

Változó elektronsűrűség: ahol  $\Omega(\mathbf{r}) = \omega$ , ott **tükröződés**



középhullámú rádióadás  
visszaverődik az ionoszféráról  
nagyfrekvenciás TV-adás: áthatol



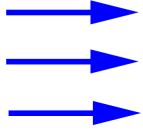
lűktető  
ionoszféra

távoli vétel, interferencia-fütyök: fading

**Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.**

**Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.**

**B**

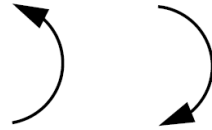
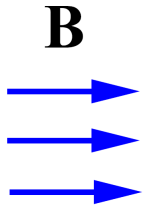




**Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.**

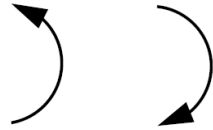
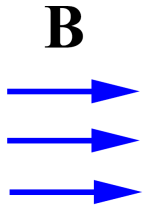


Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

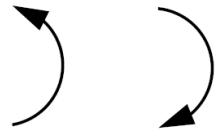
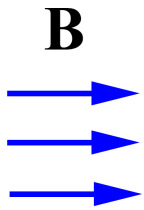
**Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.**



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

# Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.

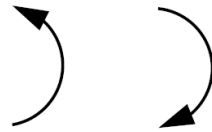
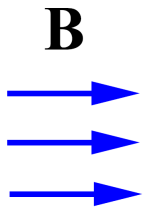


$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

$$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$$

## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.

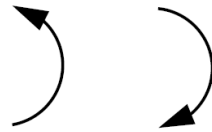
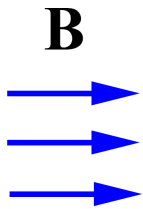


$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

# Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

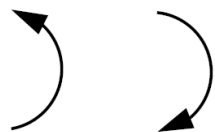
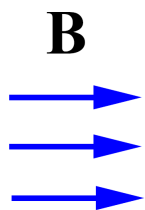
ciklotron frekvencia

$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

Cirkulárisan polarizált hullám



## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

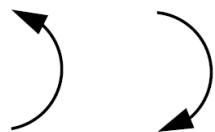
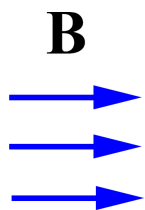
$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

Cirkulárisan polarizált hullám



$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowright\rangle + |\circlearrowleft\rangle$$

## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

Cirkulárisan polarizált hullám

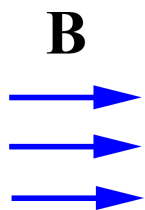


$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowleft\rangle + |\circlearrowright\rangle$$

lineárisan polarizált hullám



## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

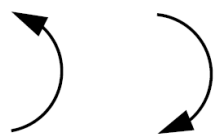
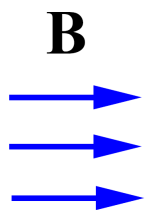
Cirkulárisan polarizált hullám



$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowleft\rangle + |\circlearrowright\rangle \longrightarrow |\circlearrowleft\rangle e^{ik_R d} + |\circlearrowright\rangle e^{ik_L d} = |\nearrow\rangle$$

lineárisan polarizált hullám

## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

Cirkulárisan polarizált hullám

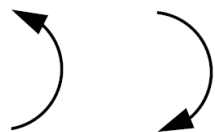
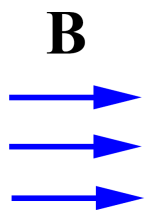


$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowright\rangle + |\circlearrowleft\rangle \longrightarrow |\circlearrowright\rangle e^{ik_R d} + |\circlearrowleft\rangle e^{ik_L d} = |\nearrow\rangle$$

lineárisan polarizált hullám

A polarizációs sík elfordulása:

## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

Cirkulárisan polarizált hullám

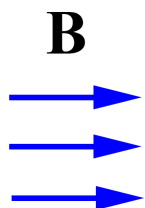


$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowleft\rangle + |\circlearrowright\rangle \longrightarrow |\circlearrowleft\rangle e^{ik_R d} + |\circlearrowright\rangle e^{ik_L d} = |\nearrow\rangle$$

lineárisan polarizált hullám

A polarizációs sík elfordulása:  
optikai aktivitás

## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

Cirkulárisan polarizált hullám



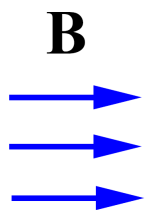
$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowright\rangle + |\circlearrowleft\rangle \longrightarrow |\circlearrowright\rangle e^{ik_R d} + |\circlearrowleft\rangle e^{ik_L d} = |\nearrow\rangle$$

lineárisan polarizált hullám

A polarizációs sík elfordulása:  
optikai aktivitás

Hol van ilyen plazma?

## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

Cirkulárisan polarizált hullám



$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowleft\rangle + |\circlearrowright\rangle \longrightarrow |\circlearrowleft\rangle e^{ik_R d} + |\circlearrowright\rangle e^{ik_L d} = |\nearrow\rangle$$

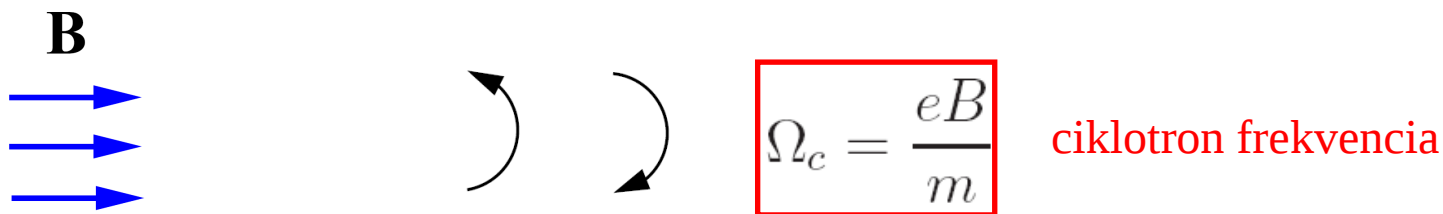
lineárisan polarizált hullám

A polarizációs sík elfordulása:  
optikai aktivitás

Hol van ilyen plazma?

- ionoszféra

## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$\omega_R(k) \neq \omega_L(k)$  fázisok szétcsúszása

Cirkulárisan polarizált hullám



$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowleft\rangle + |\circlearrowright\rangle \longrightarrow |\circlearrowleft\rangle e^{ik_R d} + |\circlearrowright\rangle e^{ik_L d} = |\nearrow\rangle$$

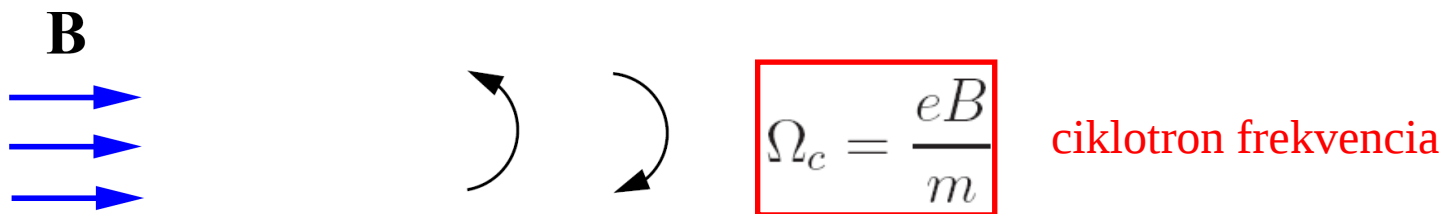
lineárisan polarizált hullám

A polarizációs sík elfordulása:  
optikai aktivitás

Hol van ilyen plazma?

- ionosféra
- csillagközi tér

## Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\omega_R(k) \neq \omega_L(k) \quad \text{fázisok szétcsúszása}$$

Cirkulárisan polarizált hullám



$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowright\rangle + |\circlearrowleft\rangle \quad \longrightarrow \quad |\circlearrowright\rangle e^{ik_R d} + |\circlearrowleft\rangle e^{ik_L d} = |\nearrow\rangle$$

lineárisan polarizált hullám

A polarizációs sík elfordulása:  
optikai aktivitás

Hol van ilyen plazma?

- ionosféra
- csillagközi tér
- fémek belsejében elektronplazma

**Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?**

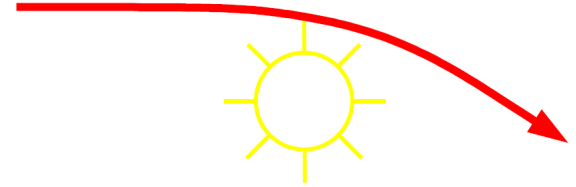


# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen

# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen

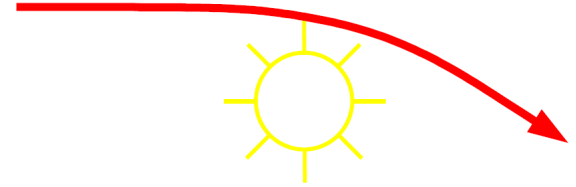


# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen
- b) Klasszikus elektrodinamika: nem

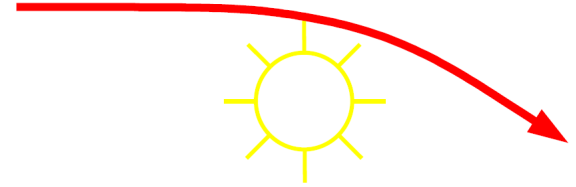
# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen
- b) Klasszikus elektrodinamika: nem
- c) Általános relativitáselmélet: igen



# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

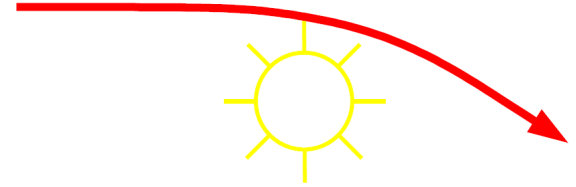
- a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen
- b) Klasszikus elektrodinamika: nem
- c) Általános relativitáselmélet: igen  
a téridő „gömbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe



# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen
- b) Klasszikus elektrodinamika: nem
- c) Általános relativitáselmélet: igen

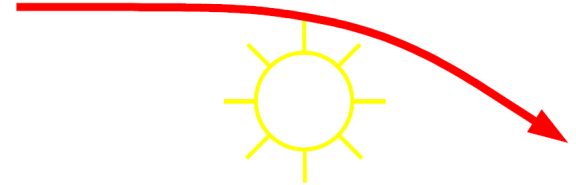
a téridő „gömbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: **igen**
- b) Klasszikus elektrodinamika: **nem**
- c) Általános relativitáselmélet: **igen**

a téridő „gömbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**

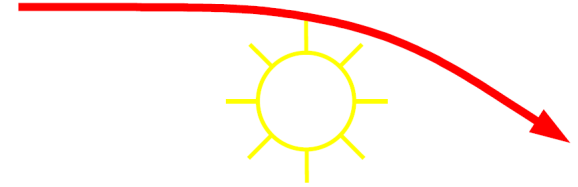


Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen
- b) Klasszikus elektrodinamika: nem
- c) Általános relativitáselmélet: igen

a téridő „gömbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

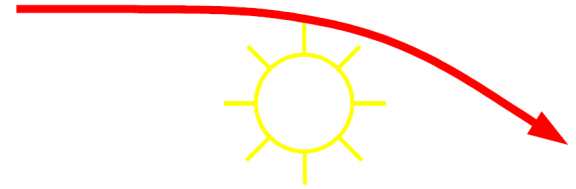
**Mechanikai analógia:**



# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: **igen**
- b) Klasszikus elektrodinamika: **nem**
- c) Általános relativitáselmélet: **igen**

a téridő „gömbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



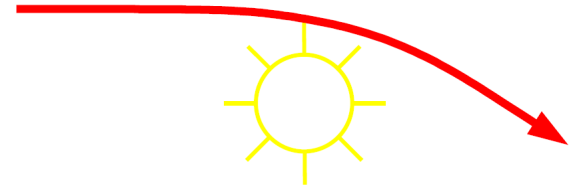
Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

**Mechanikai analógia:** Newtoni gravitációs potenciális energia:

# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen
- b) Klasszikus elektrodinamika: nem
- c) Általános relativitáselmélet: igen

a téridő „gömbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



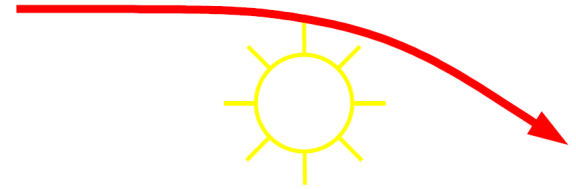
Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

**Mechanikai analógia:** Newtoni gravitációs potenciális energia:  $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$

# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen
- b) Klasszikus elektrodinamika: nem
- c) Általános relativitáselmélet: igen

a téridő „gömbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



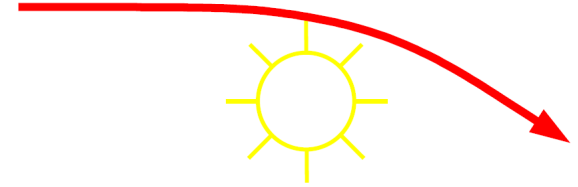
Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

**Mechanikai analógia:** Newtoni gravitációs potenciális energia:  $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$        $E = \frac{1}{2}mc^2$

# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: **igen**
- b) Klasszikus elektrodinamika: **nem**
- c) Általános relativitáselmélet: **igen**

a téridő „gömbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

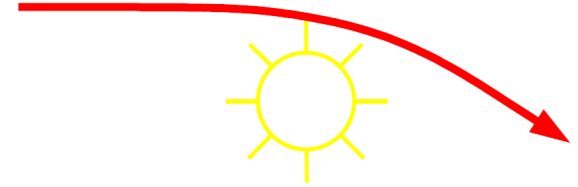
**Mechanikai analógia:** Newtoni gravitációs potenciális energia:  $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$   $E = \frac{1}{2}mc^2$

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} dl = \delta \int \sqrt{2m[E - m\Phi(\mathbf{r})]} dl = \\ &= \sqrt{2mE} \delta \int \sqrt{1 - \frac{m\Phi}{E}} dl \approx \sqrt{2mE} \delta \int \left(1 - \frac{m\Phi}{2E}\right) dl \sim \delta \int \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) dl = \delta \int n(\mathbf{r}) dl\end{aligned}$$

# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: **igen**
- b) Klasszikus elektrodinamika: **nem**
- c) Általános relativitáselmélet: **igen**

a téridő „görbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

**Mechanikai analógia:** Newtoni gravitációs potenciális energia:  $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$   $E = \frac{1}{2}mc^2$

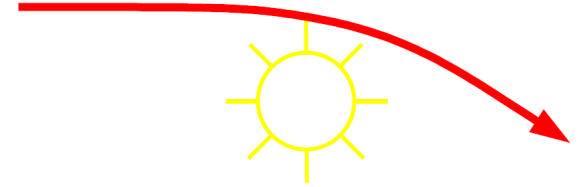
$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} dl = \delta \int \sqrt{2m[E - m\Phi(\mathbf{r})]} dl = \\ &= \sqrt{2mE} \delta \int \sqrt{1 - \frac{m\Phi}{E}} dl \approx \sqrt{2mE} \delta \int \left(1 - \frac{m\Phi}{2E}\right) dl \sim \delta \int \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) dl = \delta \int n(\mathbf{r}) dl\end{aligned}$$

**Newtoni modell:**

# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: **igen**
- b) Klasszikus elektrodinamika: **nem**
- c) Általános relativitáselmélet: **igen**

a téridő „görbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

**Mechanikai analógia:** Newtoni gravitációs potenciális energia:  $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$   $E = \frac{1}{2}mc^2$

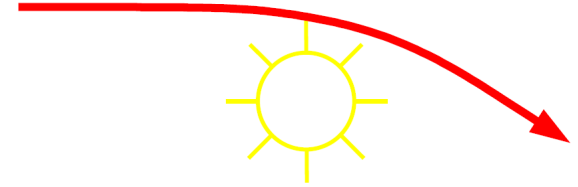
$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} dl = \delta \int \sqrt{2m[E - m\Phi(\mathbf{r})]} dl = \\ &= \sqrt{2mE} \delta \int \sqrt{1 - \frac{m\Phi}{E}} dl \approx \sqrt{2mE} \delta \int \left(1 - \frac{m\Phi}{2E}\right) dl \sim \delta \int \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) dl = \delta \int n(\mathbf{r}) dl\end{aligned}$$

**Newtoni modell:**  $n(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\Phi(\mathbf{r})}{c^2}$

# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: **igen**
- b) Klasszikus elektrodinamika: **nem**
- c) Általános relativitáselmélet: **igen**

a téridő „görbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

**Mechanikai analógia:** Newtoni gravitációs potenciális energia:  $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$   $E = \frac{1}{2}mc^2$

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} dl = \delta \int \sqrt{2m[E - m\Phi(\mathbf{r})]} dl = \\ &= \sqrt{2mE} \delta \int \sqrt{1 - \frac{m\Phi}{E}} dl \approx \sqrt{2mE} \delta \int \left(1 - \frac{m\Phi}{2E}\right) dl \sim \delta \int \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) dl = \delta \int n(\mathbf{r}) dl\end{aligned}$$

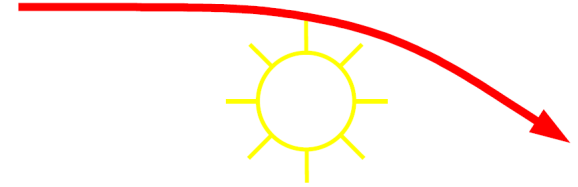
**Newtoni modell:**  $n(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\Phi(\mathbf{r})}{c^2}$

**Einstein (általános relativitáselmélet):**

# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: **igen**
- b) Klasszikus elektrodinamika: **nem**
- c) Általános relativitáselmélet: **igen**

a téridő „görbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

**Mechanikai analógia:** Newtoni gravitációs potenciális energia:  $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$   $E = \frac{1}{2}mc^2$

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} dl = \delta \int \sqrt{2m[E - m\Phi(\mathbf{r})]} dl = \\ &= \sqrt{2mE} \delta \int \sqrt{1 - \frac{m\Phi}{E}} dl \approx \sqrt{2mE} \delta \int \left(1 - \frac{m\Phi}{2E}\right) dl \sim \delta \int \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) dl = \delta \int n(\mathbf{r}) dl\end{aligned}$$

**Newtoni modell:**  $n(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\Phi(\mathbf{r})}{c^2}$

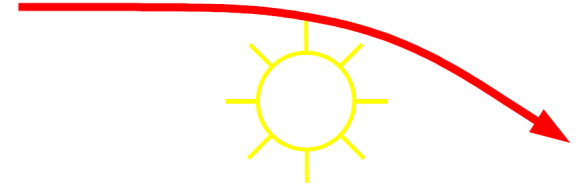
**Einstein (általános relativitáselmélet):**  
2-es szorzó



# Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: **igen**
- b) Klasszikus elektrodinamika: **nem**
- c) Általános relativitáselmélet: **igen**

a téridő „görbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

**Mechanikai analógia:** Newtoni gravitációs potenciális energia:  $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$   $E = \frac{1}{2}mc^2$

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} dl = \delta \int \sqrt{2m[E - m\Phi(\mathbf{r})]} dl = \\ &= \sqrt{2mE} \delta \int \sqrt{1 - \frac{m\Phi}{E}} dl \approx \sqrt{2mE} \delta \int \left(1 - \frac{m\Phi}{2E}\right) dl \sim \delta \int \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) dl = \delta \int n(\mathbf{r}) dl\end{aligned}$$

**Newtoni modell:**  $n(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\Phi(\mathbf{r})}{c^2}$

**Einstein (általános relativitáselmélet):**  $n(\mathbf{r}) = 1 - \frac{2\Phi(\mathbf{r})}{c^2}$   
2-es szorzó

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

$$\boxed{b = \frac{2GM}{c^2}}$$

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

$$\boxed{b = \frac{2GM}{c^2}}$$

Schwarzschild-sugár

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

$$\boxed{b = \frac{2GM}{c^2}}$$

Schwarzschild-sugár

Nap esetén:

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

$$\boxed{b = \frac{2GM}{c^2}}$$

Schwarzschild-sugár

Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$



**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

$$\boxed{b = \frac{2GM}{c^2}}$$

Schwarzschild-sugár

Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow b = 3 \text{ km}$

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

$$\boxed{b = \frac{2GM}{c^2}}$$

Schwarzschild-sugár

Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow b = 3 \text{ km}$   $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}} \quad \boxed{b = \frac{2GM}{c^2}} \quad \text{Schwarzschild-sugár}$$

Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow b = 3 \text{ km}$   $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

**Shapiro-effektus:** a gravitációs téren áthaladó fény **késik**

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

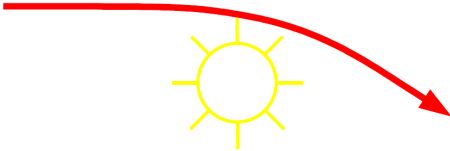
$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

$$\boxed{b = \frac{2GM}{c^2}}$$

Schwarzschild-sugár

Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow b = 3 \text{ km}$   $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

**Shapiro-effektus:** a gravitációs téren áthaladó fény **késik**

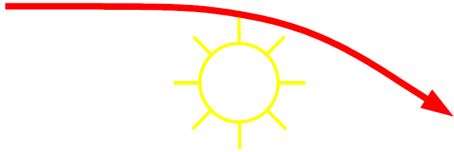


**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}} \quad \boxed{b = \frac{2GM}{c^2}} \quad \text{Schwarzschild-sugár}$$

Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow b = 3 \text{ km}$   $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

**Shapiro-effektus:** a gravitációs téren áthaladó fény **késik**



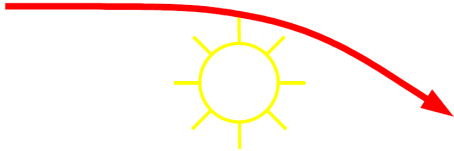
$$\varphi = \int n(r) dl = \int \left(1 + \frac{b}{r}\right) dl = \int dl + b \int \frac{dl}{r} = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}} \quad \boxed{b = \frac{2GM}{c^2}} \quad \text{Schwarzschild-sugár}$$

Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow b = 3 \text{ km}$   $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

**Shapiro-effektus:** a gravitációs téren áthaladó fény **késik**



$$\varphi = \int n(r) dl = \int \left(1 + \frac{b}{r}\right) dl = \int dl + b \int \frac{dl}{r} = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

szabad terjedés  $\nearrow$

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

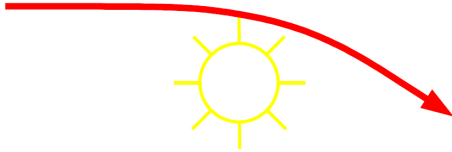
$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

$$\boxed{b = \frac{2GM}{c^2}}$$

Schwarzschild-sugár

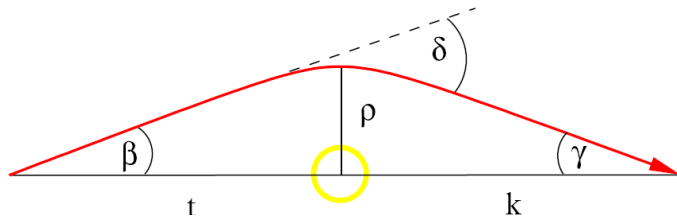
Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow$   $b = 3 \text{ km}$   $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

**Shapiro-effektus:** a gravitációs téren áthaladó fény **késik**



$$\varphi = \int n(r) dl = \int \left(1 + \frac{b}{r}\right) dl = \int dl + b \int \frac{dl}{r} = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

szabad terjedés  $\nearrow$

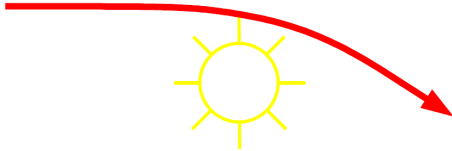


**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}} \quad \boxed{b = \frac{2GM}{c^2}} \quad \text{Schwarzschild-sugár}$$

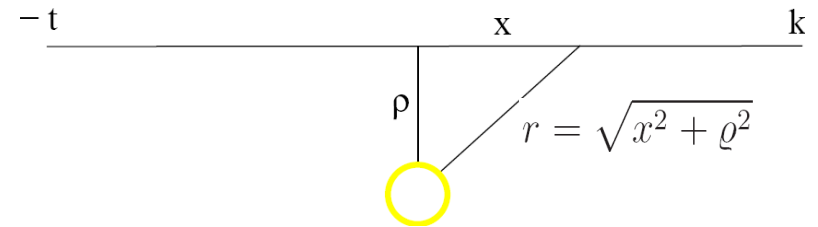
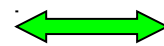
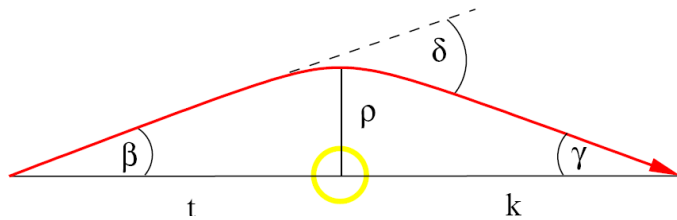
Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow$   $b = 3 \text{ km}$   $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

**Shapiro-effektus:** a gravitációs téren áthaladó fény **késik**



$$\varphi = \int n(r) dl = \int \left(1 + \frac{b}{r}\right) dl = \int dl + b \int \frac{dl}{r} = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

szabad terjedés  $\nearrow$



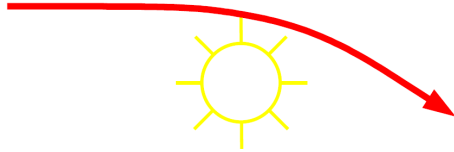


**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}} \quad \boxed{b = \frac{2GM}{c^2}} \quad \text{Schwarzschild-sugár}$$

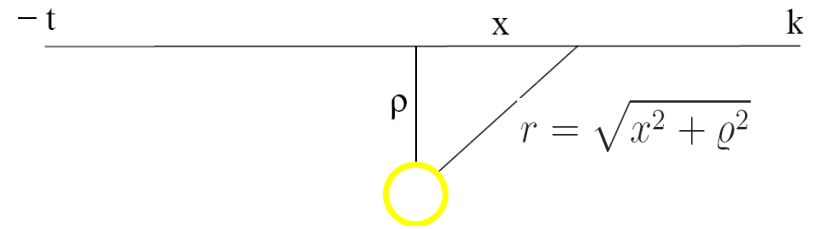
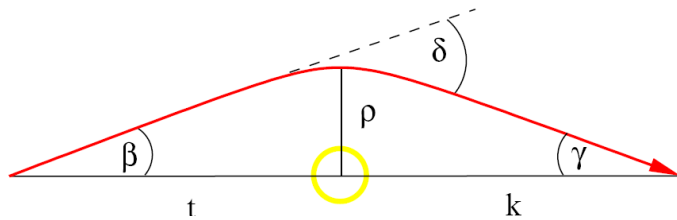
Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow$   $b = 3 \text{ km}$   $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

**Shapiro-effektus:** a gravitációs téren áthaladó fény **késik**



$$\varphi = \int n(r) dl = \int \left(1 + \frac{b}{r}\right) dl = \int dl + b \int \frac{dl}{r} = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

szabad terjedés  $\nearrow$



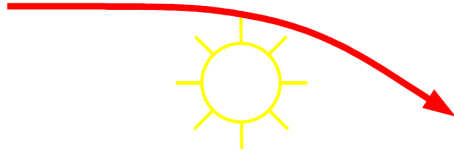
$$\Delta\varphi = b \int \frac{dl}{r} = b \int_{-t}^k \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \varrho^2}} = b \left[ \text{arsh} \frac{x}{\varrho} \right]_{-t}^k \approx b \left( \ln \frac{2k}{\varrho} + \ln \frac{2t}{\varrho} \right) = b \ln \frac{4kt}{\varrho^2} = 2b \ln \frac{2\sqrt{kt}}{\varrho}$$

**Spec. eset: fényterjedés csillag mellett:**  $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}} \quad \boxed{b = \frac{2GM}{c^2}} \quad \text{Schwarzschild-sugár}$$

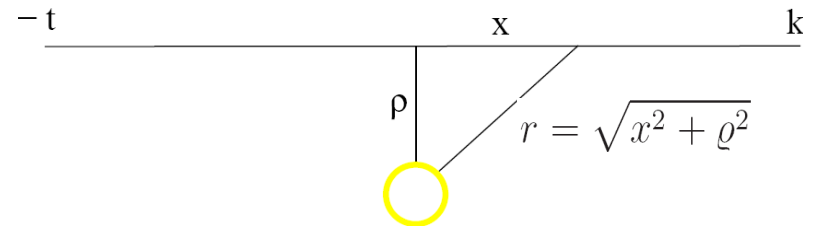
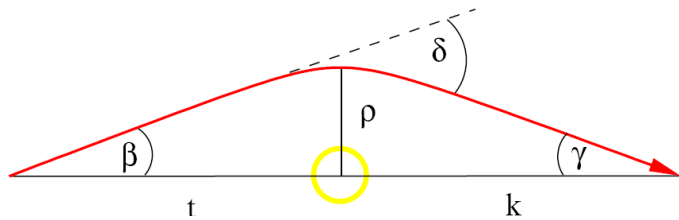
Nap esetén:  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$   $\longrightarrow$   $b = 3 \text{ km}$   $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

**Shapiro-effektus:** a gravitációs téren áthaladó fény **késik**



$$\varphi = \int n(r) dl = \int \left(1 + \frac{b}{r}\right) dl = \int dl + b \int \frac{dl}{r} = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

szabad terjedés  $\nearrow$



$$\Delta\varphi = b \int \frac{dl}{r} = b \int_{-t}^k \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \varrho^2}} = b \left[ \text{arsh} \frac{x}{\varrho} \right]_{-t}^k \approx b \left( \ln \frac{2k}{\varrho} + \ln \frac{2t}{\varrho} \right) = b \ln \frac{4kt}{\varrho^2} = 2b \ln \frac{2\sqrt{kt}}{\varrho}$$

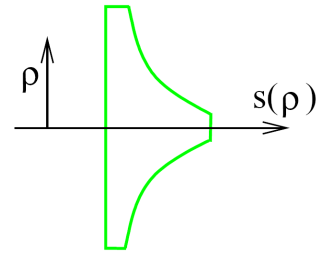
$k, t \gg \varrho$

Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**

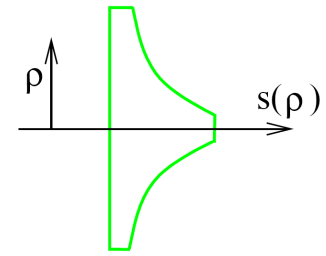
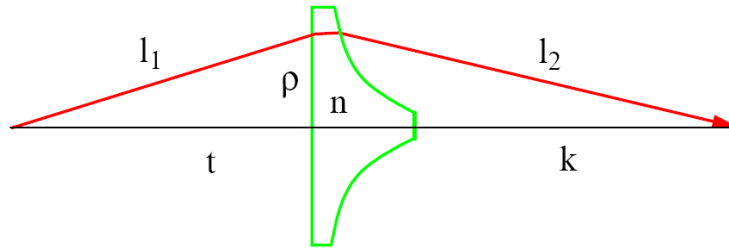
Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**

Hengerszimmetrikus logaritmikusan lencse:

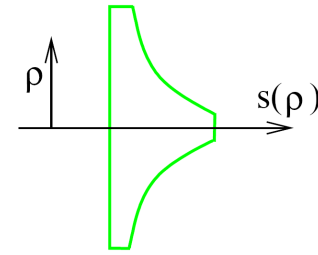
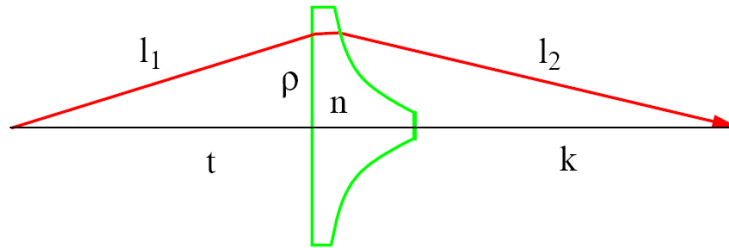
Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
Hengerszimmetrikus logaritmicus lencse:



Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
Hengerszimmetrikus logaritmicus lencse:



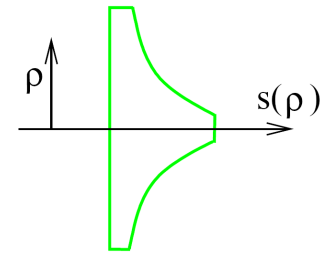
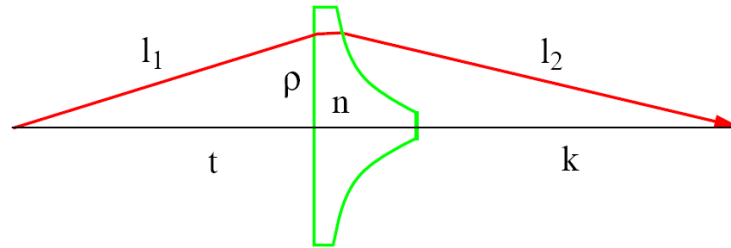
Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmikus lencse:



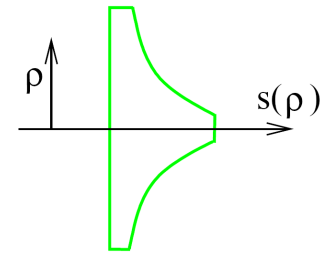
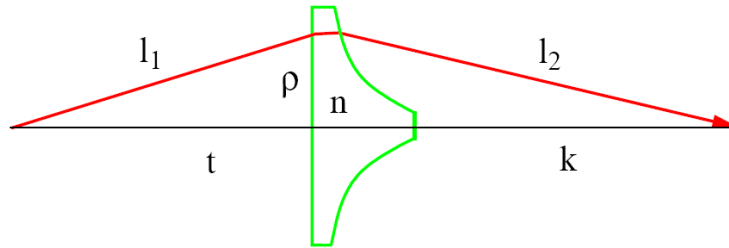
irreleváns állandó

$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$



Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



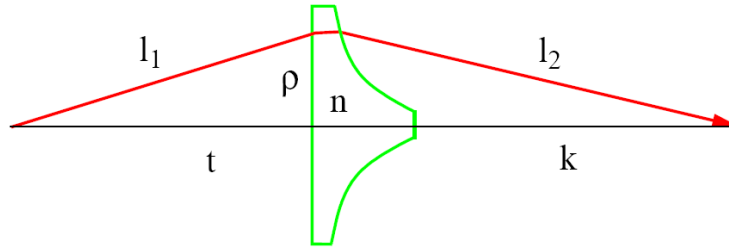
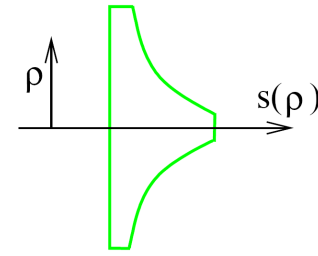
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

irreleváns állandó

$$\approx t \left( 1 + \frac{\varrho^2}{2t^2} \right) + k \left( 1 + \frac{\varrho^2}{2k^2} \right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

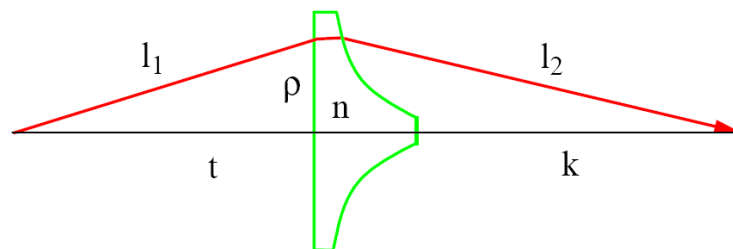
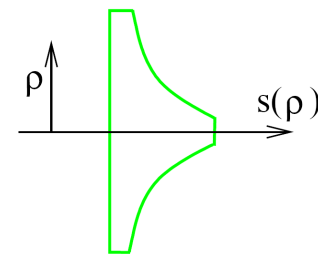
$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

irreleváns állandó

Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$

Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

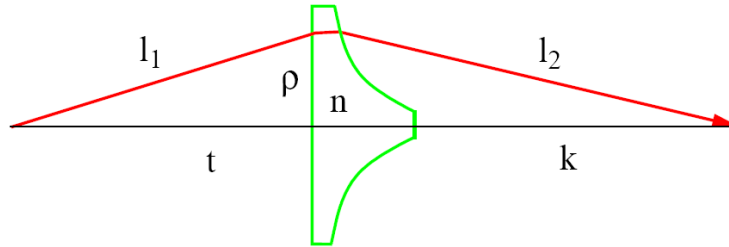
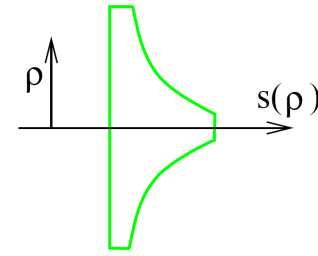
$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

irreleváns állandó

Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0 \implies$  a görbe minimumhelye:  $\varrho = R = \sqrt{2fb}$

Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



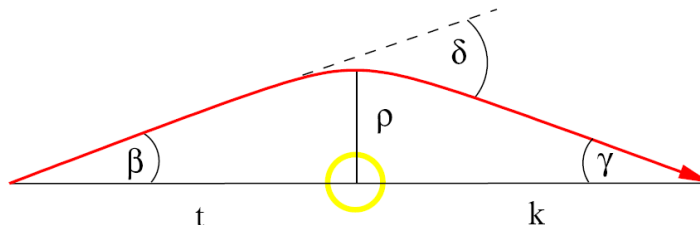
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

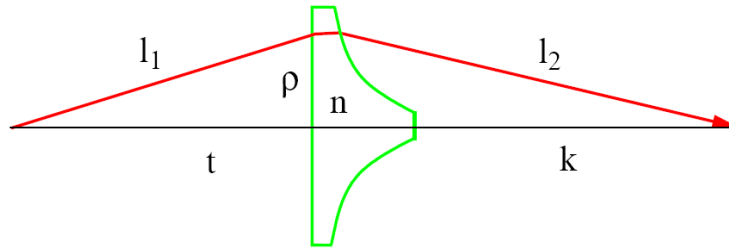
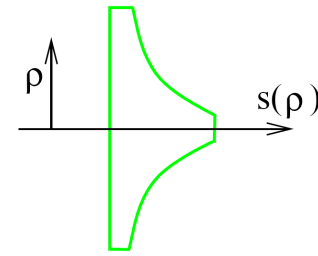
irreleváns állandó

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$  ➡ a görbe minimumhelye:  $\varrho = R = \sqrt{2fb}$



Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



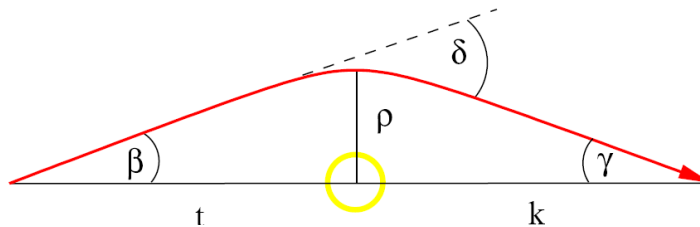
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

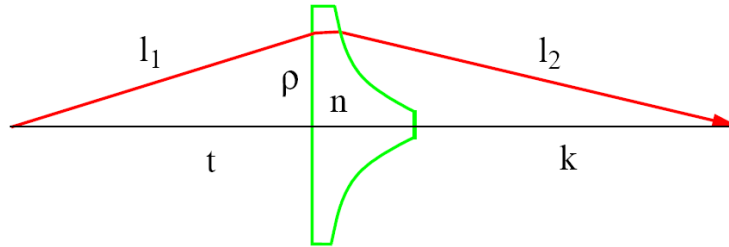
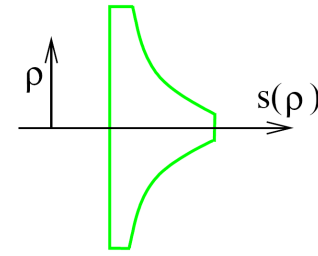
irreleváns állandó

Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$  ➡ a görbe minimumhelye:  $\varrho = R = \sqrt{2fb}$



$$\beta = \frac{\varrho}{t} \quad \gamma = \frac{\varrho}{k}$$

Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



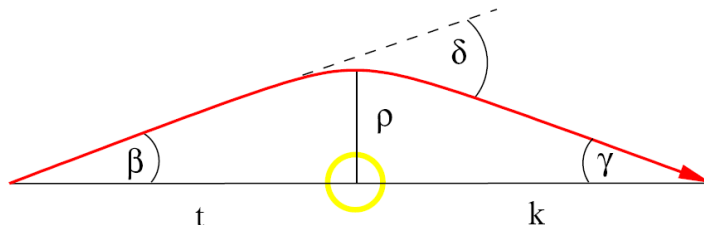
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

irreleváns állandó

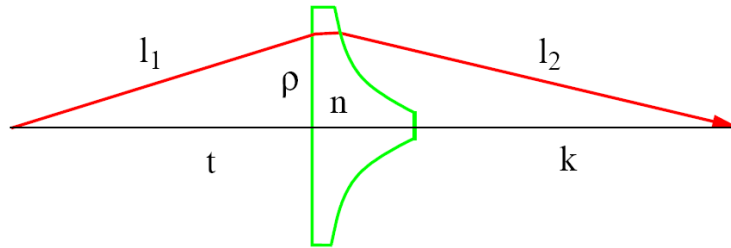
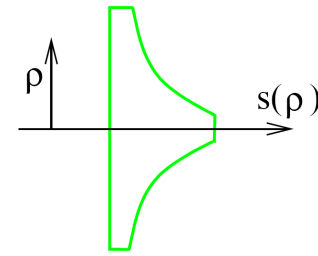
Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$  ➡ a görbe minimumhelye:  $\varrho = R = \sqrt{2fb}$



$$\beta = \frac{\varrho}{t} \quad \gamma = \frac{\varrho}{k}$$

$$\delta = \alpha + \gamma = \varrho \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\varrho}{f} = \frac{\varrho}{\varrho^2/(2b)} = \frac{2b}{\varrho}$$

Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



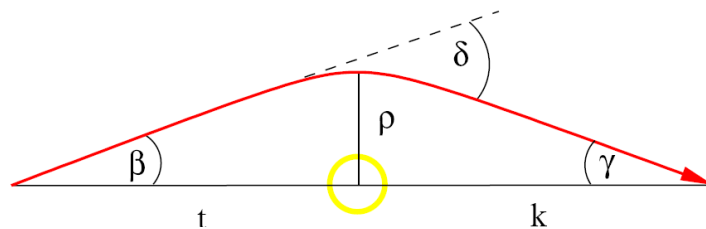
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\rho) = \sqrt{t^2 + \rho^2} + \sqrt{k^2 + \rho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\rho} = t\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\rho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\rho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\rho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\rho} = t + k + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\rho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

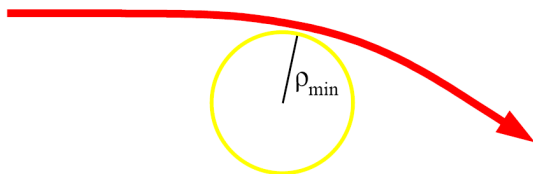
irreleváns állandó

Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$   $\rightarrow$  a görbe minimumhelye:  $\rho = R = \sqrt{2fb}$

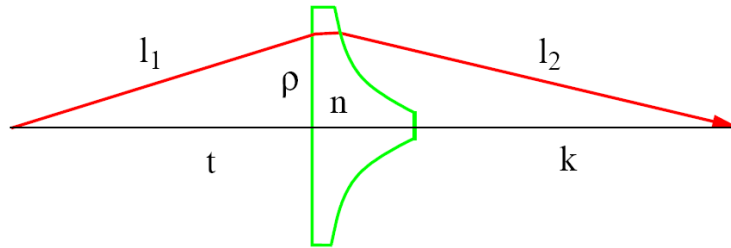
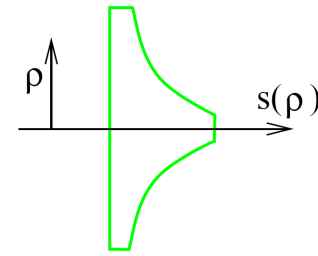


$$\beta = \frac{\rho}{t} \quad \gamma = \frac{\rho}{k}$$

$$\delta = \alpha + \gamma = \rho \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\rho}{f} = \frac{\rho}{\rho^2/(2b)} = \frac{2b}{\rho}$$



Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



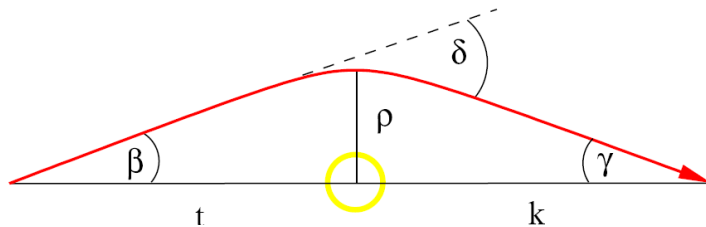
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

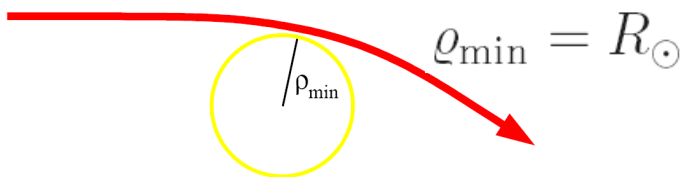
irreleváns állandó

Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$   $\rightarrow$  a görbe minimumhelye:  $\varrho = R = \sqrt{2fb}$



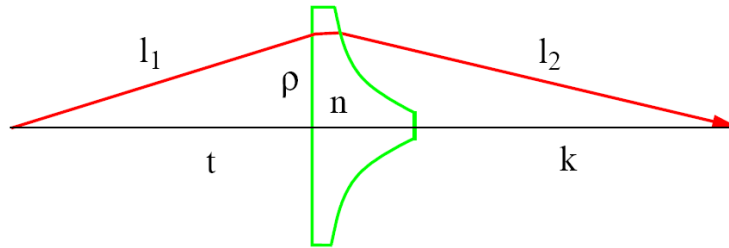
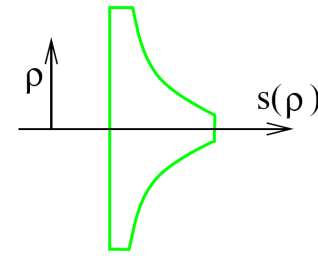
$$\beta = \frac{\varrho}{t} \quad \gamma = \frac{\varrho}{k}$$

$$\delta = \alpha + \gamma = \varrho \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\varrho}{f} = \frac{\varrho}{\varrho^2/(2b)} = \frac{2b}{\varrho}$$





Szimuláljuk az időkésleltetést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



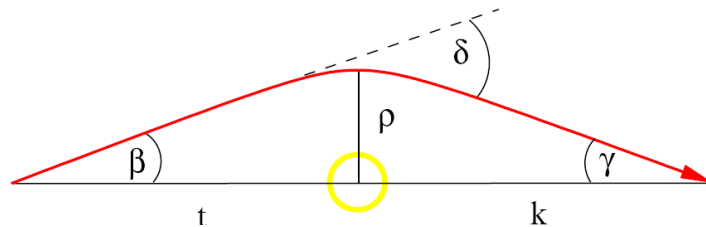
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

irreleváns állandó

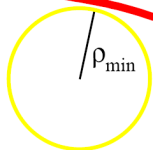
Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$   $\rightarrow$  a görbe minimumhelye:  $\varrho = R = \sqrt{2fb}$



$$\beta = \frac{\varrho}{t} \quad \gamma = \frac{\varrho}{k}$$

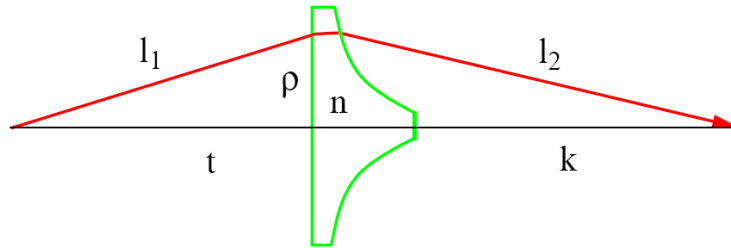
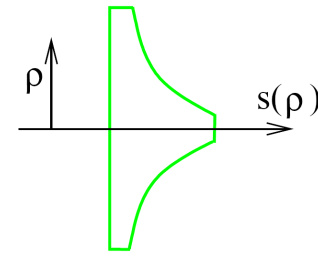
$$\delta = \alpha + \gamma = \varrho \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\varrho}{f} = \frac{\varrho}{\varrho^2/(2b)} = \frac{2b}{\varrho}$$

$$\varrho_{\min} = R_{\odot}$$



$$\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$$

Szimuláljuk az időkésettétést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



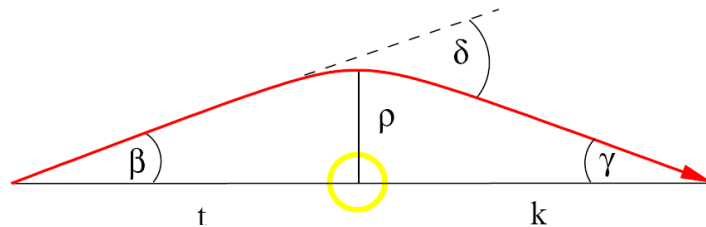
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

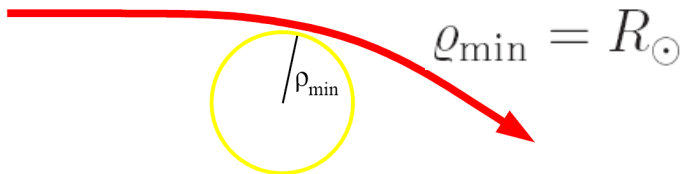
irreleváns állandó

Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$   $\rightarrow$  a görbe minimumhelye:  $\varrho = R = \sqrt{2fb}$



$$\beta = \frac{\varrho}{t} \quad \gamma = \frac{\varrho}{k}$$

$$\delta = \alpha + \gamma = \varrho \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\varrho}{f} = \frac{\varrho}{\varrho^2/(2b)} = \frac{2b}{\varrho}$$

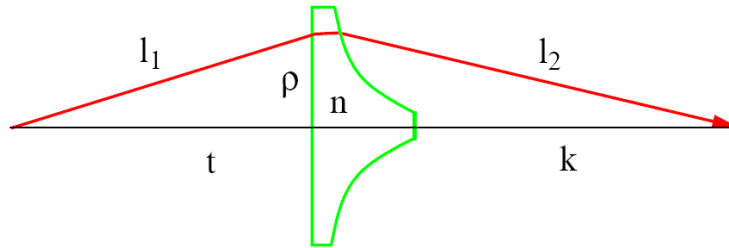
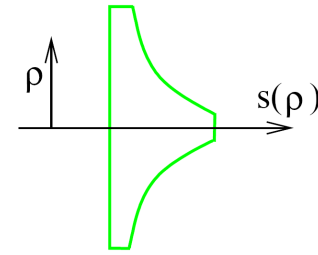


$$\varrho_{\min} = R_{\odot}$$

$$\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$$

Einstein, 1915

Szimuláljuk az időkésettétést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



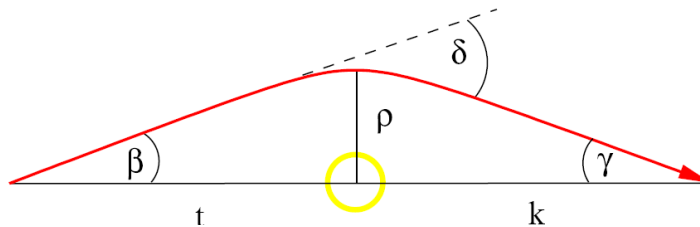
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

irreleváns állandó

Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$   $\rightarrow$  a görbe minimumhelye:  $\varrho = R = \sqrt{2fb}$



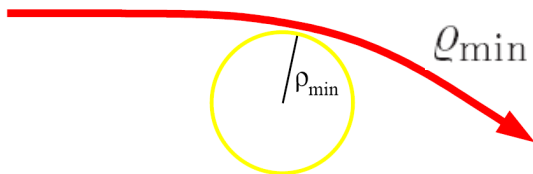
$$\beta = \frac{\varrho}{t} \quad \gamma = \frac{\varrho}{k}$$

$$\delta = \alpha + \gamma = \varrho \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\varrho}{f} = \frac{\varrho}{\varrho^2/(2b)} = \frac{2b}{\varrho}$$

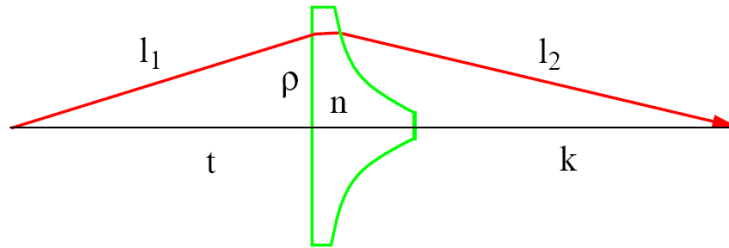
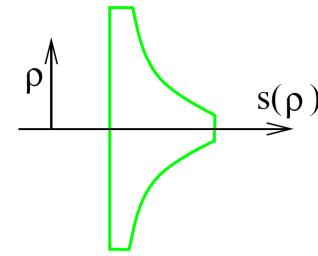
$$\varrho_{\min} = R_{\odot}$$

$$\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$$

Einstein, 1915  
 kimérte Eddington, 1919



Szimuláljuk az időkésettétést egy **lencsével!**  
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



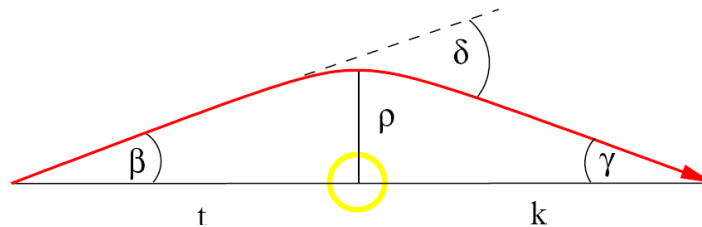
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

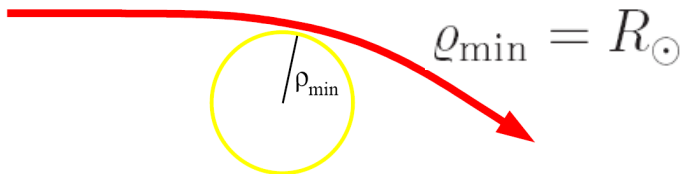
irreleváns állandó

Fermat-elv:  $\delta\varphi = 0$   $\rightarrow$  a görbe minimumhelye:  $\varrho = R = \sqrt{2fb}$



$$\beta = \frac{\varrho}{t} \quad \gamma = \frac{\varrho}{k}$$

$$\delta = \alpha + \gamma = \varrho \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\varrho}{f} = \frac{\varrho}{\varrho^2/(2b)} = \frac{2b}{\varrho}$$



$$\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$$

Einstein, 1915  
 kimérte Eddington, 1919

(Newtoni-modell: fele ekkora érték jött ki!)

# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

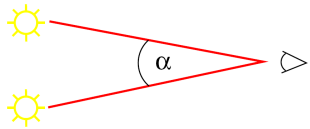
1) Fényelhajlás a Nap mellett:

# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$

# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

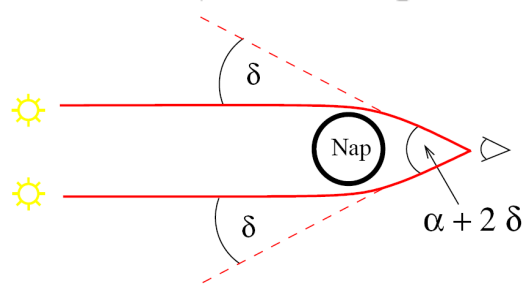
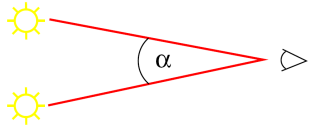
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$





# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

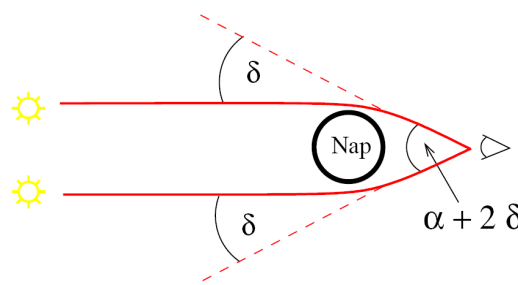
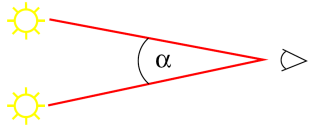
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

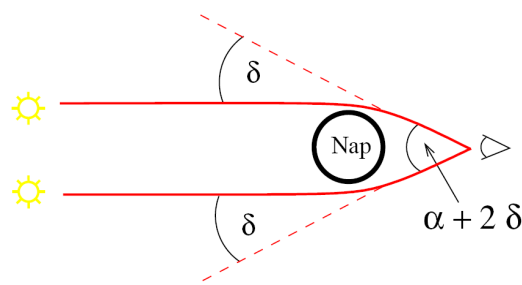
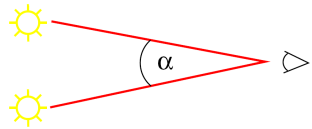
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$

Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919

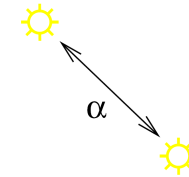


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$

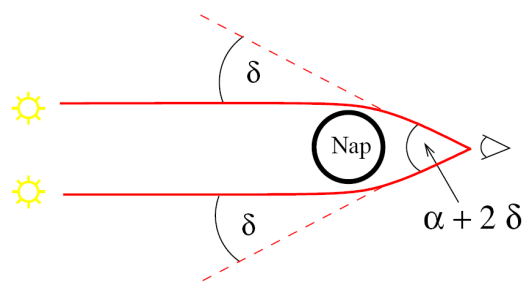
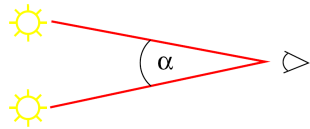


Napfogyatkozásakor fényképezhető  
Eddington, 1919

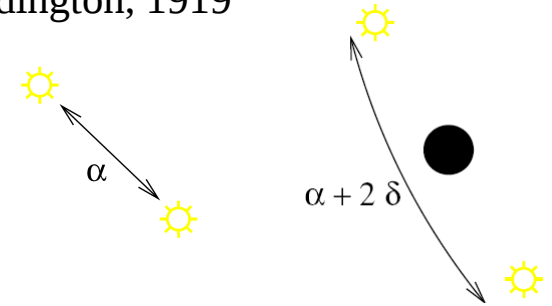


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$

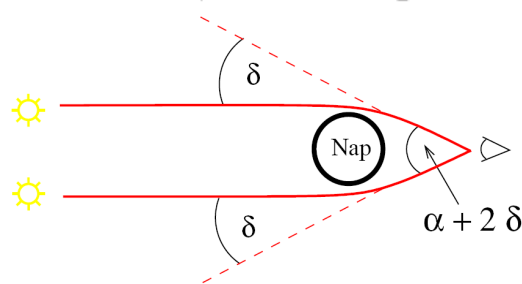
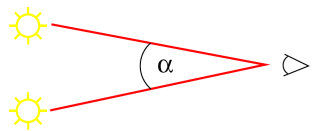


Napfogyatkozásakor fényképezhető  
Eddington, 1919



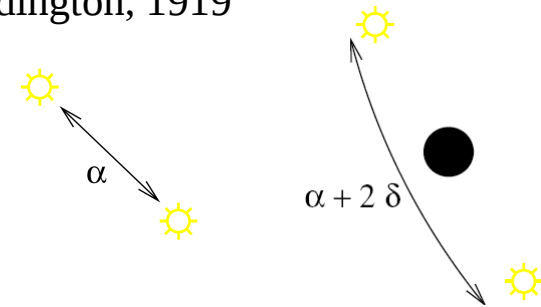
# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



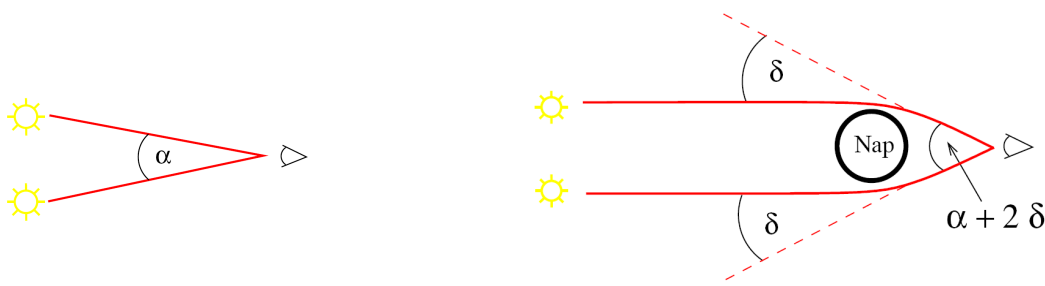
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:

Napfogyatkozásakor fényképezhető  
Eddington, 1919

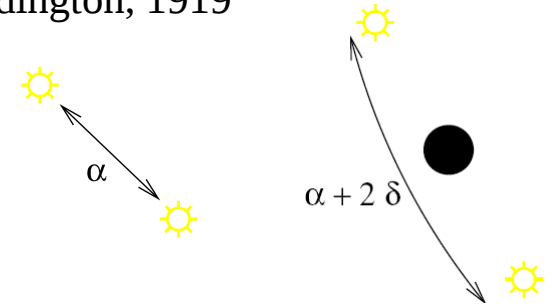


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

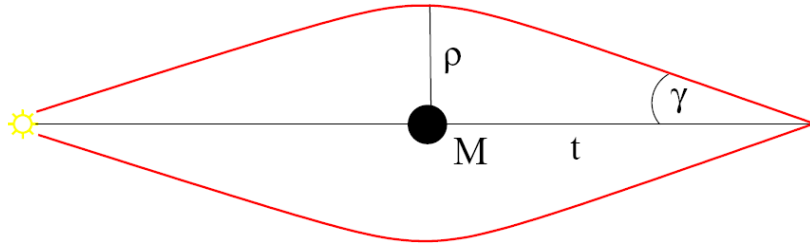
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919

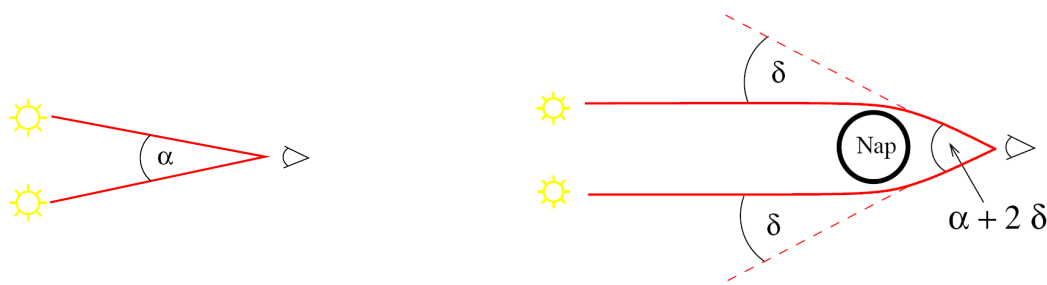


2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:

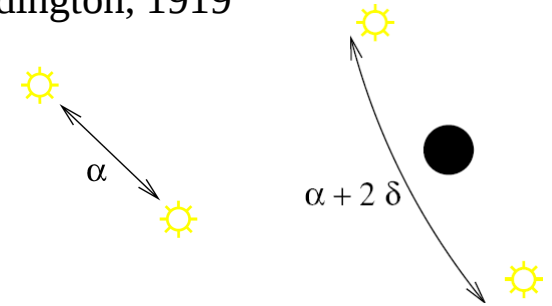


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

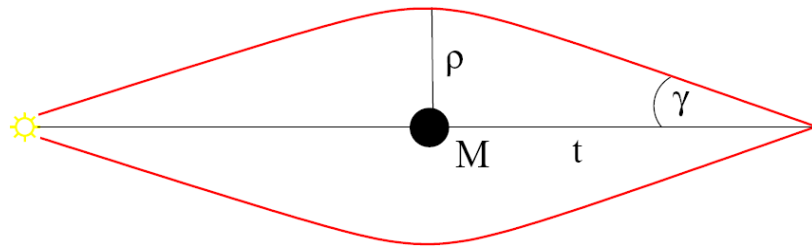
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\rho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



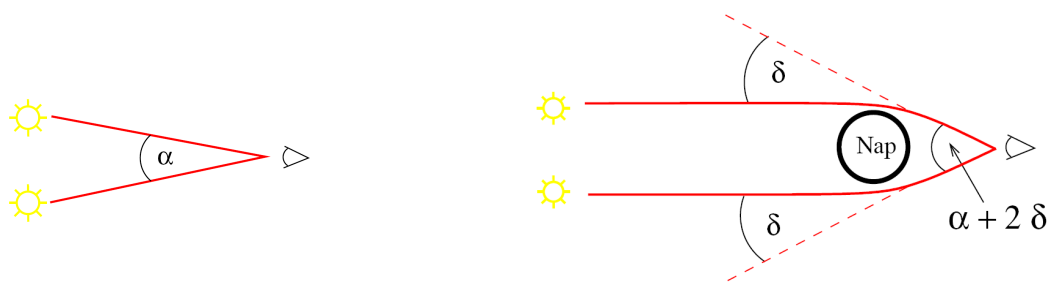
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



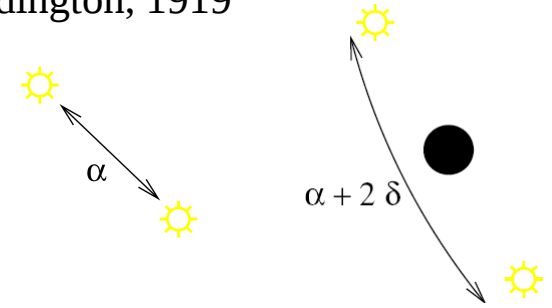
hengersizmetrikus helyzet

# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

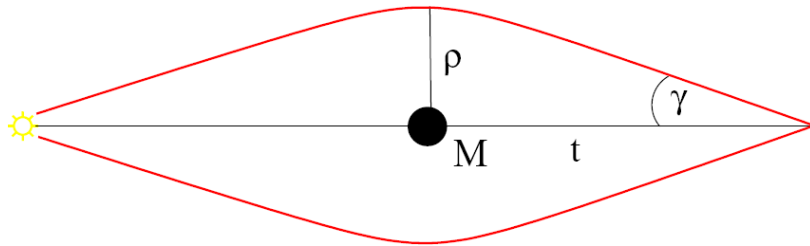
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



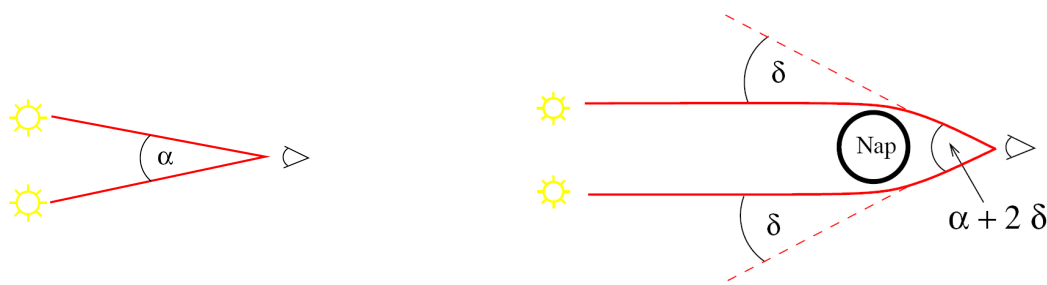
hengersizimetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

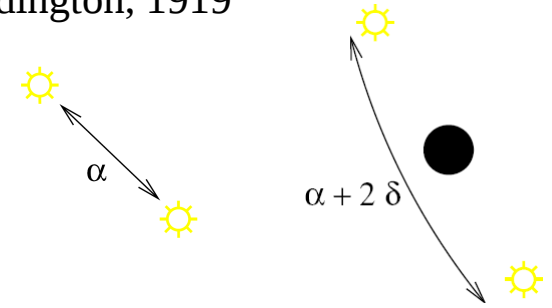


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

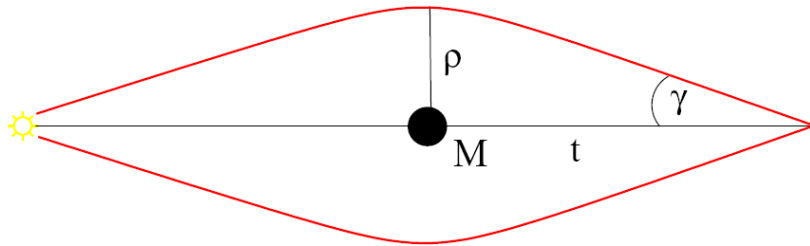
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



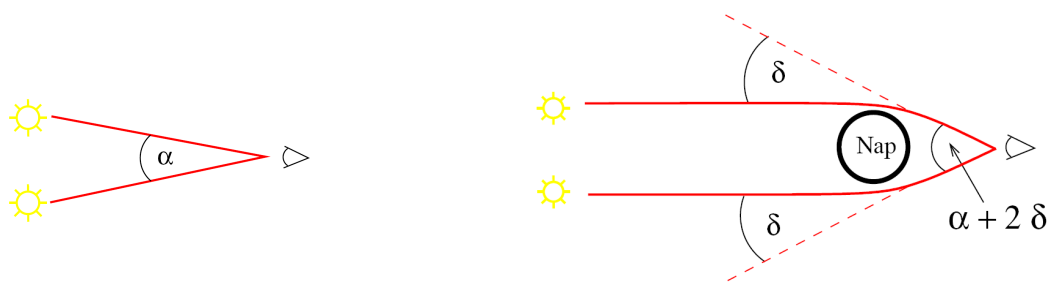
hengersizmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

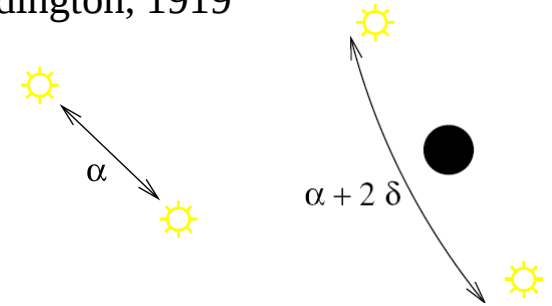
Einstein-gyűrű

# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

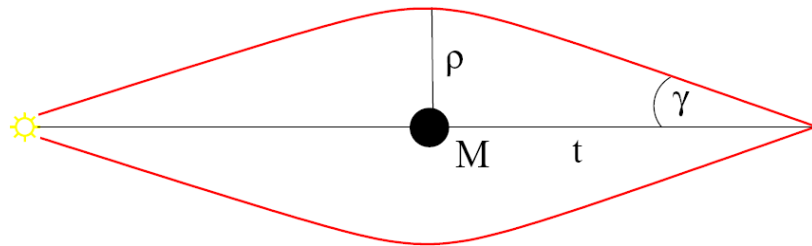
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



hengersizmetrikus helyzet

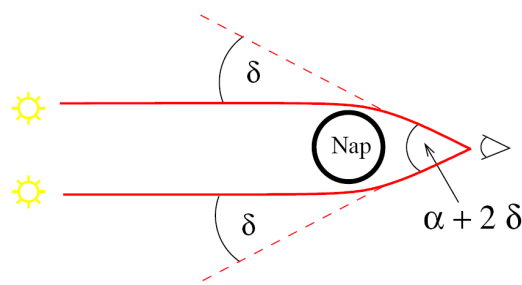
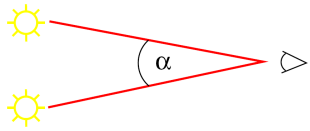
$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű

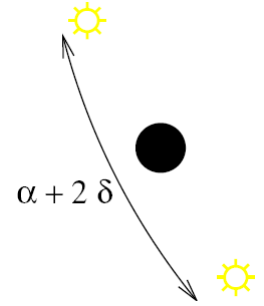
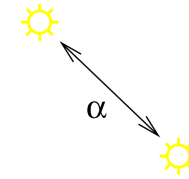


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

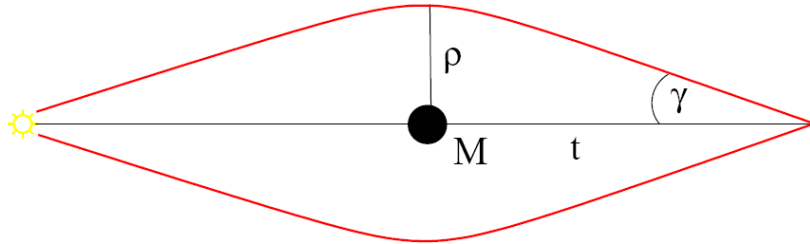
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



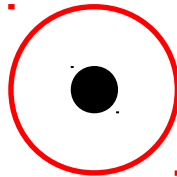
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



hengersizimmetrikus helyzet

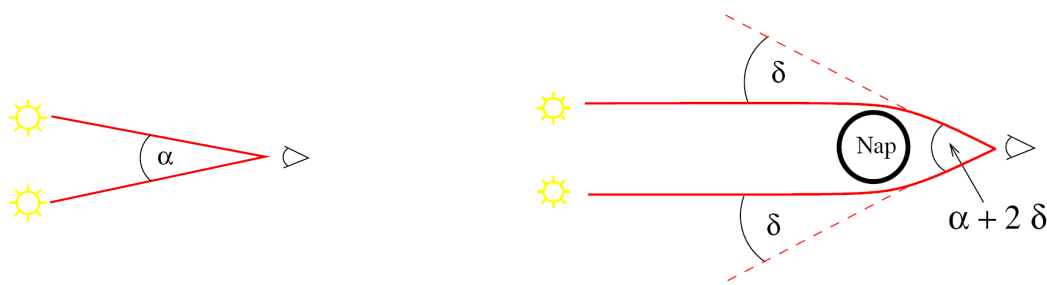
$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű

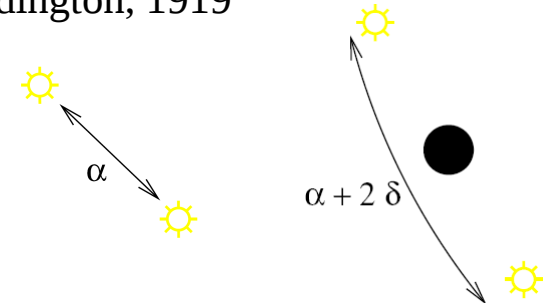


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

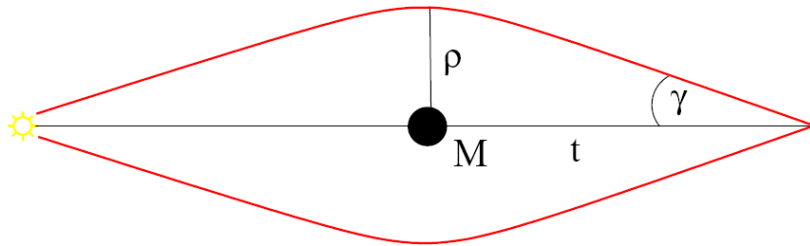
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



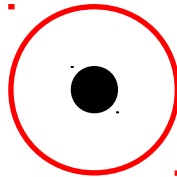
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



hengersizimmetrikus helyzet

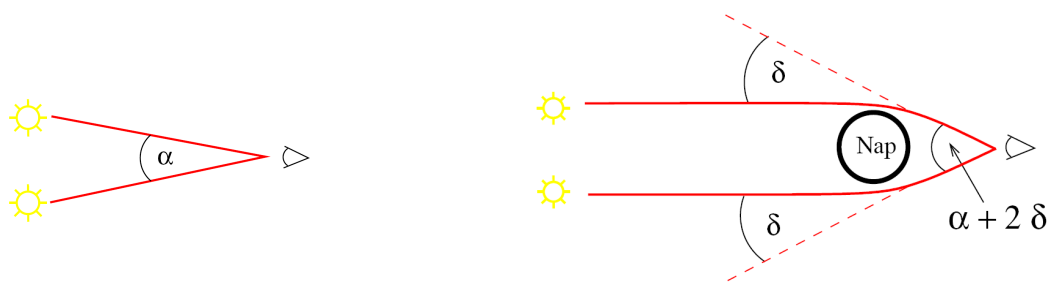
$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű  
fényes gyűrű

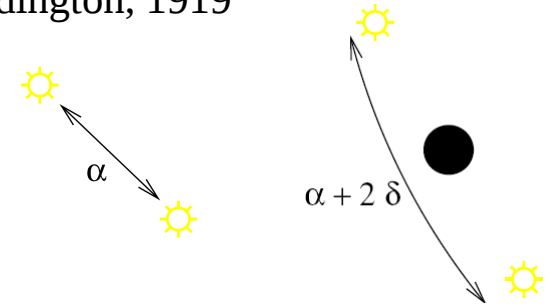


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

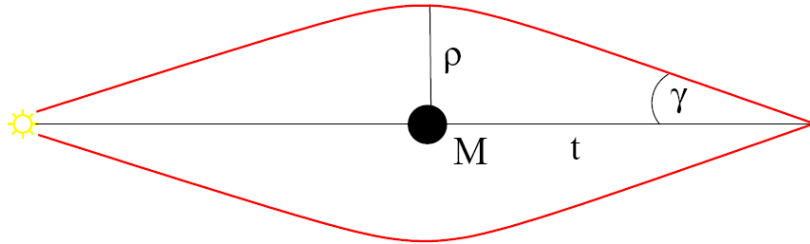
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



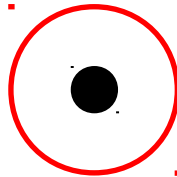
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



hengersizmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

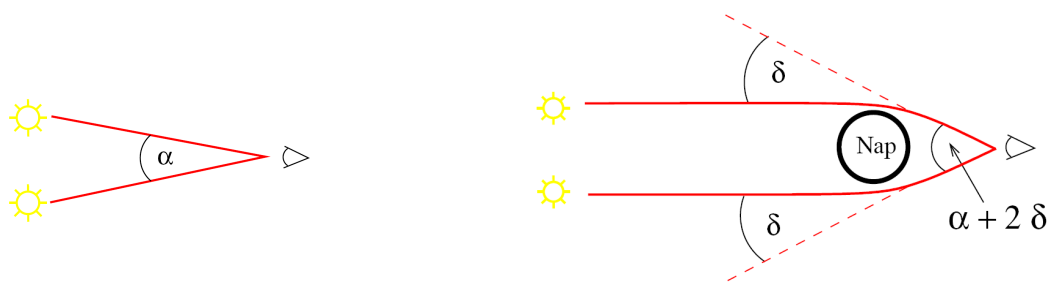
Einstein-gyűrű  
fényes gyűrű



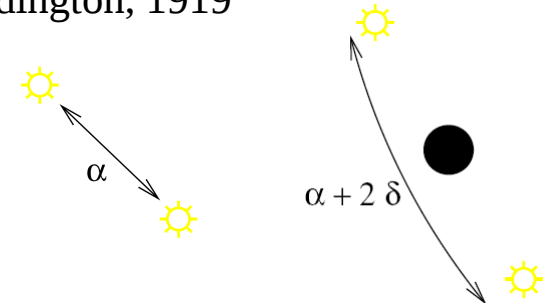
3) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengely mellett:

# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

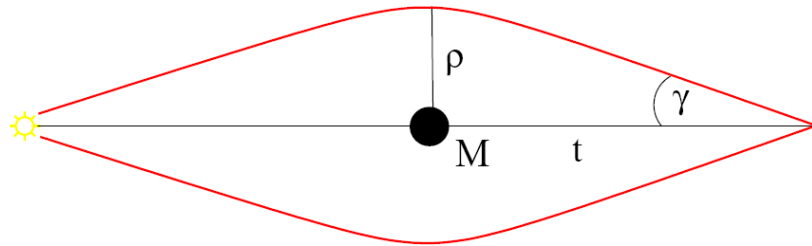
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



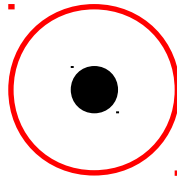
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



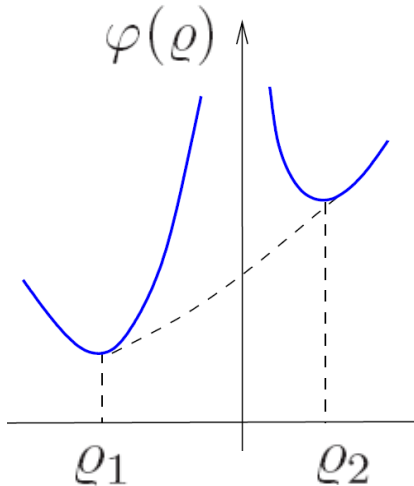
hengersizmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű  
fényes gyűrű

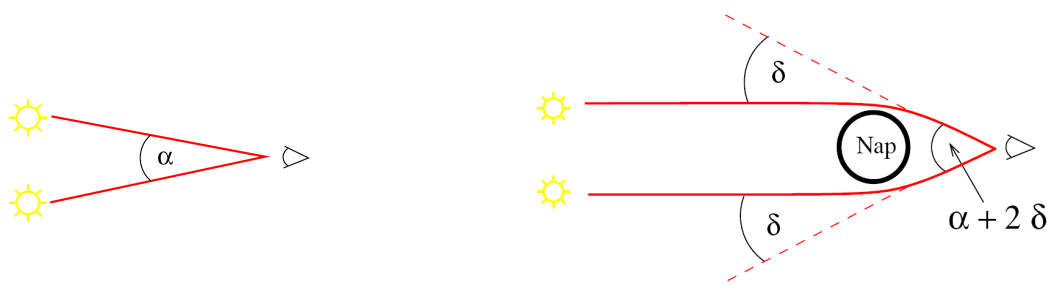


3) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengely mellett:

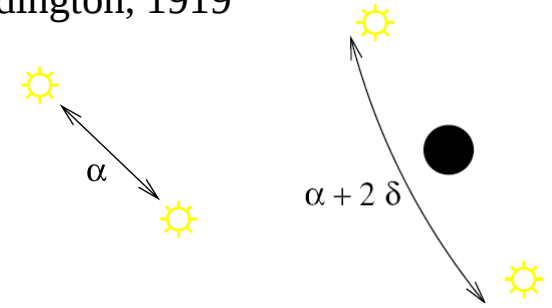


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

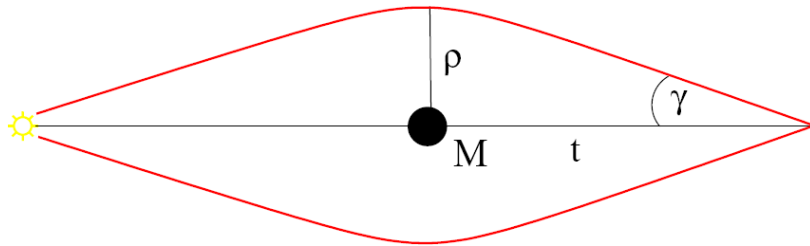
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



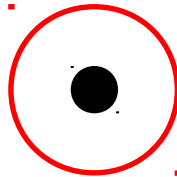
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



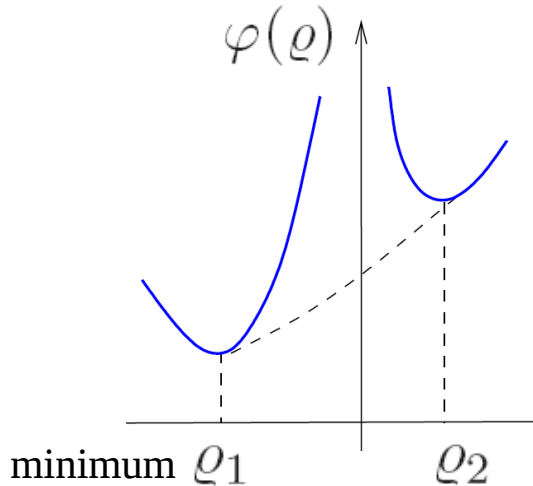
hengersizmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű  
fényes gyűrű

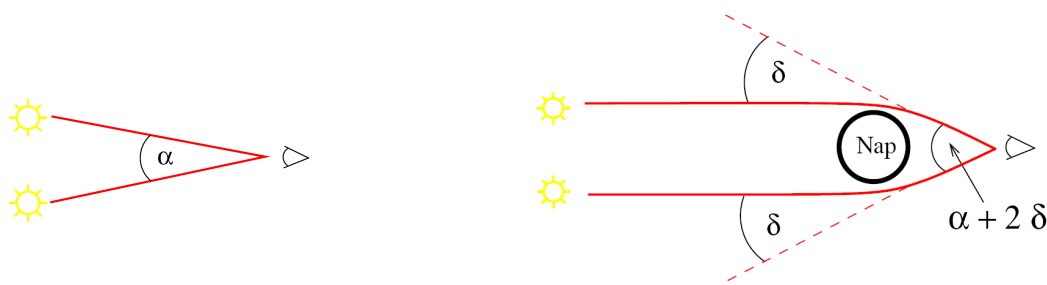


3) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengely mellett:

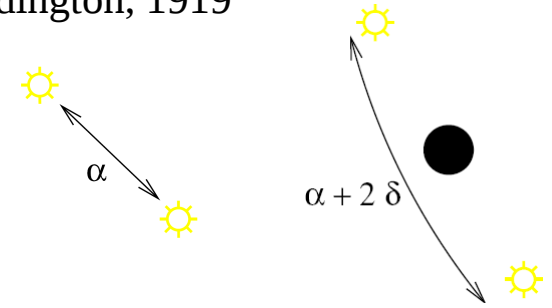


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

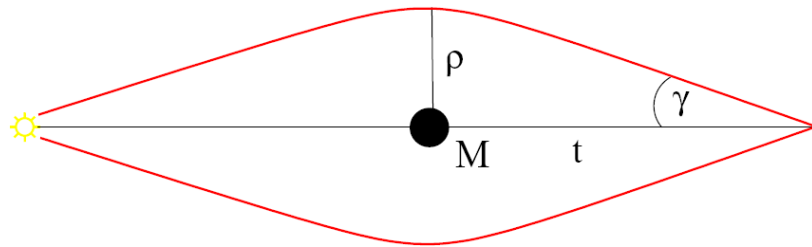
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



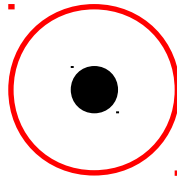
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



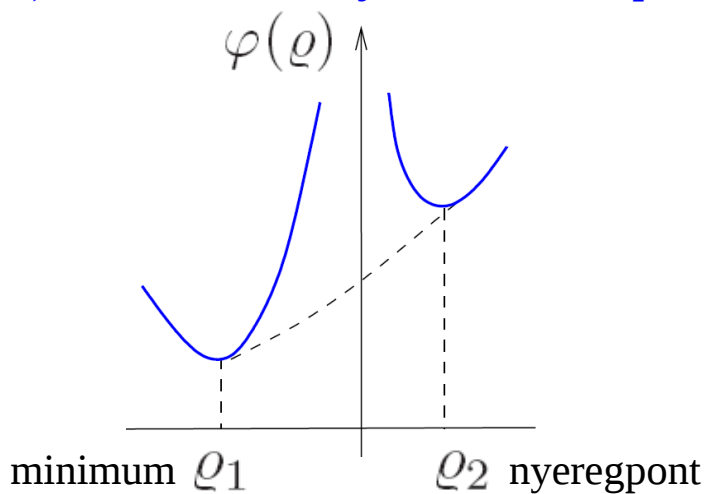
hengersizmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű  
fényes gyűrű



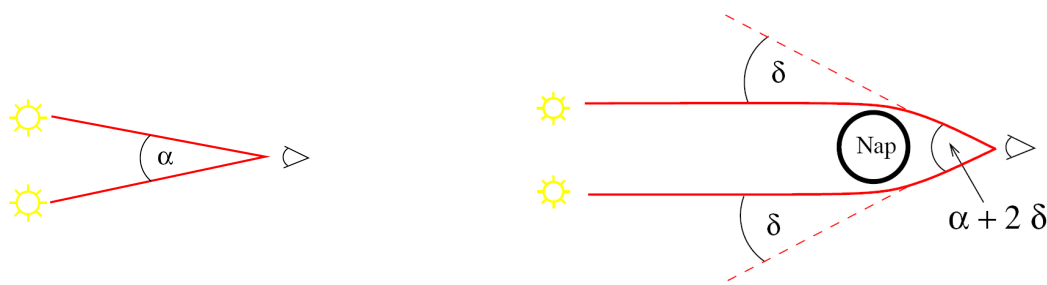
3) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengely mellett:



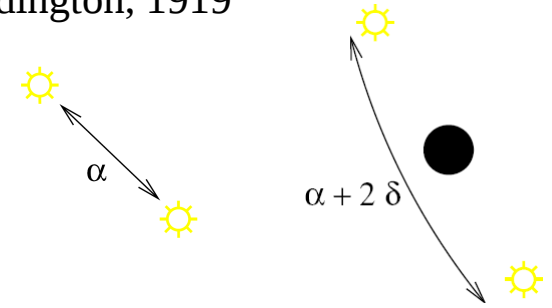


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

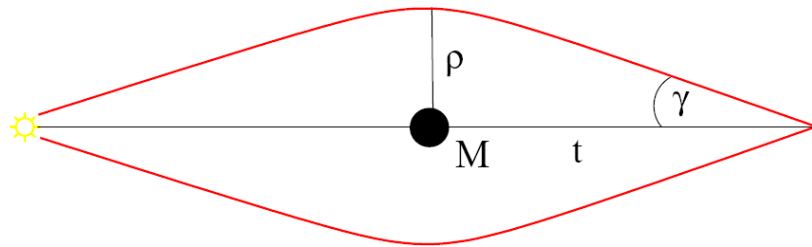
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



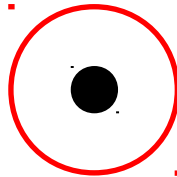
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



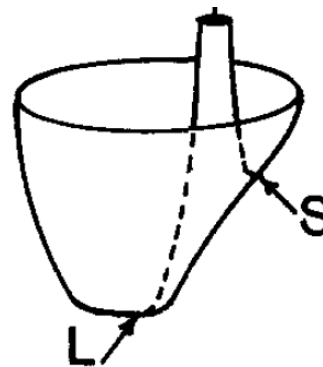
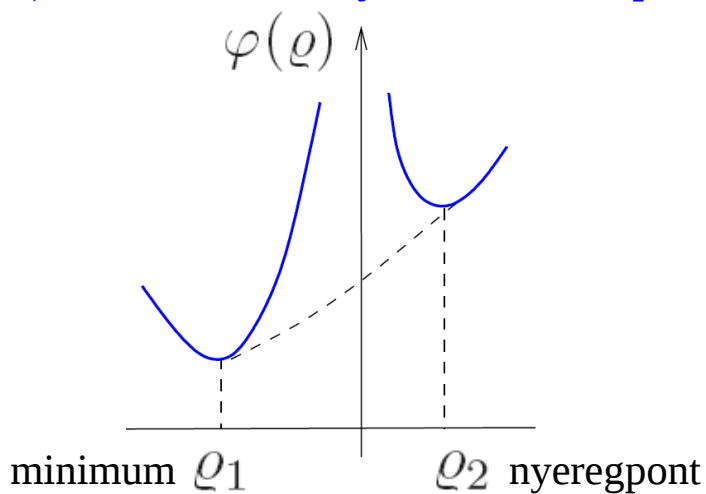
hengersizmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű  
fényes gyűrű

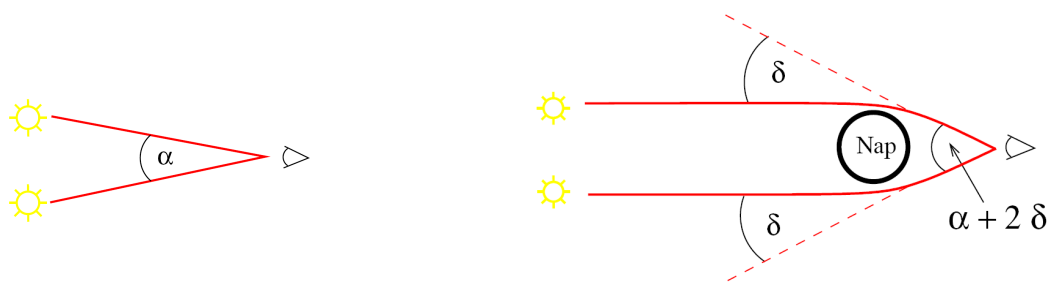


3) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengely mellett:

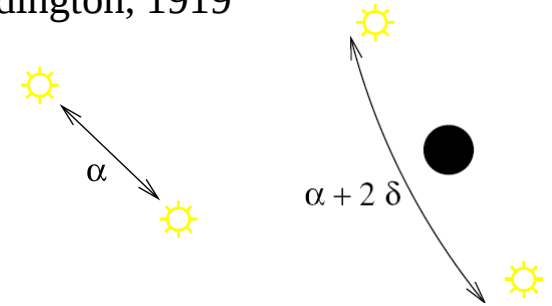


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

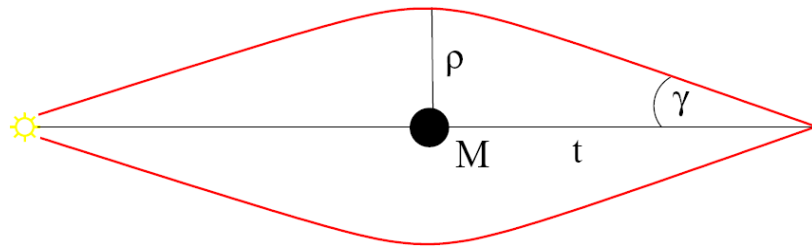
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



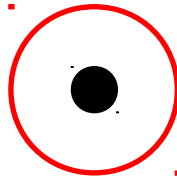
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



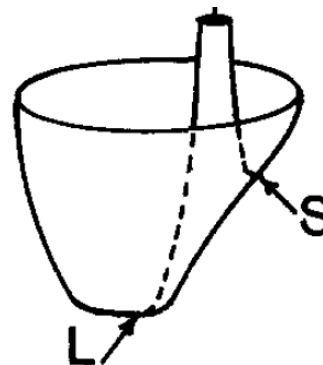
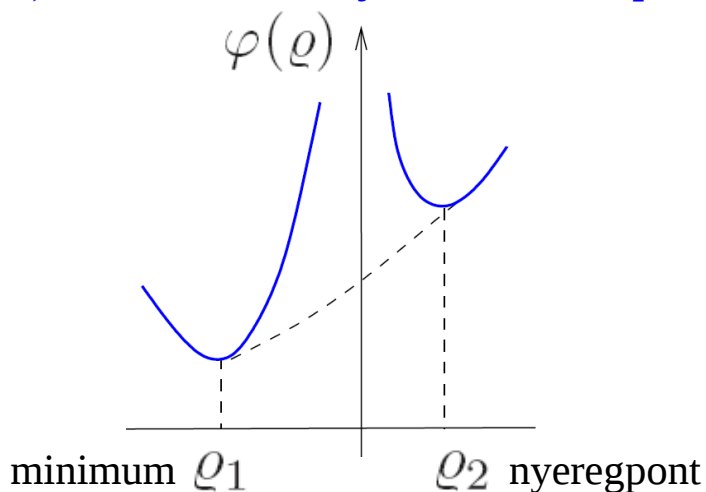
hengersizimmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű  
fényes gyűrű



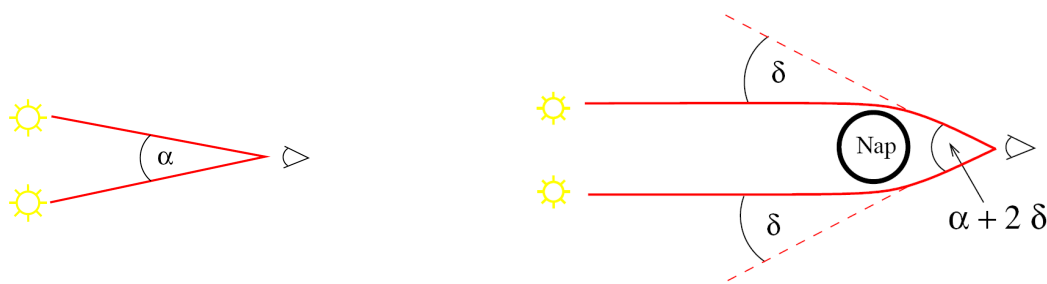
3) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengely mellett:



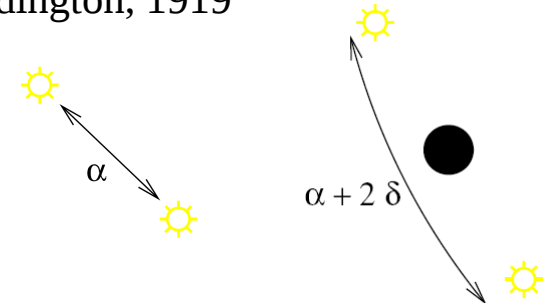
Két kép keletkezik!

# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

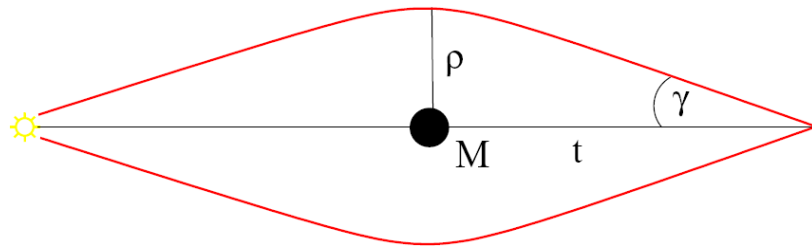
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



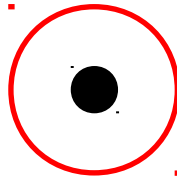
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



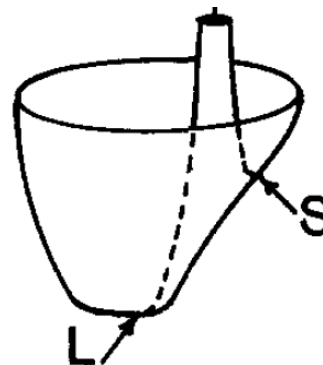
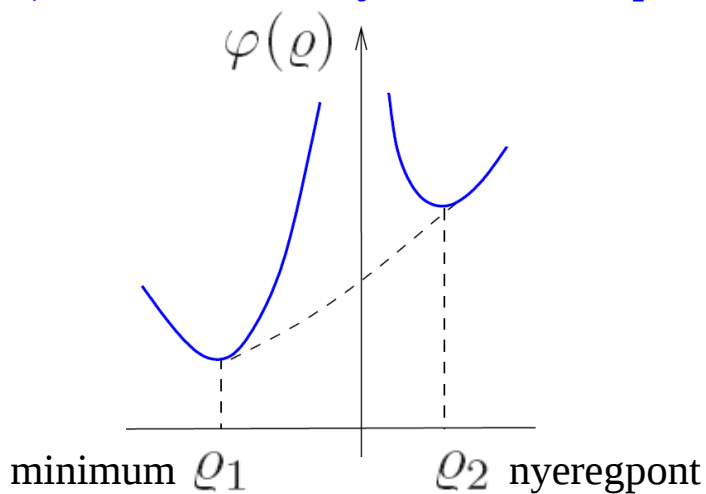
hengersizmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű  
fényes gyűrű



3) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengely mellett:

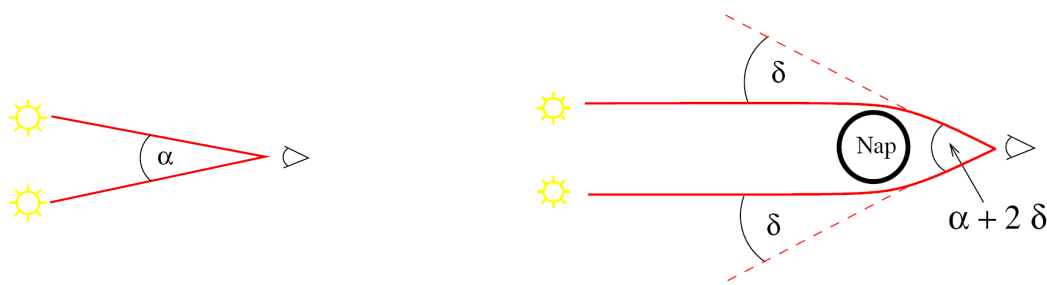


Két kép keletkezik!

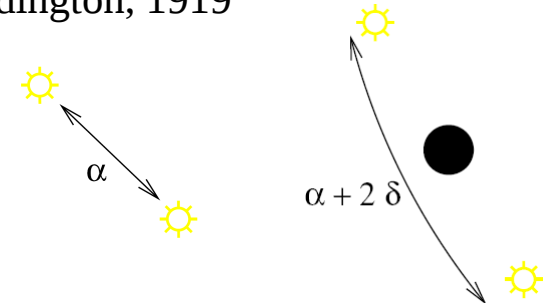


# Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

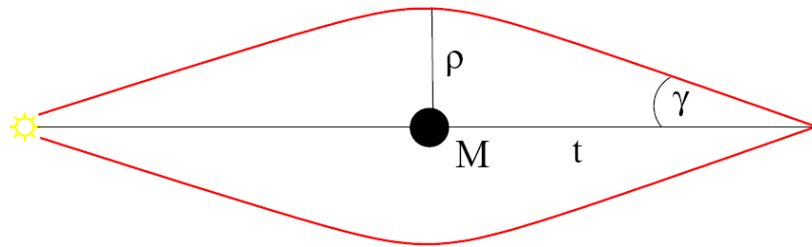
1) Fényelhajlás a Nap mellett:  $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető  
Eddington, 1919



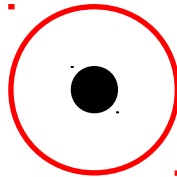
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



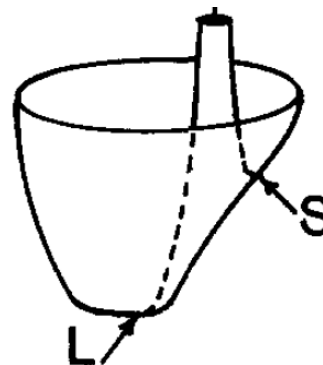
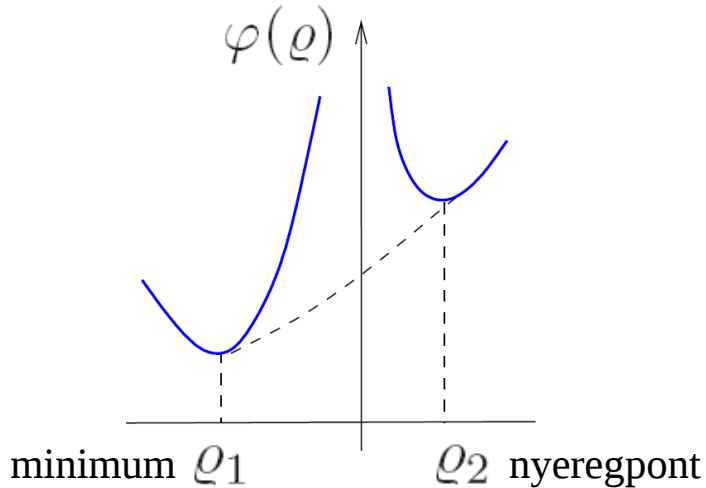
hengersizmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű  
fényes gyűrű



3) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengely mellett:



Két kép keletkezik!



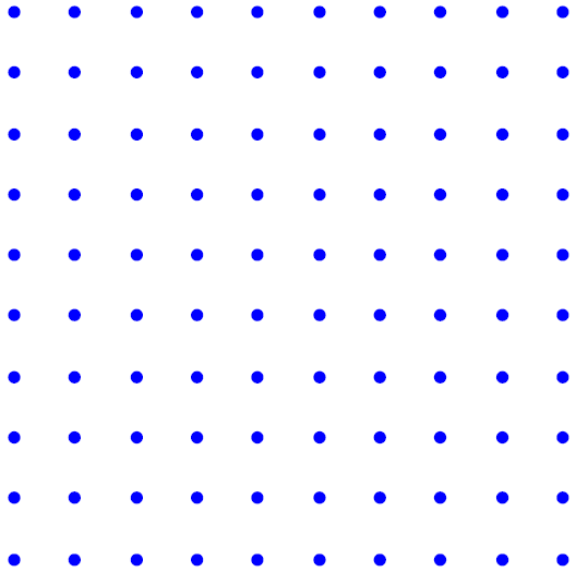
# Homogén sűrűségű gömb gravitációs lencsehatása

# Homogén sűrűségű gömb gravitációs lencsehatása

Négyzetrács torzulása

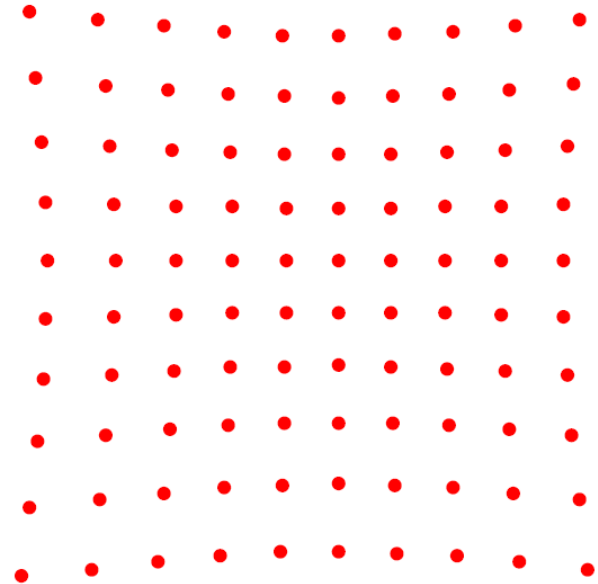
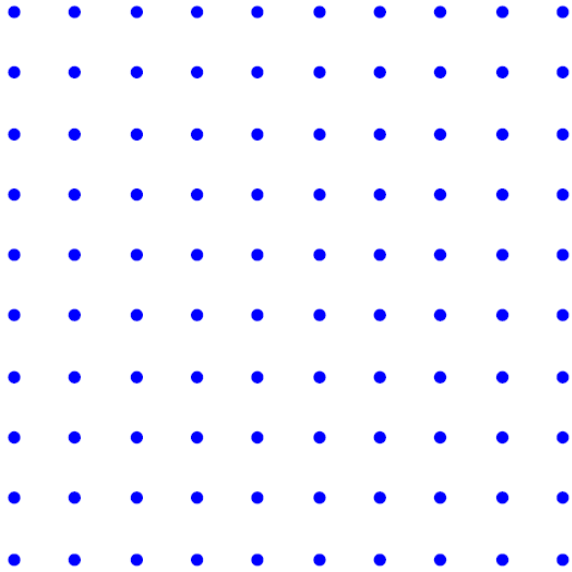
# Homogén sűrűségű gömb gravitációs lencsehatása

Négyzetrács torzulása



# Homogén sűrűségű gömb gravitációs lencsehatása

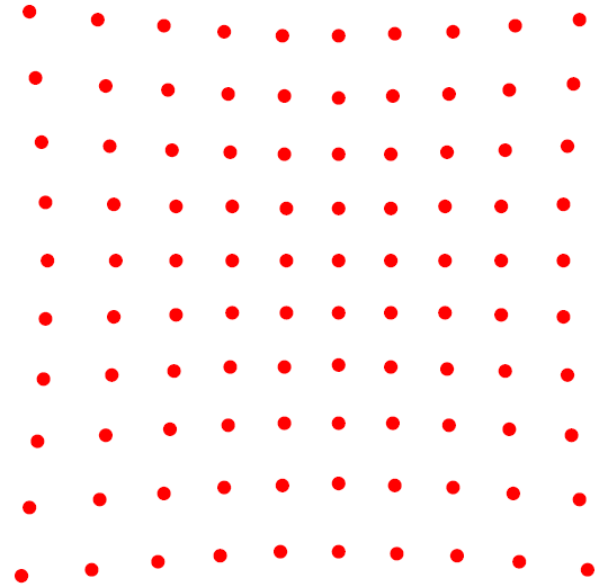
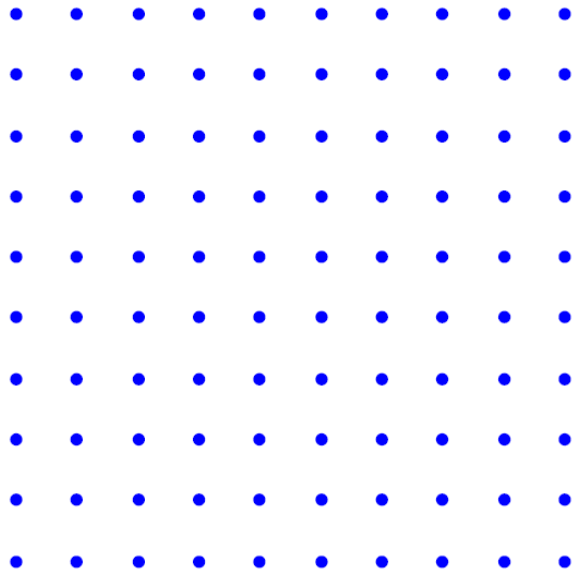
Négyzetrács torzulása

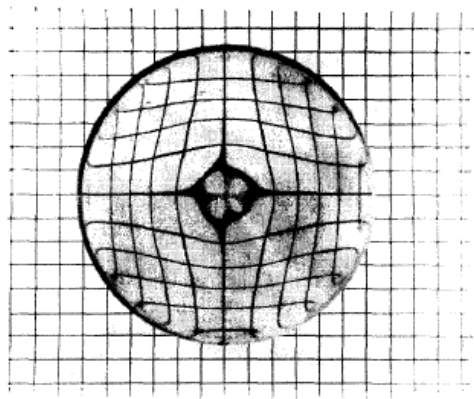


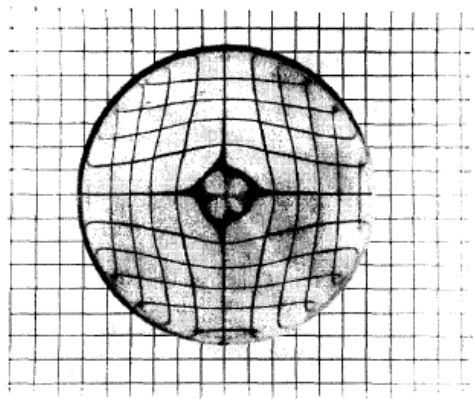


# Homogén sűrűségű gömb gravitációs lencsehatása

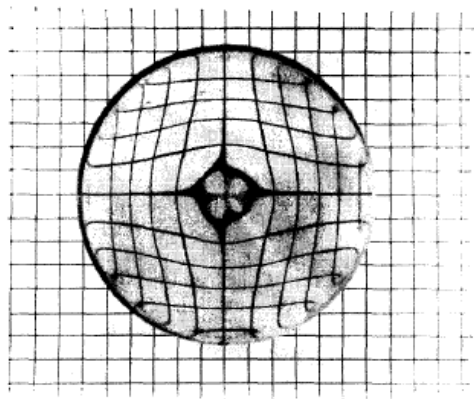
Négyzetrács torzulása





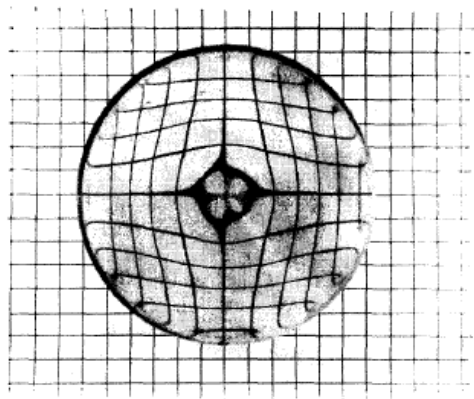


Logaritmiikus profilú műanyag lencse,  
R. J. Adler et al. AJP.63, 536 (1995)



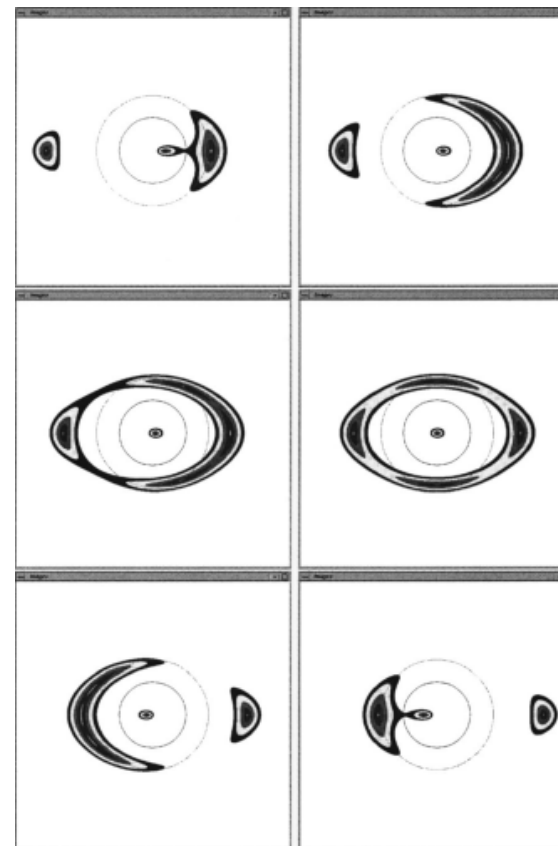
Logaritmusprofilú műanyag lencse,  
R. J. Adler et al. AJP.63, 536 (1995)

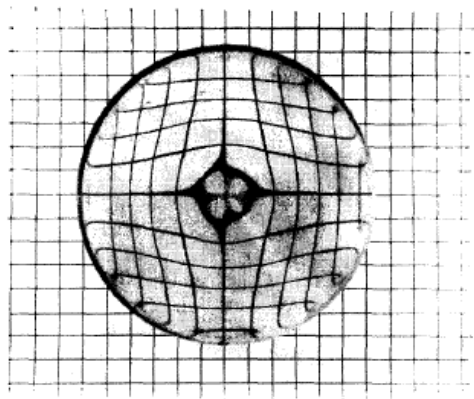
Gravitációs lencseleképezés számítógépes szimulációja,  
F. F. Alfaro AJP.69, 218 (2001)



Logaritmikus profilú műanyag lencse,  
R. J. Adler et al. AJP.63, 536 (1995)

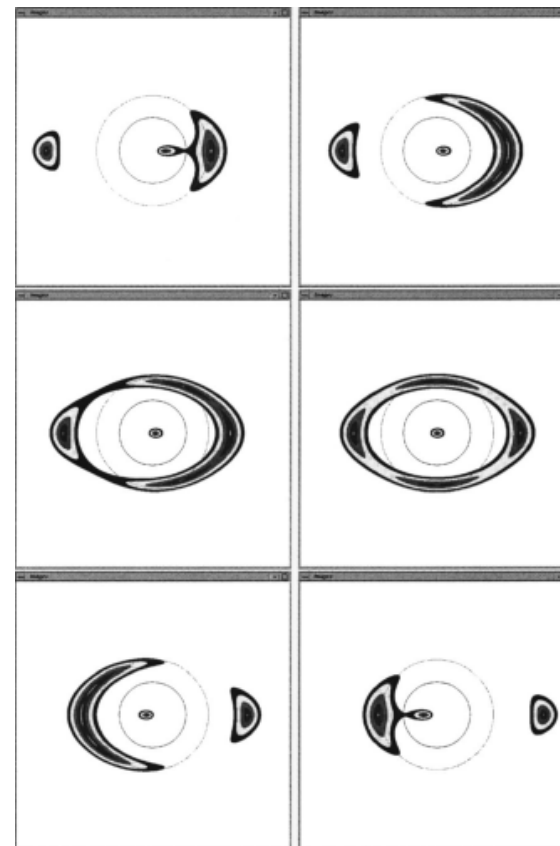
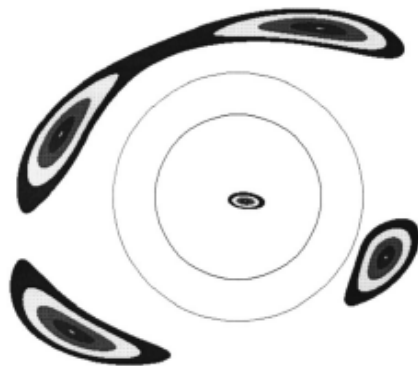
Gravitációs lencseleképezés számítógépes szimulációja,  
F. F. Alfaro AJP.69, 218 (2001)



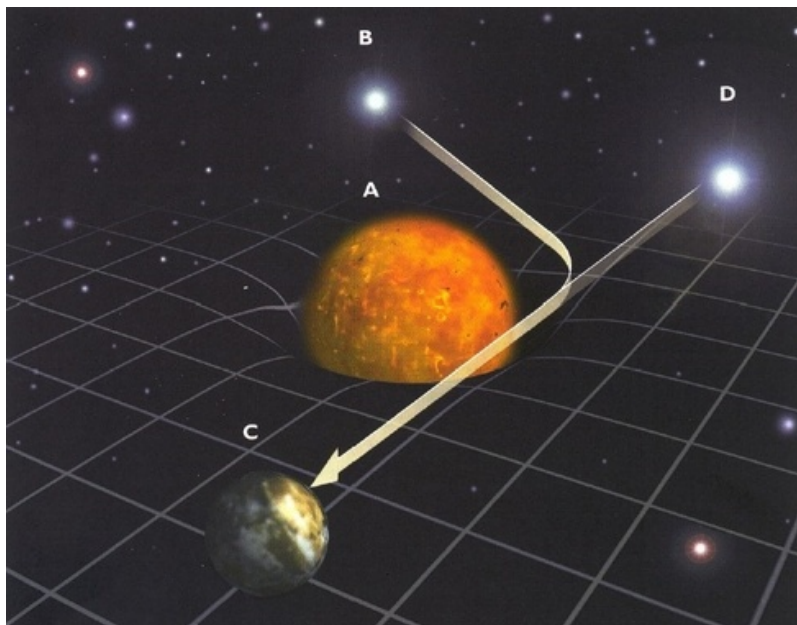


Logaritmikus profilú műanyag lencse,  
R. J. Adler et al. AJP.63, 536 (1995)

Gravitációs lencseleképezés számítógépes szimulációja,  
F. F. Alfaro AJP.69, 218 (2001)

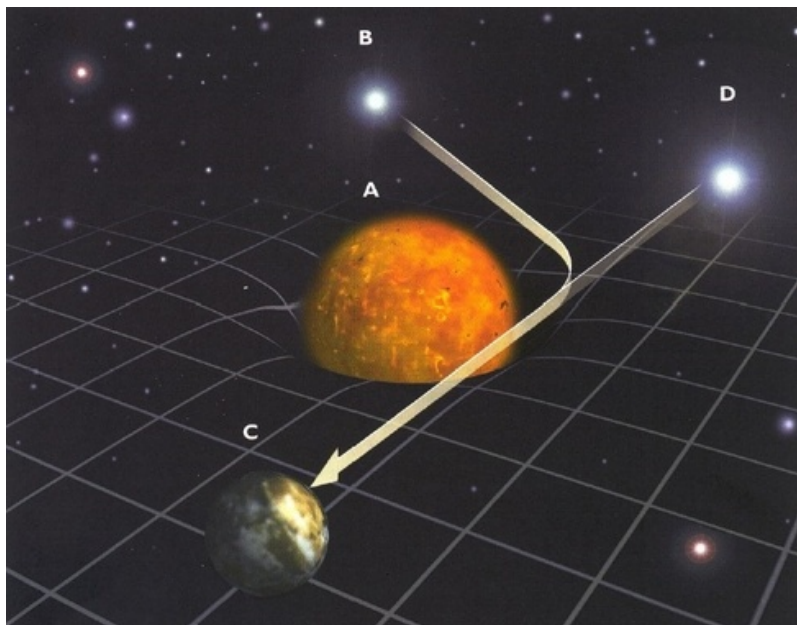


## Amikor a fény nem jó irányból érkezik



a nagy tömegű testek  
gravitációs hatása eltéríti a fénysugarat

## Amikor a fény nem jó irányból érkezik

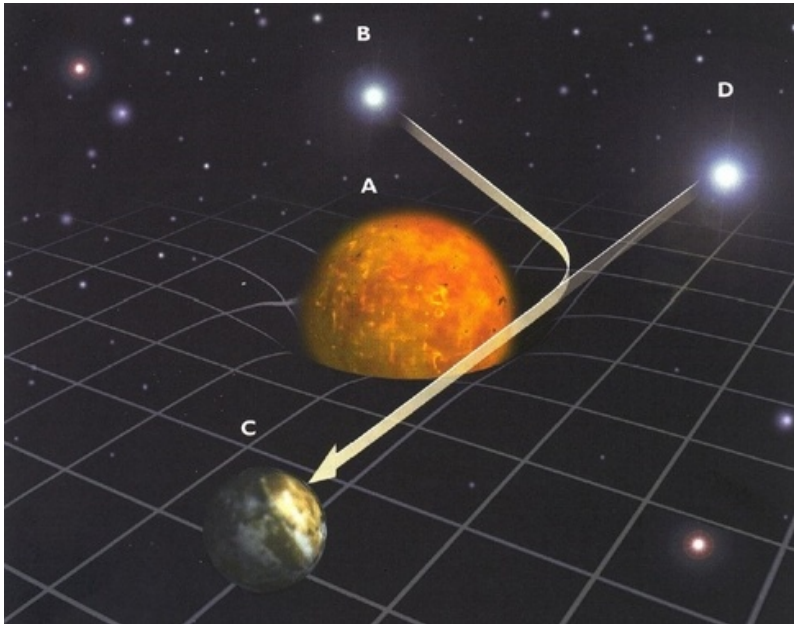


a nagy tömegű testek  
gravitációs hatása eltéríti a fénysugarat

ezért a pontszerű forrásokat rossz  
irányban látjuk



## Amikor a fény nem jó irányból érkezik

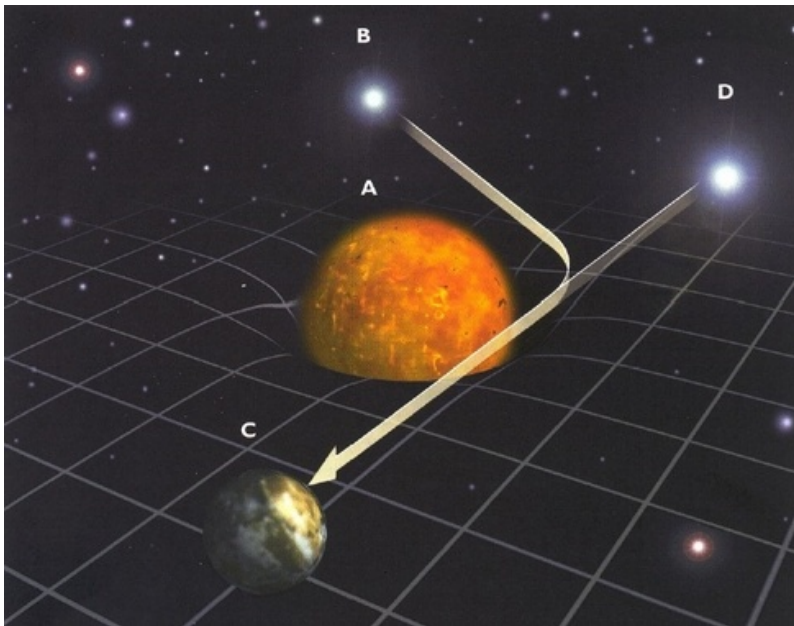


a nagy tömegű testek  
gravitációs hatása eltéríti a fénysugarat

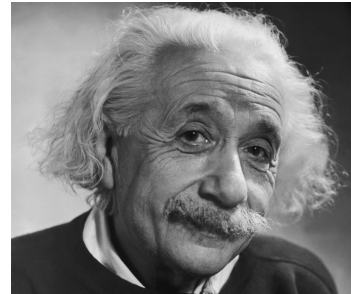
ezért a pontszerű forrásokat rossz  
irányban látjuk

a kiterjedt objektumok képe pedig  
eltorzul

## Amikor a fény nem jó irányból érkezik



ezt a jelenséget Einstein általános relativitáselmélete jósolta meg

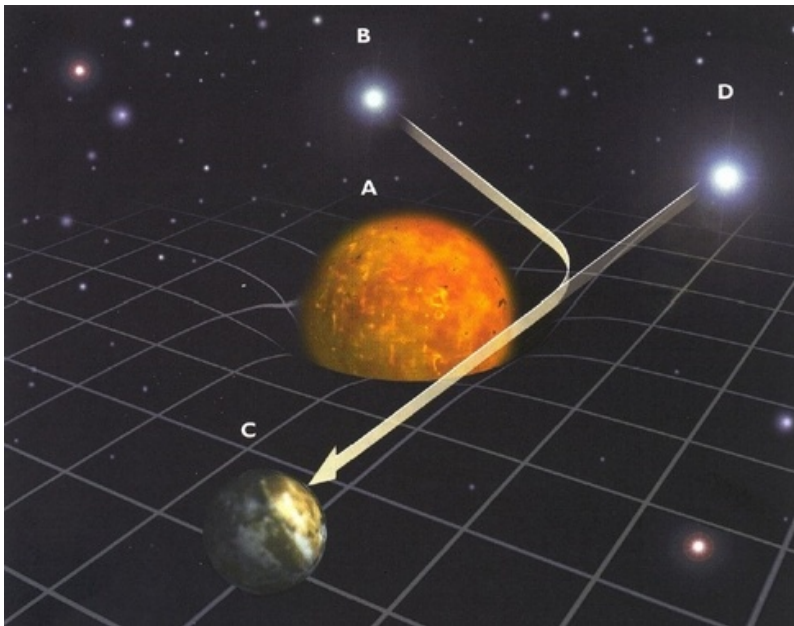


a nagy tömegű testek gravitációs hatása eltéríti a fénysugarat

ezért a pontszerű forrásokat rossz irányban látjuk

a kiterjedt objektumok képe pedig eltorzul

## Amikor a fény nem jó irányból érkezik

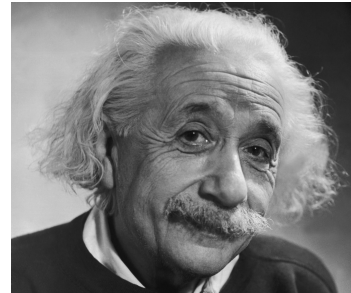


a nagy tömegű testek  
gravitációs hatása eltéríti a fénysugarat

ezért a pontszerű forrásokat rossz  
irányban látjuk

a kiterjedt objektumok képe pedig  
eltorzul

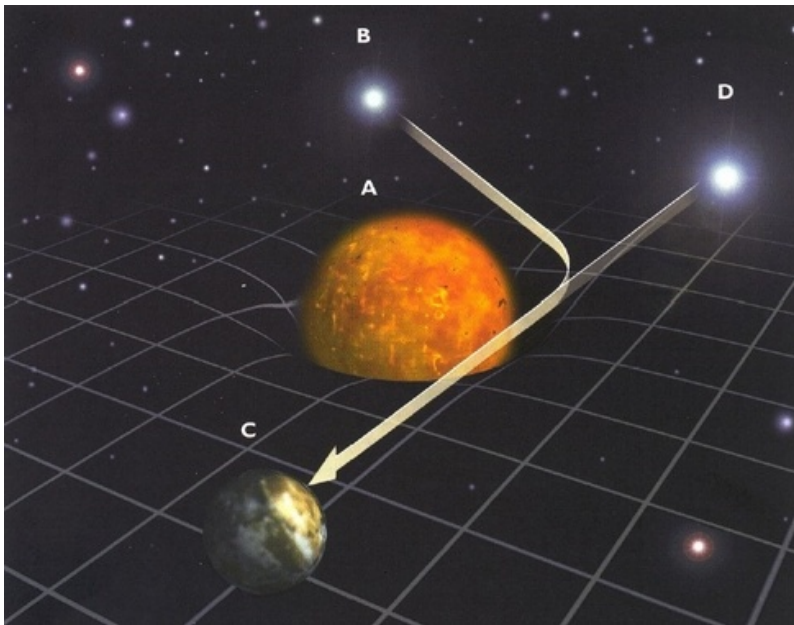
ezt a jelenséget Einstein általános  
relativitáselmélete jósolta meg



először Arthur Eddington  
mérte meg 1919-ben



## Amikor a fény nem jó irányból érkezik

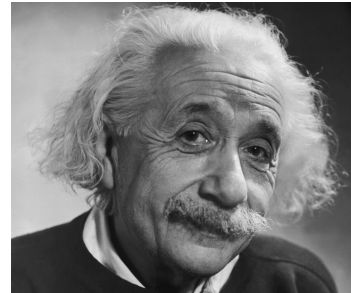


a nagy tömegű testek gravitációs hatása eltéríti a fénysugarat

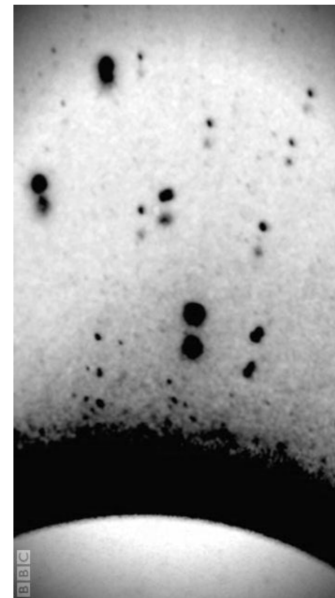
ezért a pontszerű forrásokat rossz irányban látjuk

a kiterjedt objektumok képe pedig eltorzul

ezt a jelenséget Einstein általános relativitáselmélete jósolta meg



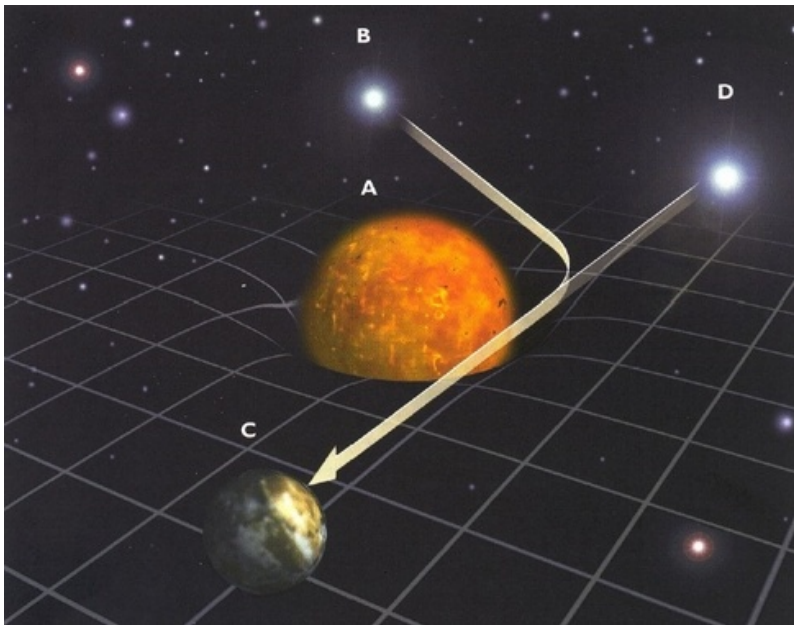
először Arthur Eddington mérte meg 1919-ben



csillagok képe eredeti és a Nap által eltérített pozícióban



## Amikor a fény nem jó irányból érkezik

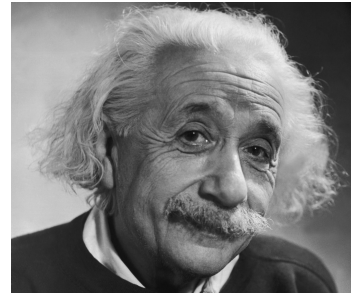


a nagy tömegű testek gravitációs hatása eltéríti a fénysugarat

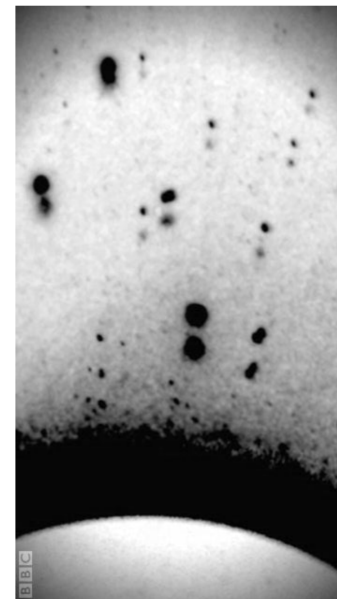
ezért a pontszerű forrásokat rossz irányban látjuk

a kiterjedt objektumok képe pedig eltorzul

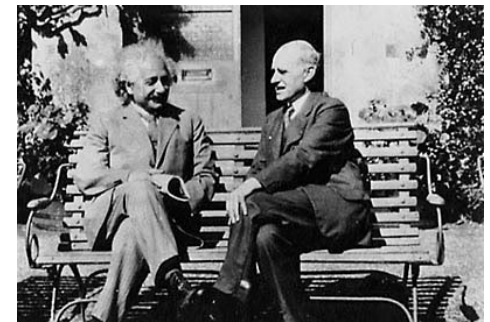
ezt a jelenséget Einstein általános relativitáselmélete jósolta meg



először Arthur Eddington mérte meg 1919-ben



csillagok képe eredeti és a Nap által eltérített pozícióban



ezt megbeszéltük!

# Amikor a fény nem jó irányból érkezik

példák a gravitációs lencsehatásra



# Amikor a fény nem jó irányból érkezik

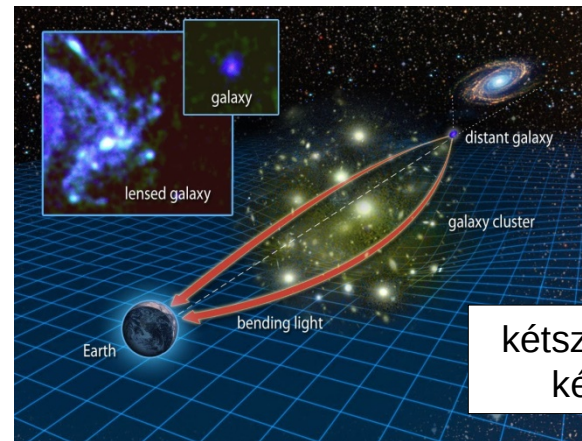
példák a gravitációs lencsehatásra

Einstein-  
gyűrű



# Amikor a fény nem jó irányból érkezik példák a gravitációs lencsehatásra

Einstein-  
gyűrű



kétszeres  
kép

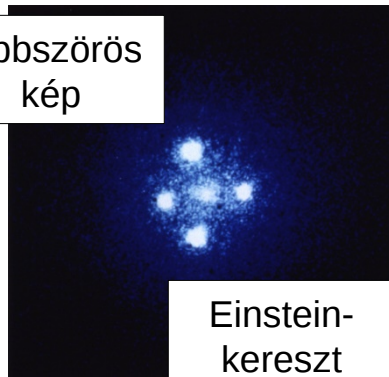


# Amikor a fény nem jó irányból érkezik példák a gravitációs lencsehatásra

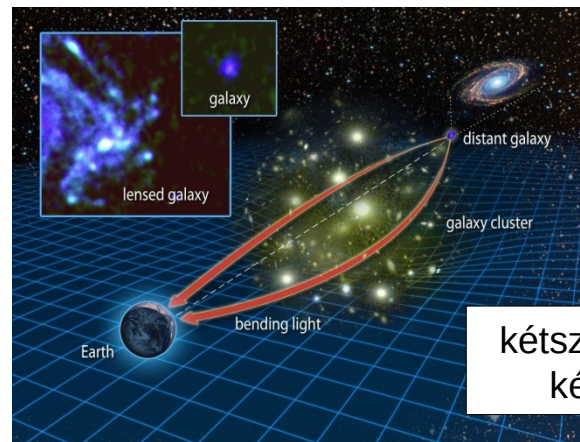
Einstein-  
gyűrű



többszörös  
kép



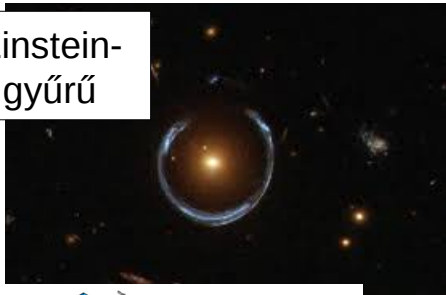
Einstein-  
kereszt



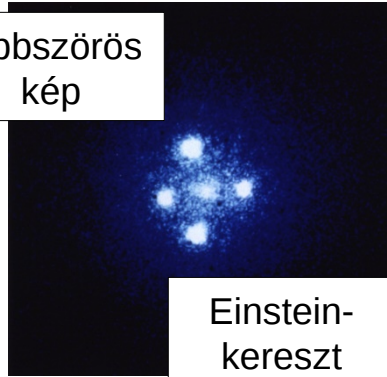
kétszeres  
kép

# Amikor a fény nem jó irányból érkezik példák a gravitációs lencsehatásra

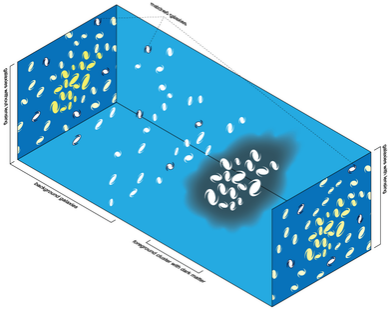
Einstein-  
gyűrű



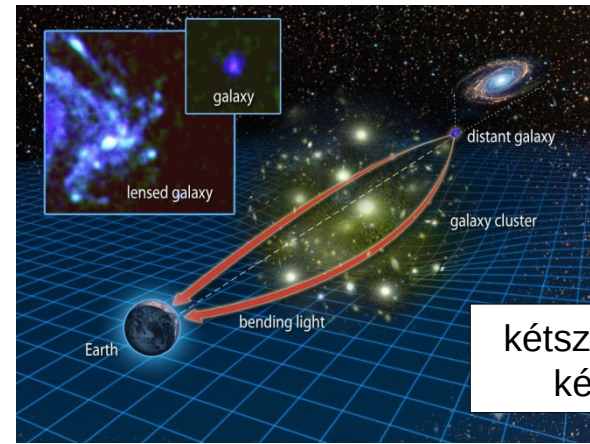
többszörös  
kép



Einstein-  
kereszt



a háttérgalaxisok  
ívessé torzítása



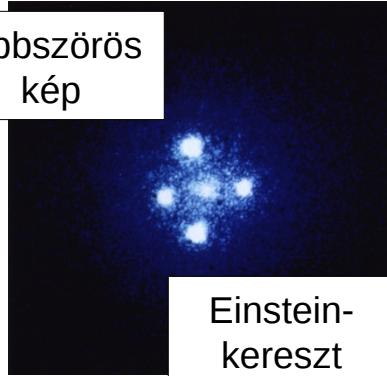
kétszeres  
kép

# Amikor a fény nem jó irányból érkezik példák a gravitációs lencsehatásra

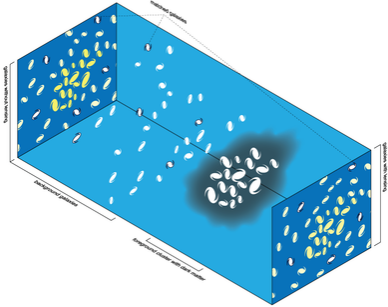
Einstein-  
gyűrű



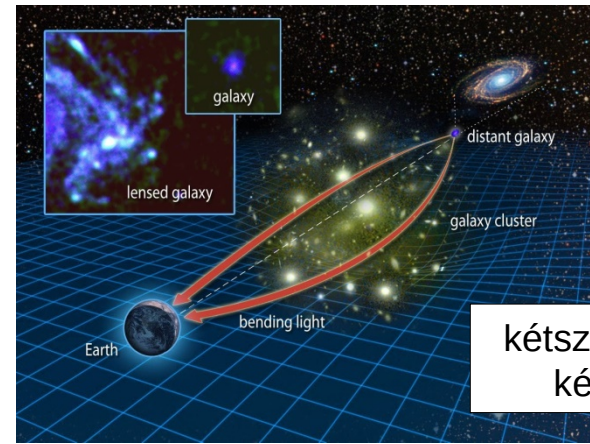
többszörös  
kép



Einstein-  
kereszt



a háttérgalaxisok  
ívéssé torzítása



kétszeres  
kép

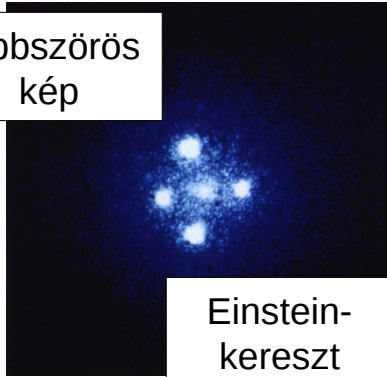


# Amikor a fény nem jó irányból érkezik példák a gravitációs lencsehatásra

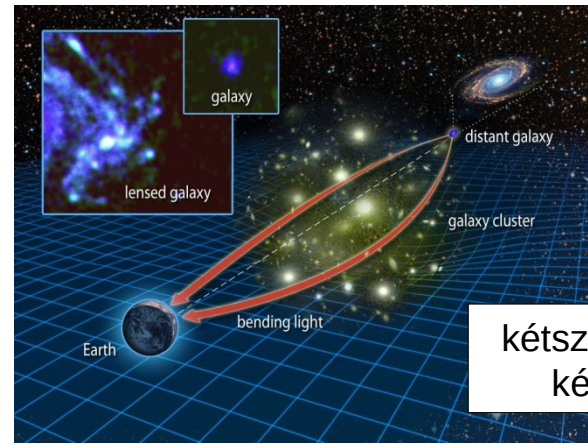
Einstein-  
gyűrű



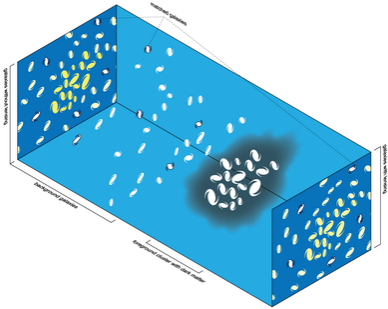
többszörös  
kép



Einstein-  
kereszt



kétszeres  
kép



a háttérgalaxisok  
ívessé torzítása

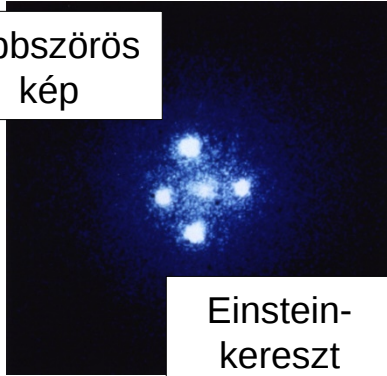


# Amikor a fény nem jó irányból érkezik példák a gravitációs lencsehatásra

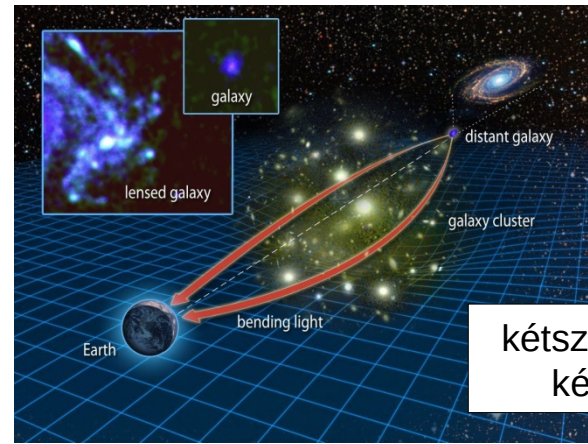
Einstein-  
gyűrű



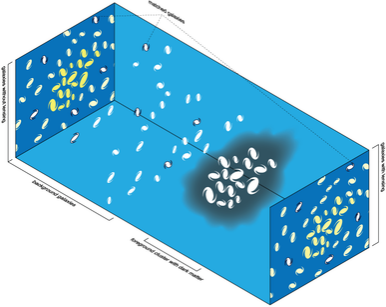
többszörös  
kép



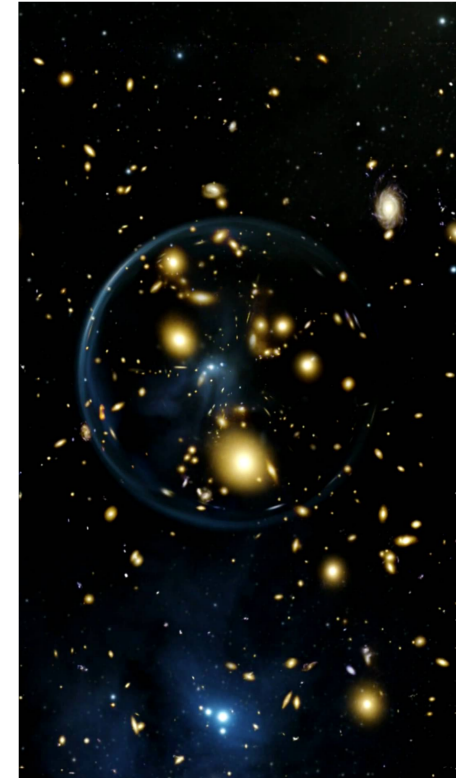
Einstein-  
kereszt



kétszeres  
kép



a háttérgalaxisok  
ívessé torzítása



# Amikor a fény nem jó irányból érkezik



**Amikor a fény nem jó irányból érkezik**

**...és ezért azt is látjuk,  
amit nem láthatunk**



**Amikor a fény nem jó irányból érkezik**

**...és ezért azt is látjuk,  
amit nem láthatunk**

Az Univerzum anyagának kb. 24 %-a

**sötét anyag**





**Amikor a fény nem jó irányból érkezik**

**...és ezért azt is látjuk,  
amit nem láthatunk**

Az Univerzum anyagának kb. 24 %-a

**sötét anyag**

A sötét anyag nem bocsát ki fényt,  
tehát nem látható



**Amikor a fény nem jó irányból érkezik**

**...és ezért azt is látjuk,  
amit nem láthatunk**

Az Univerzum anyagának kb. 24 %-a

**sötét anyag**

A sötét anyag nem bocsát ki fényt,  
tehát nem látható

csak gravitációs hatása észlelhető



**Amikor a fény nem jó irányból érkezik**

**...és ezért azt is látjuk,  
amit nem láthatunk**

Az Univerzum anyagának kb. 24 %-a

**sötét anyag**

A sötét anyag nem bocsát ki fényt,  
tehát nem látható

csak gravitációs hatása észlelhető

**de gravitációja eltéríti  
más objektumok  
fényét!**



# Amikor a fény nem jó irányból érkezik

...és ezért azt is látjuk,  
amit nem láthatunk

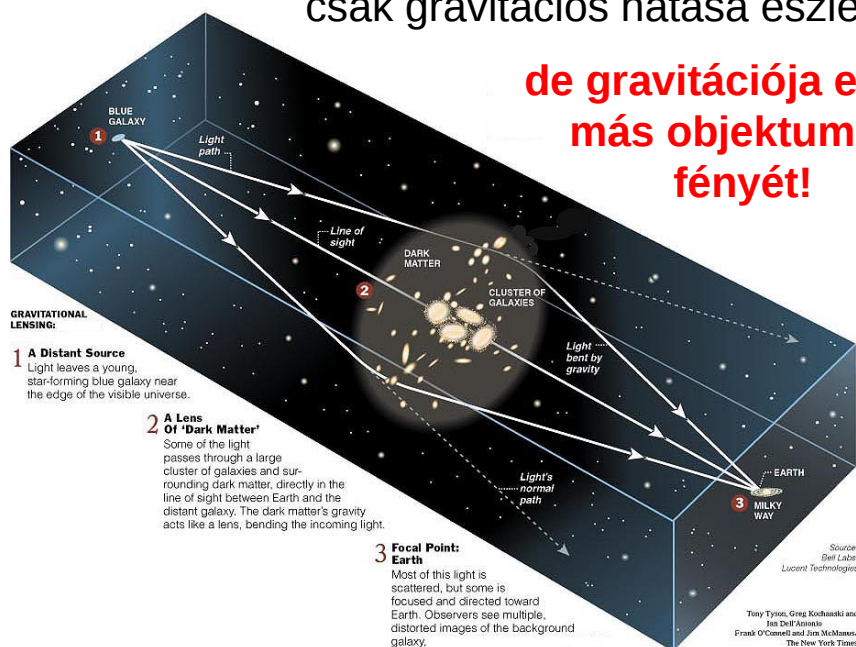
Az Univerzum anyagának kb. 24 %-a

**sötét anyag**

A sötét anyag nem bocsát ki fényt,  
tehát nem látható

csak gravitációs hatása érzelhető

**de gravitációja eltéríti  
más objektumok  
fényét!**



# Amikor a fény nem jó irányból érkezik

...és ezért azt is látjuk,  
amit nem láthatunk

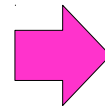
Az Univerzum anyagának kb. 24 %-a

**sötét anyag**

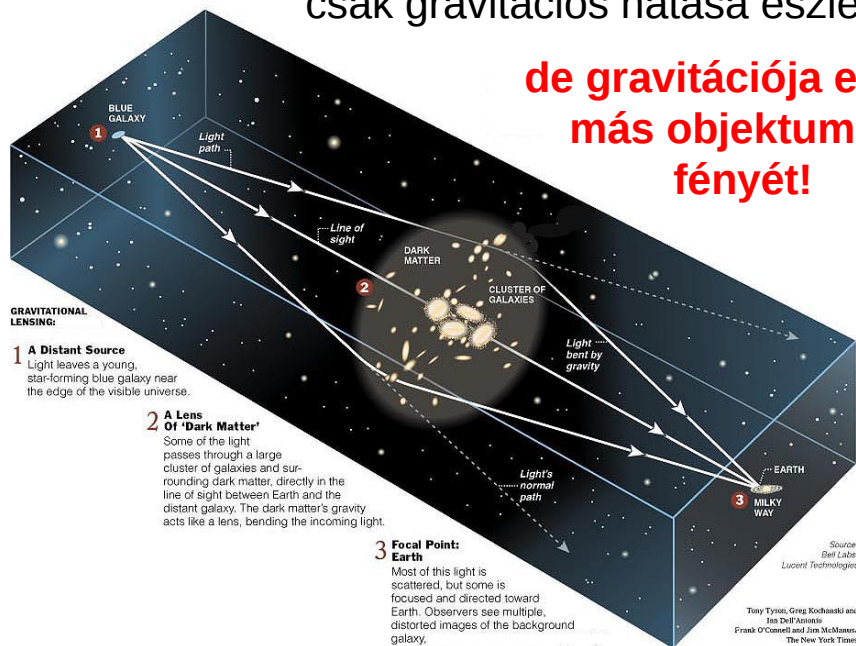
A sötét anyag nem bocsát ki fényt,  
tehát nem látható

csak gravitációs hatása észlelhető

**de gravitációja eltéríti  
más objektumok  
fényét!**



**a láthatatlan sötét anyag  
eloszlásának feltérképezése**



# Amikor a fény nem jó irányból érkezik

...és ezért azt is látjuk,  
amit nem láthatunk

Az Univerzum anyagának kb. 24 %-a

**sötét anyag**

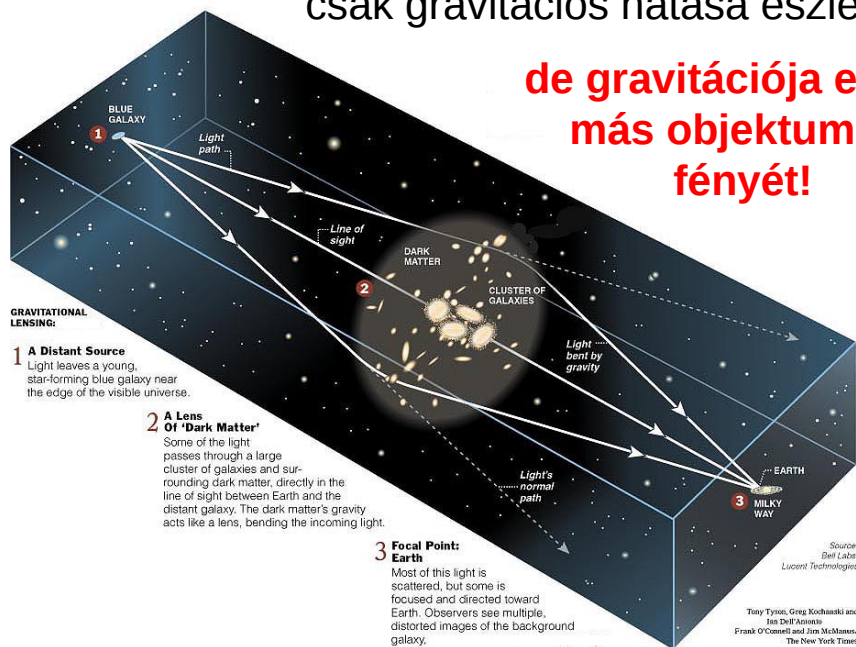
A sötét anyag nem bocsát ki fényt,  
tehát nem látható

csak gravitációs hatása észlelhető

**de gravitációja eltéríti  
más objektumok  
fényét!**



**a láthatatlan sötét anyag  
eloszlásának feltérképezése**





# Amikor a fény nem jó irányból érkezik

...és ezért azt is látjuk,  
amit nem láthatunk

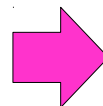
Az Univerzum anyagának kb. 24 %-a

**sötét anyag**

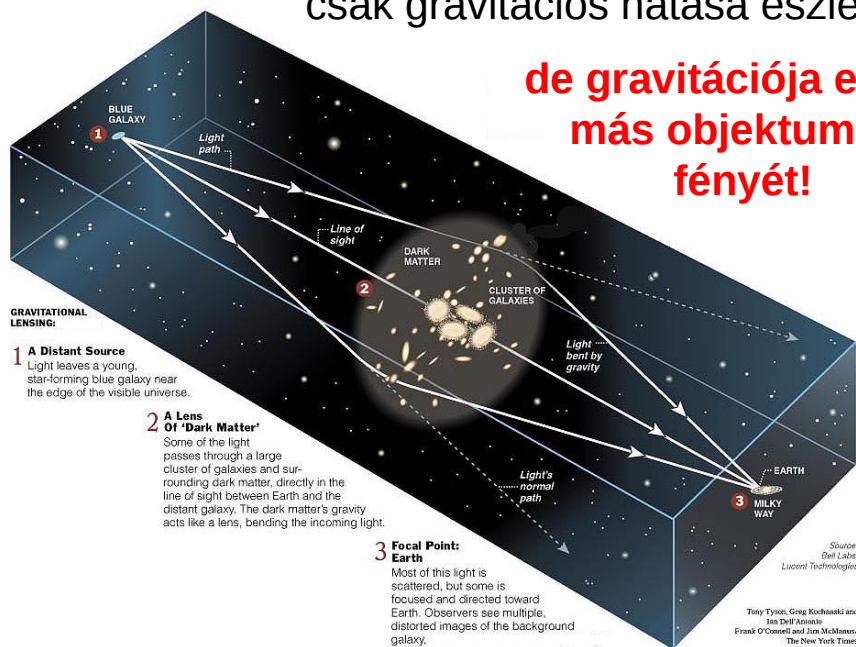
A sötét anyag nem bocsát ki fényt,  
tehát nem látható

csak gravitációs hatása észlelhető

**de gravitációja eltéríti  
más objektumok  
fényét!**



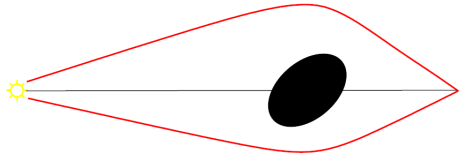
**a láthatatlan sötét anyag  
eloszlásának feltérképezése**



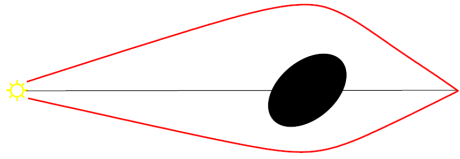
4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:

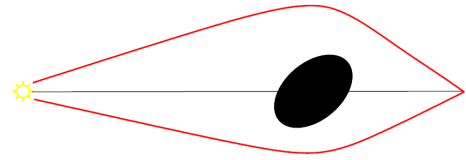


#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



nem hengersizmetrikus

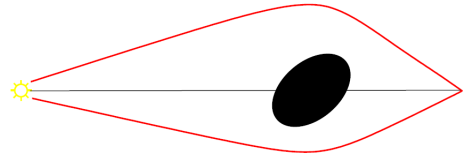
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



nem hengerszimmetrikus

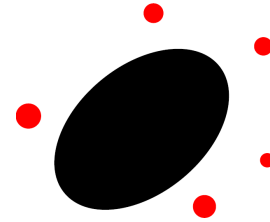
Többszörös, torz képalkotás

#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:

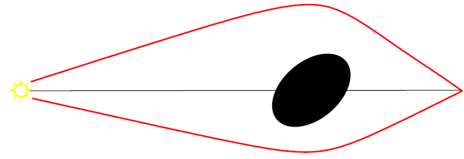


nem hengersizmetrikus

Többszörös, torz képalkotás

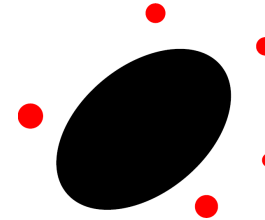


#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



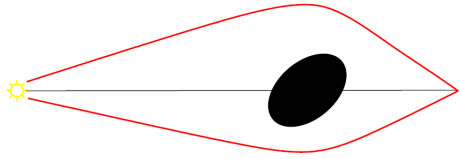
nem hengersizmetrikus

Többszörös, torz képalkotás



ugyanannak a távoli  
objektumnak a képei!

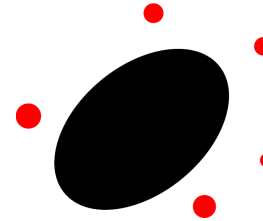
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



nem hengersizmetrikus

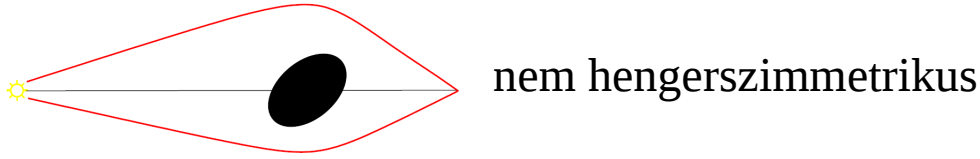
Honnan tudjuk?

Többszörös, torz képalkotás



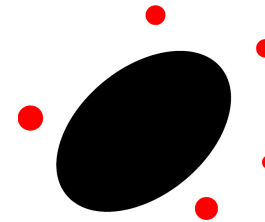
ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



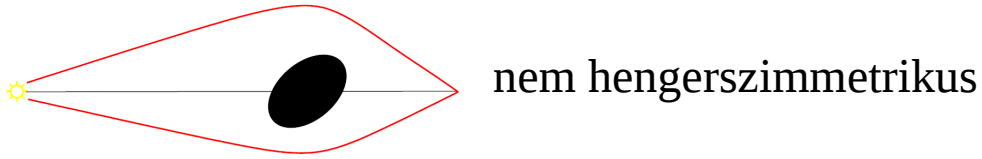
Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

Többszörös, torz képalkotás



ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

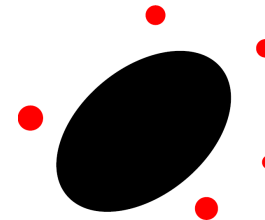
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

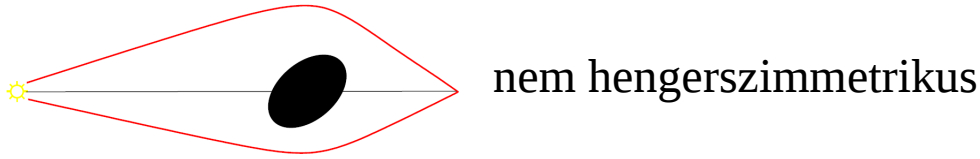
Többszörös, torz képalkotás



ugyanannak a távoli objektumnak a képei!



#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:

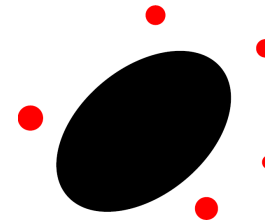


Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

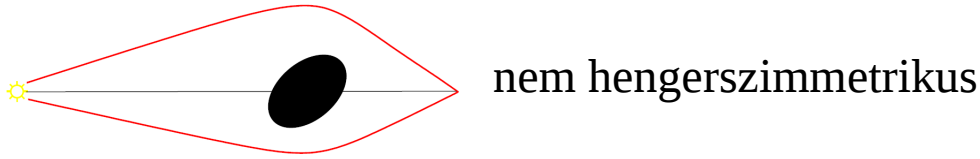
Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák):

Többszörös, torz képalkotás



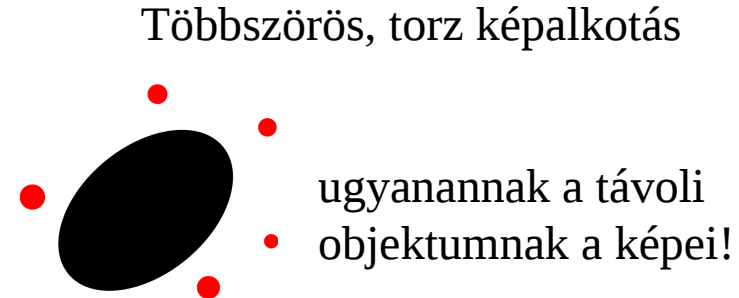
ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



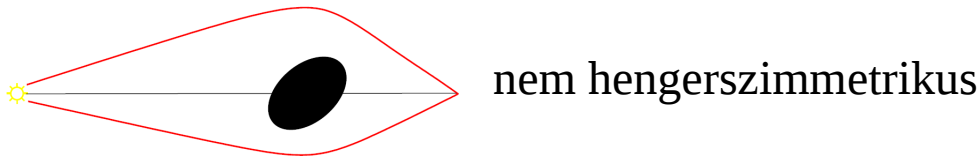
Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!



Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve!

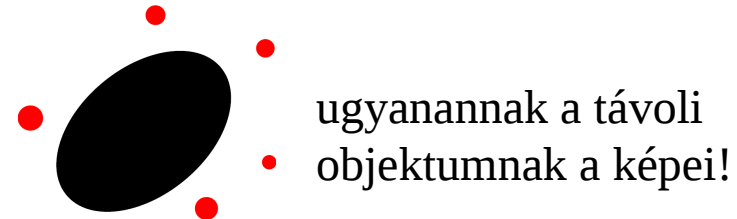
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

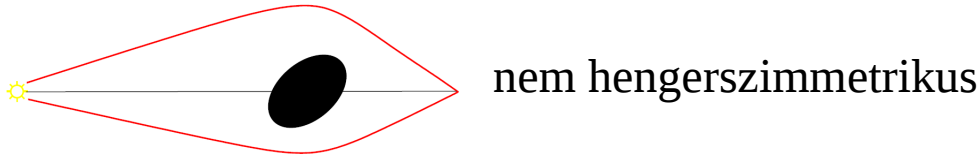
$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás



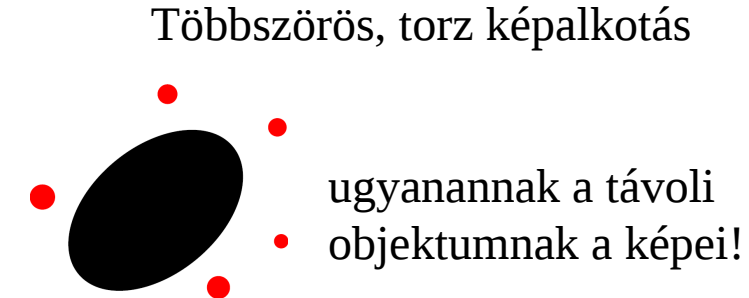
Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére.

#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



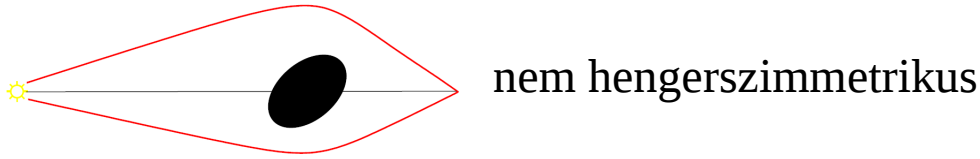
Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!



Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis?

#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:

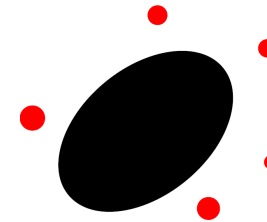


nem hengersizmetrikus

Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

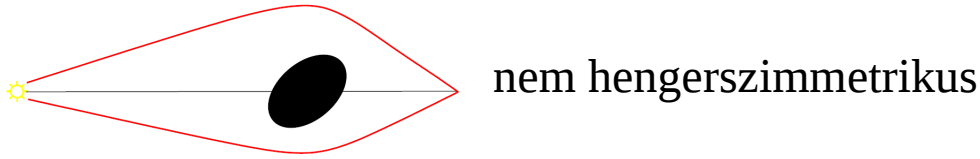
Többszörös, torz képalkotás



ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

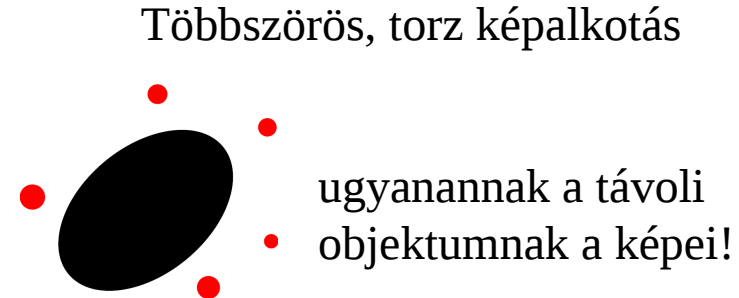
Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag!**

#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



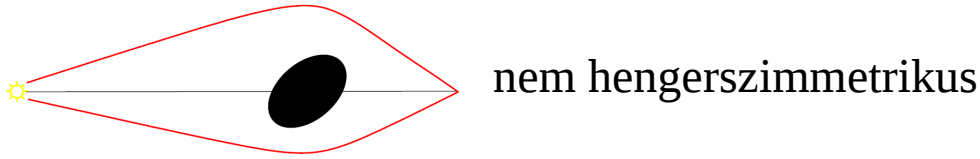
Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!



Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag!** Felfedezve 2006-ban ✓

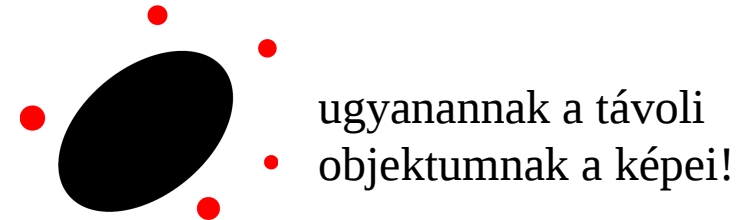
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

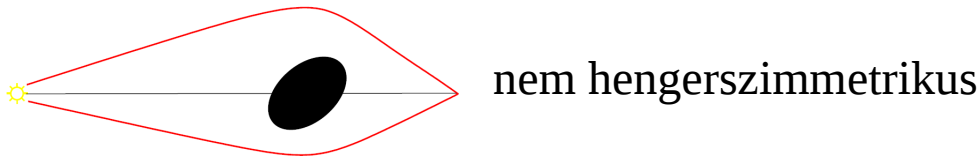
Többszörös, torz képalkotás



Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag!** Felfedezve 2006-ban ✓

#### 5) Mikrolencse:

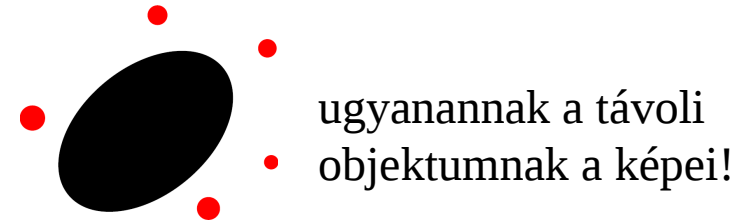
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás

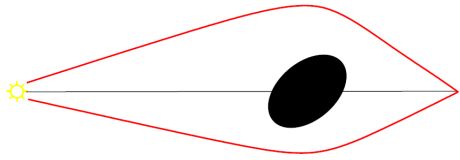


Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag!** Felfedezve 2006-ban ✓

5) Mikrolencse: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt;



#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:

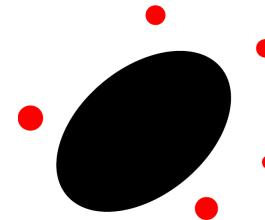


nem hengersizmetrikus

Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás

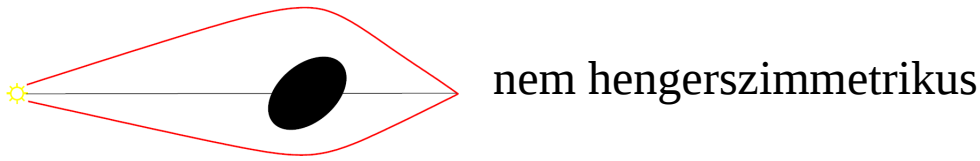


ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag!** Felfedezve 2006-ban ✓

5) **Mikrolencse:** kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszálás miatt megnő az intenzitás.

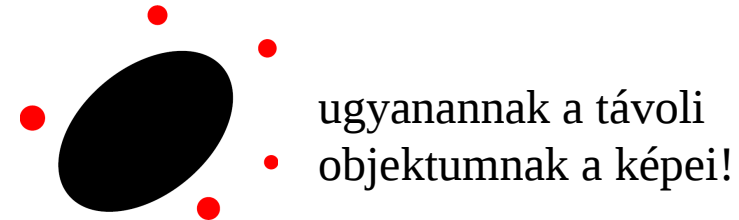
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

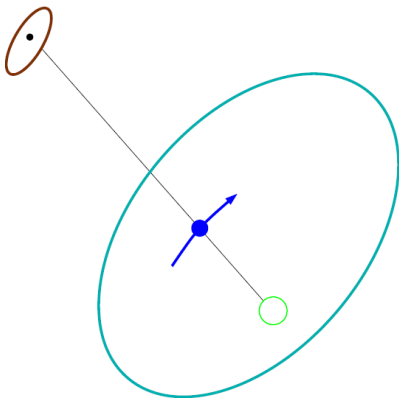
$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás

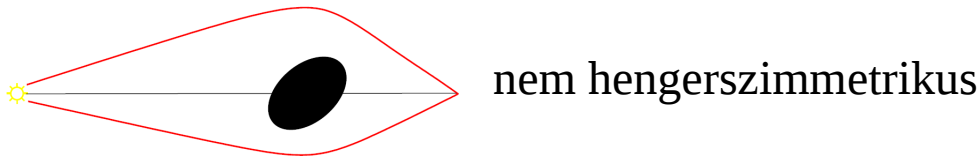


Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag!** Felfedezve 2006-ban ✓

5) **Mikrolencse:** kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszlás miatt megnő az intenzitás.



#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:

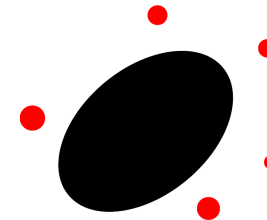


nem hengerszimmetrikus

Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

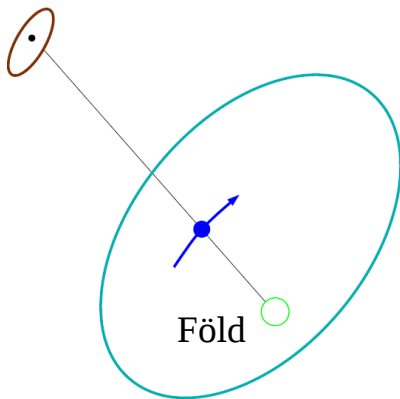
Többszörös, torz képalkotás



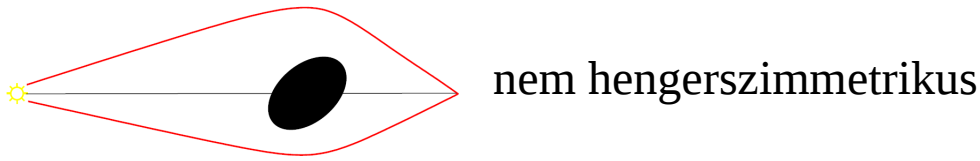
ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! Felfedezve 2006-ban ✓

5) Mikrolencse: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszlás miatt megnő az intenzitás.



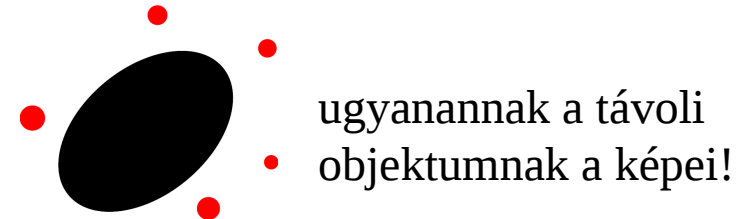
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

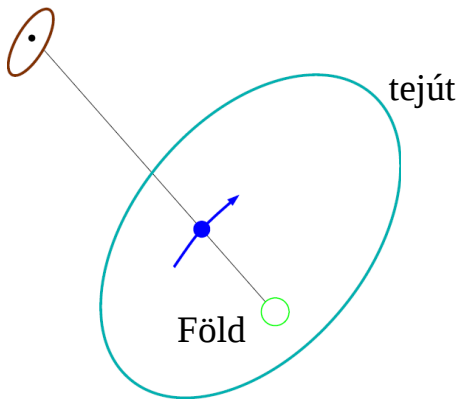
$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás

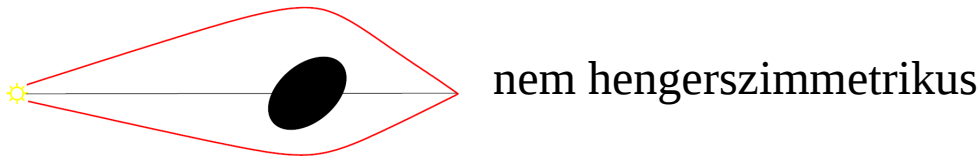


Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! Felfedezve 2006-ban ✓

5) Mikrolencse: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszálás miatt megnő az intenzitás.



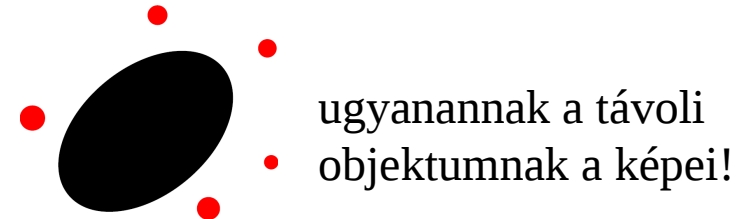
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

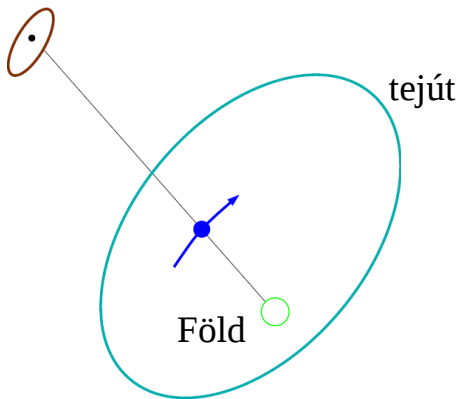
Többszörös, torz képalkotás



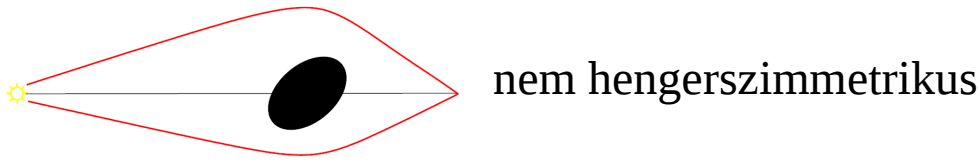
Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag!** Felfedezve 2006-ban ✓

5) **Mikrolencse:** kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszálás miatt megnő az intenzitás.

Magellán-felhő



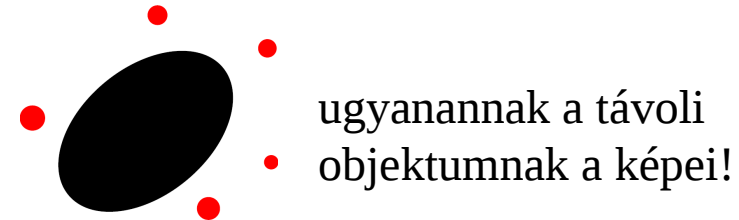
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

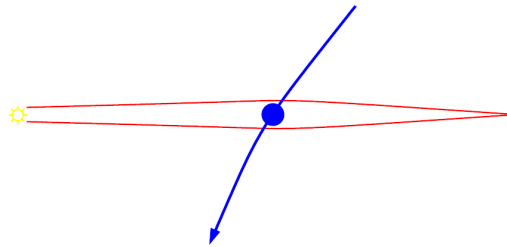
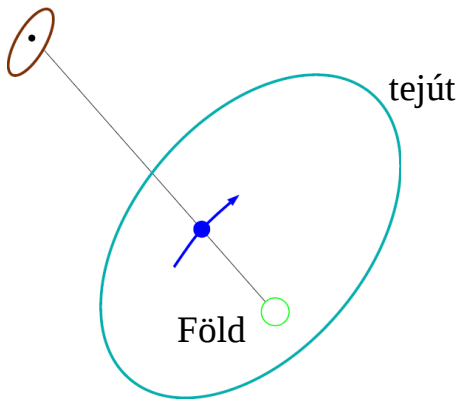
Többszörös, torz képalkotás



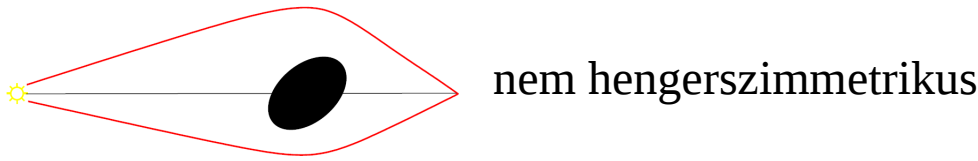
Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! Felfedezve 2006-ban ✓

5) Mikrolencse: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszlás miatt megnő az intenzitás.

Magellán-felhő



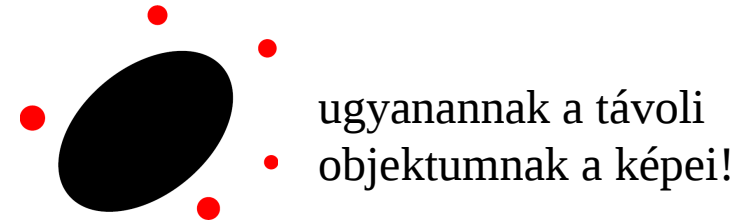
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás

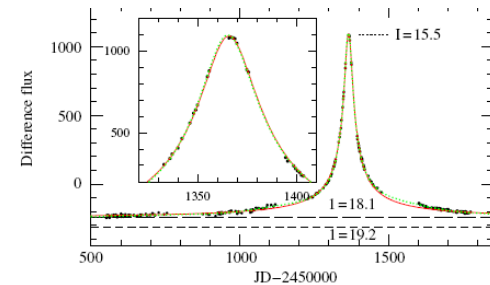
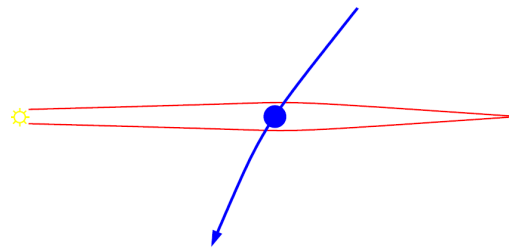
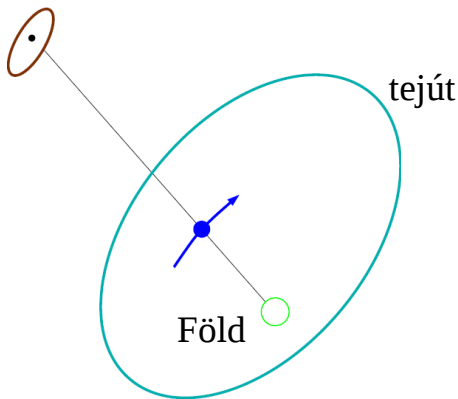


ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

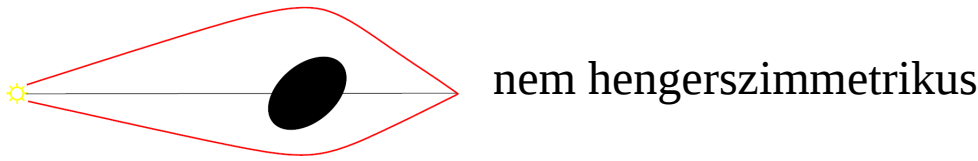
Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! Felfedezve 2006-ban ✓

5) Mikrolencse: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszálás miatt megnő az intenzitás.

Magellán-felhő



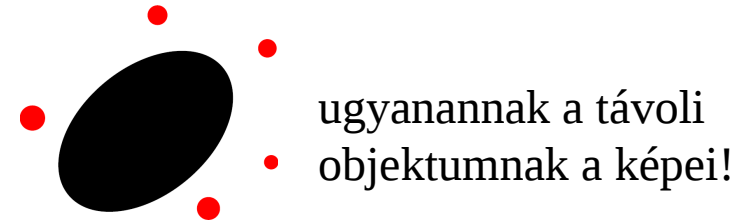
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás

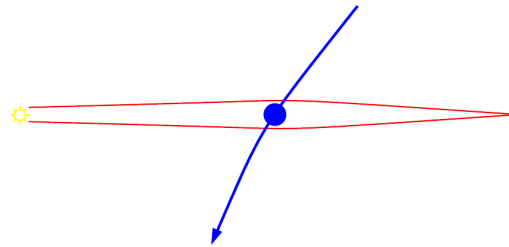
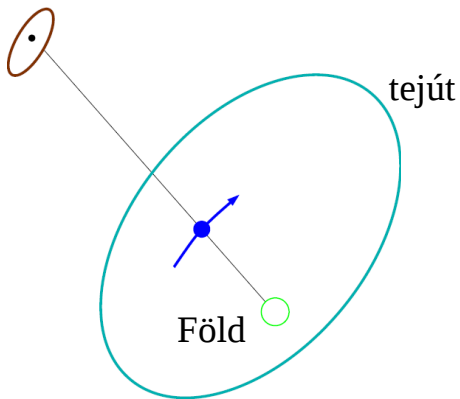


ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

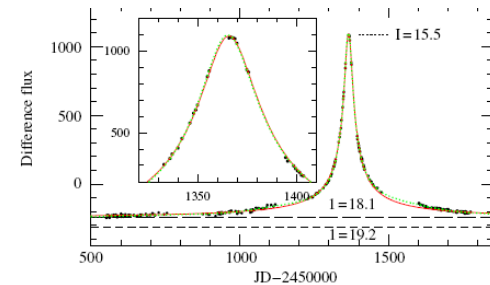
Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! Felfedezve 2006-ban ✓

5) Mikrolencse: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszálás miatt megnő az intenzitás.

Magellán-felhő

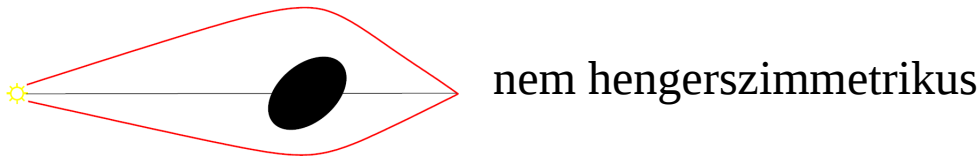


Mi okozta:





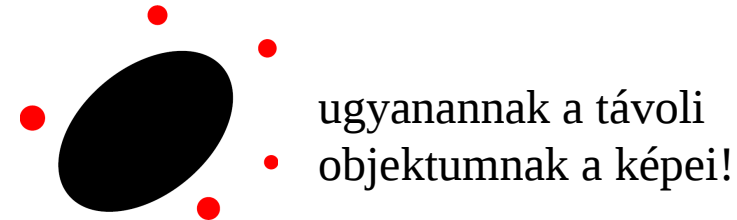
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás

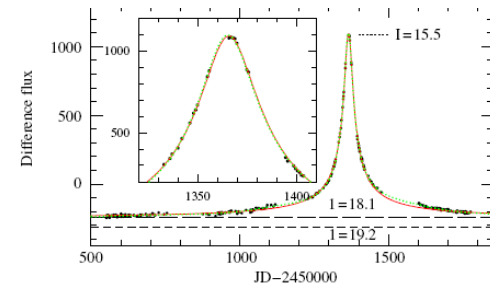
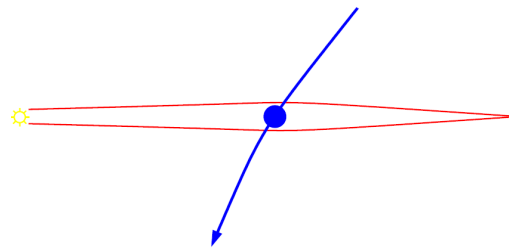
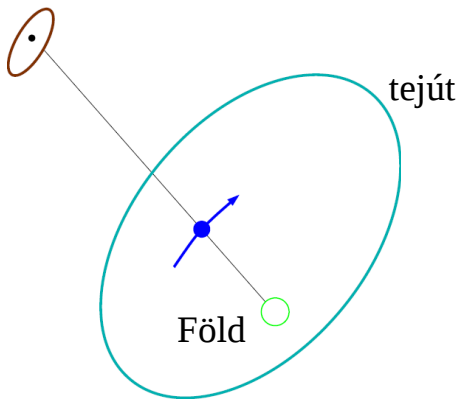


ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! **Felfedezve 2006-ban** ✓

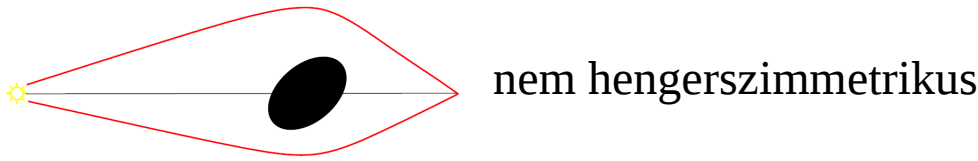
5) **Mikrolencse**: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszálás miatt megnő az intenzitás.

Magellán-felhő



Mi okozta: barna törpe, elvetélt csillag (túl könnyű a fúzióhoz)

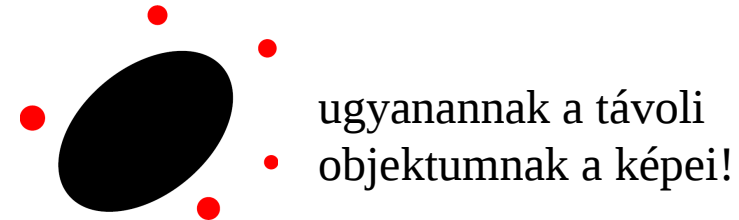
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás

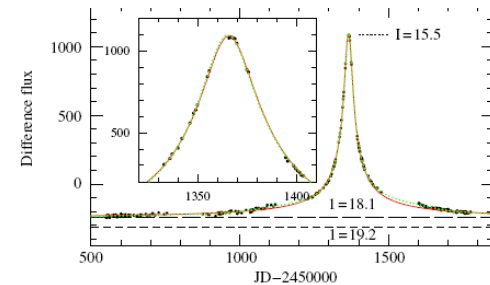
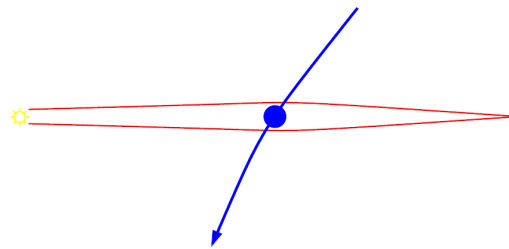
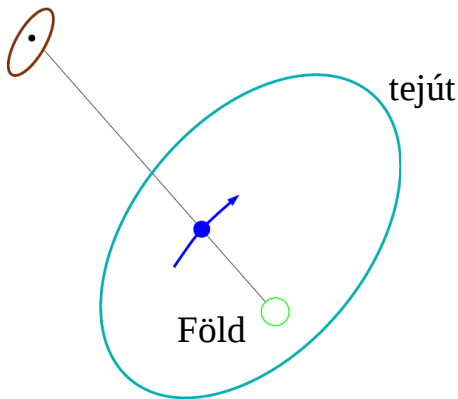


ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! Felfedezve 2006-ban ✓

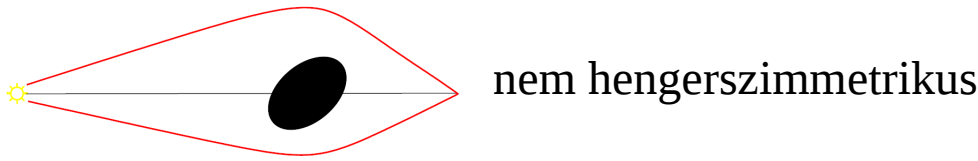
#### 5) Mikrolencse: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszálás miatt megnő az intenzitás.

Magellán-felhő



Mi okozta: barna törpe, elvetélt csillag (túl könnyű a fúzióhoz)

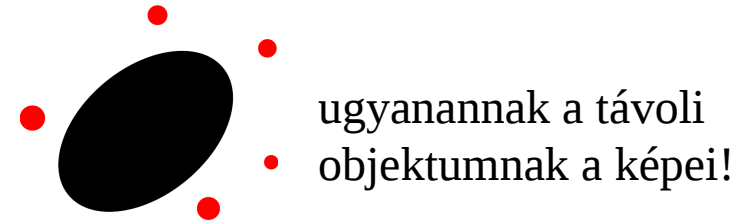
#### 4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$  év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás

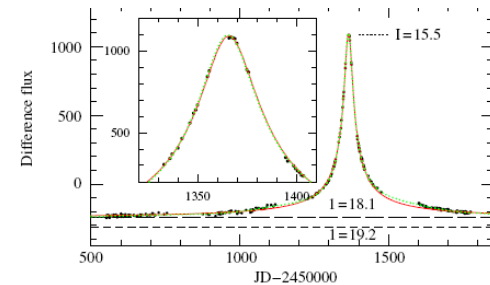
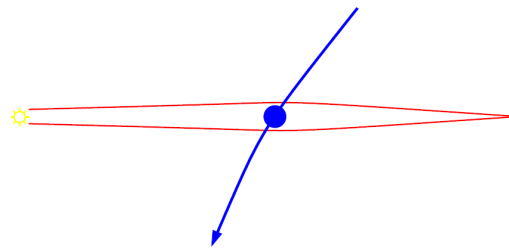
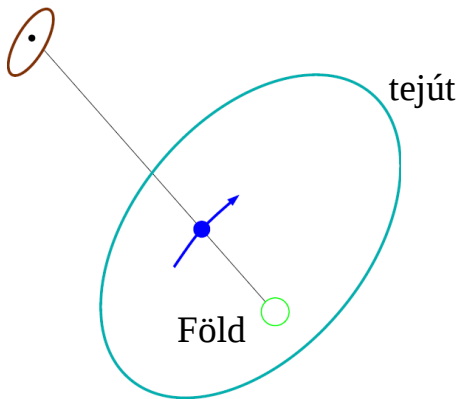


ugyanannak a távoli objektumnak a képei!

Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! Felfedezve 2006-ban ✓

#### 5) Mikrolencse: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszlás miatt megnő az intenzitás.

Magellán-felhő



Mi okozta: barna törpe, elvetélt csillag (túl könnyű a fúzióhoz)

Mikrolencse-statisztika → a Galaxis anyagának 10%-a barna törpe! (1997)

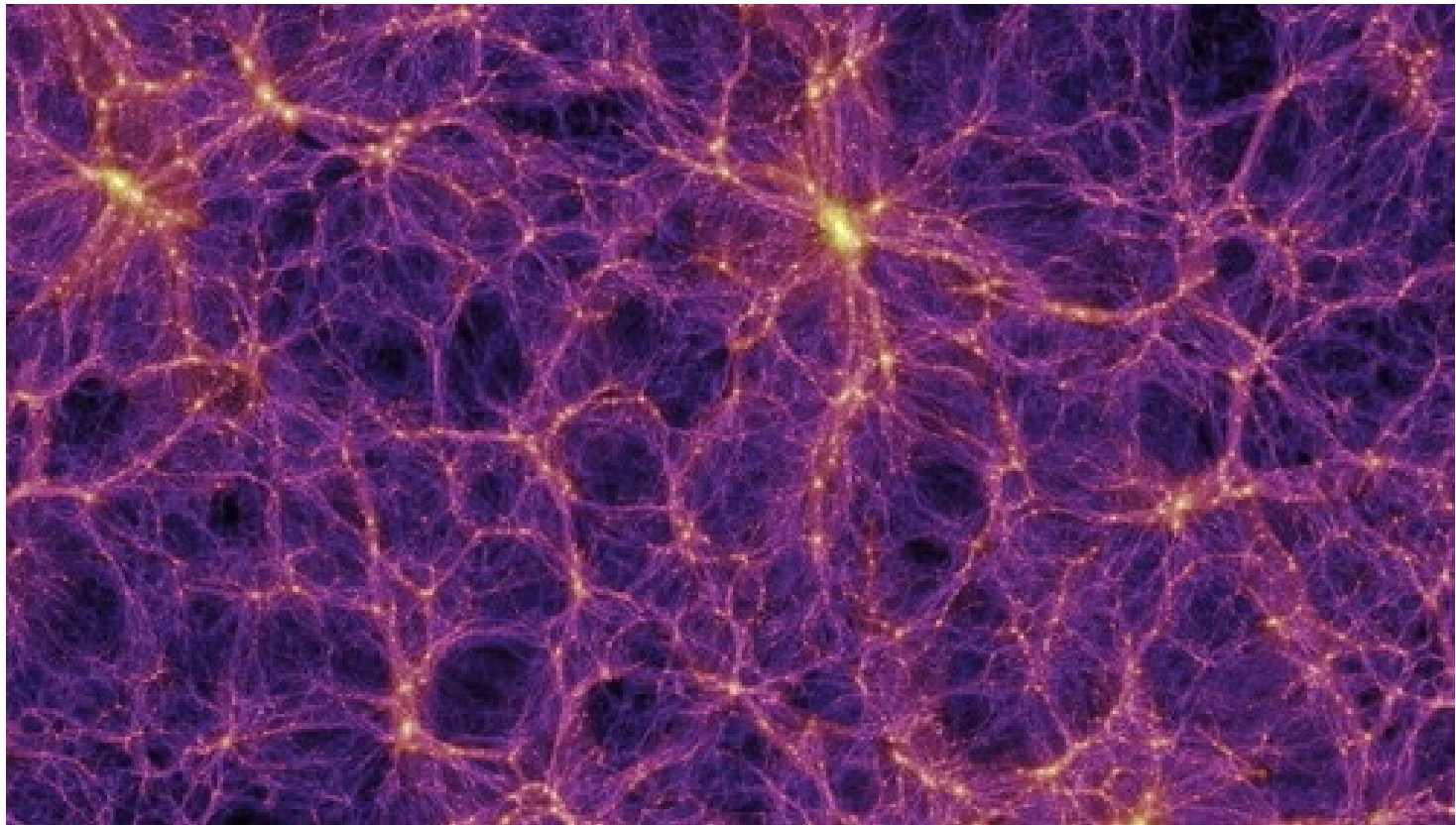
# A sötét anyag eloszlása az Univerzumban

# A sötét anyag eloszlása az Univerzumban

## 2007 januári eredmény

# A sötét anyag eloszlása az Univerzumban

2007 januári eredmény



6) Kisebb objektumok:

## 6) Kisebb objektumok: bolygó



## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003

## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt

## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

Mikrohullámú tartomány:

## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

**Mikrohullámú tartomány:** detektálás: VLBI (Very Large Based Interferometer):

## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

**Mikrohullámú tartomány:** detektálás: VLBI (Very Large Based Interferometer):  
nagyon nagy alapvonalú interferométer

## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

**Mikrohullámú tartomány:** detektálás: VLBI (Very Large Based Interferometer):  
nagyon nagy alapvonalú interferométer



## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

**Mikrohullámú tartomány:** detektálás: VLBI (Very Large Based Interferometer):  
nagyon nagy alapvonalú interferométer



rádiótávcső-farm  
szinkronizált jelfeldolgozás



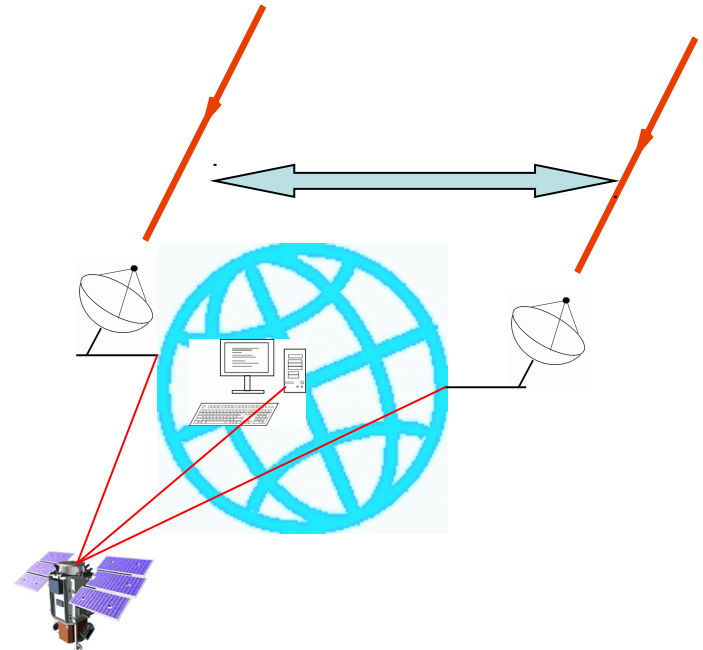
## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

**Mikrohullámú tartomány:** detektálás: VLBI (Very Large Based Interferometer):  
nagyon nagy alapvonalú interferométer



rádiótávcső-farm  
szinkronizált jelfeldolgozás



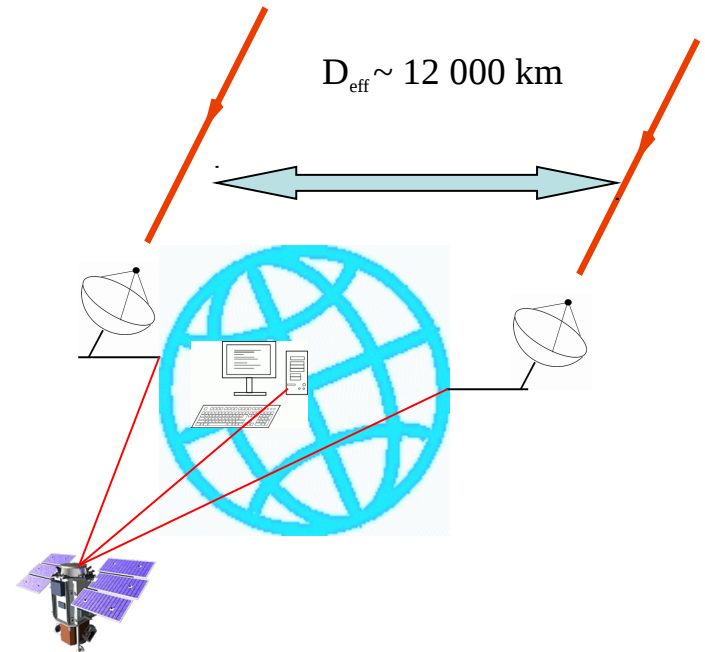
## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

**Mikrohullámú tartomány:** detektálás: VLBI (Very Large Based Interferometer):  
nagyon nagy alapvonalú interferométer



rádiótávcső-farm  
szinkronizált jelfeldolgozás



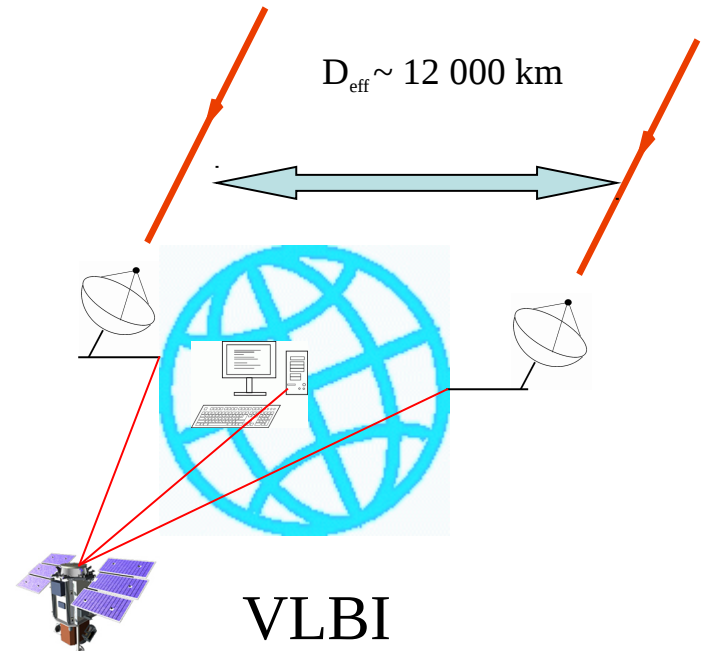
## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

**Mikrohullámú tartomány:** detektálás: VLBI (Very Large Based Interferometer):  
nagyon nagy alapvonalú interferométer



rádiótávcső-farm  
szinkronizált jelfeldolgozás



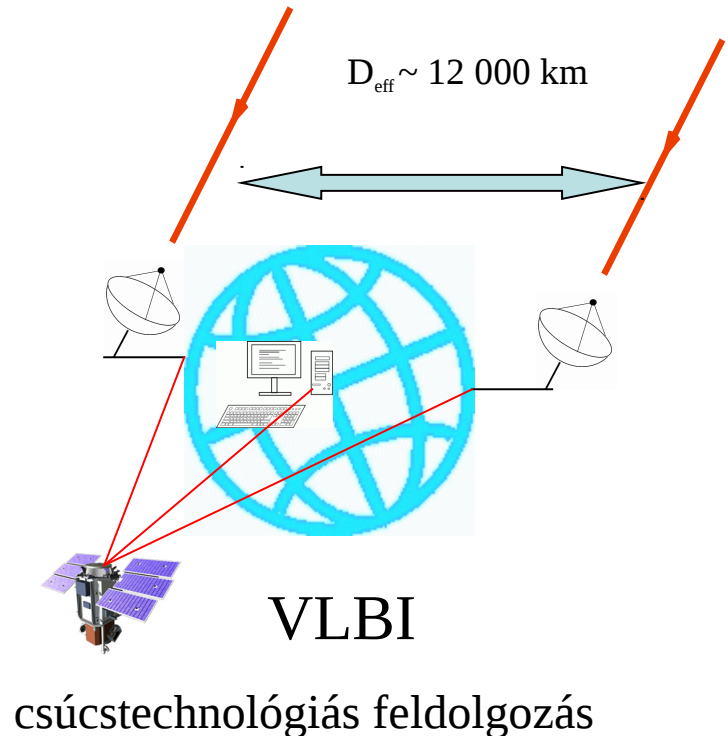
## 6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

**Mikrohullámú tartomány:** detektálás: VLBI (Very Large Based Interferometer):  
nagyon nagy alapvonalú interferométer



rádiótávcső-farm  
szinkronizált jelfeldolgozás



7) Nap, mint távcső:

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés:

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

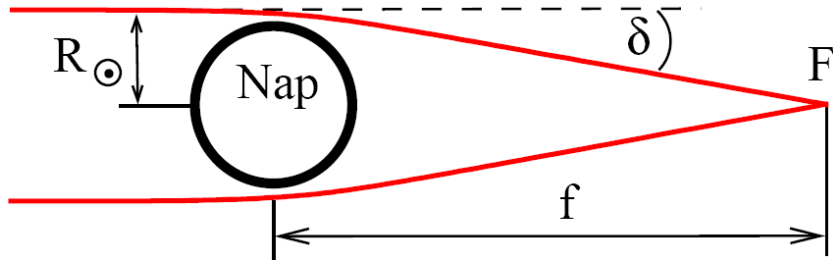
Ehelyett tervezett lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

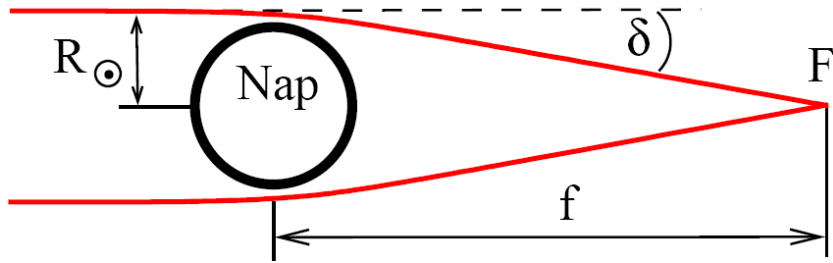
Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!

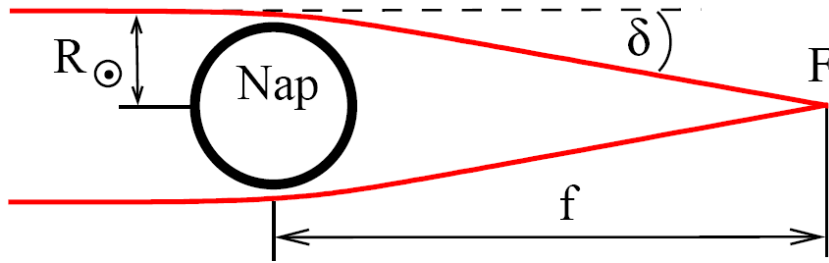


$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



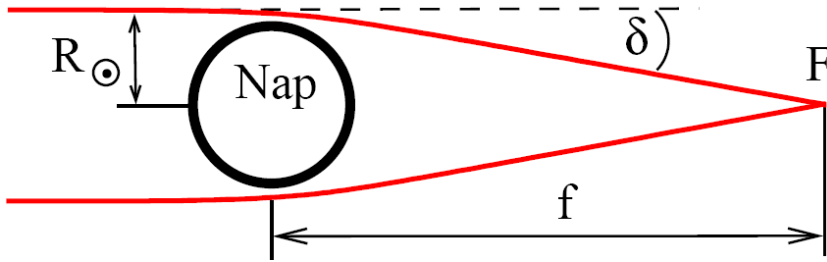
$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

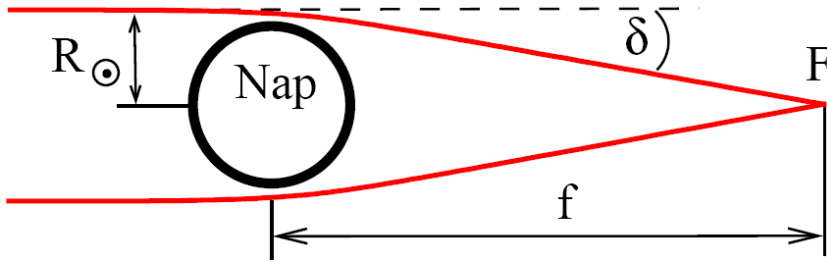
1 CsE = 150 millió km

(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

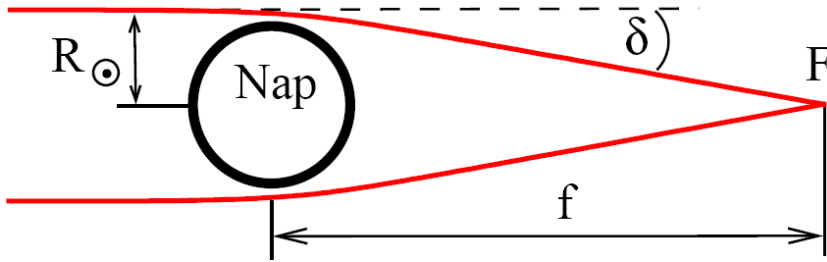
(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

Ionhajtóműves szonda

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

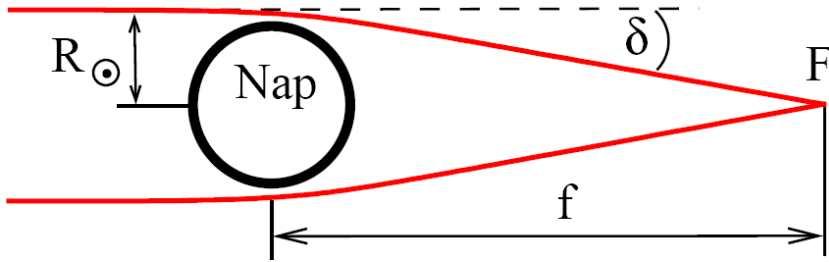
(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

Ionhajtóműves szonda ~ 25 év alatt ér oda

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

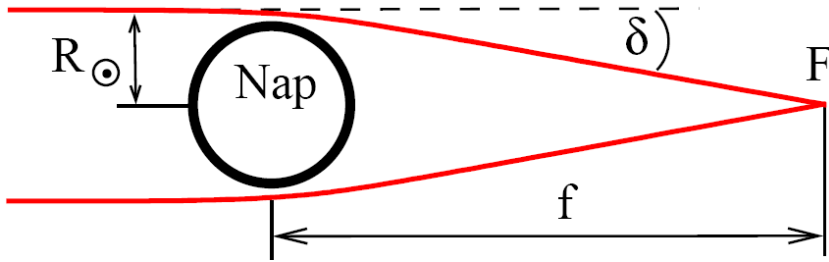
Ionhajtóműves szonda ~ 25 év alatt ér oda

Ez csak az első képalkotás!

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

Ionhajtóműves szonda ~ 25 év alatt ér oda

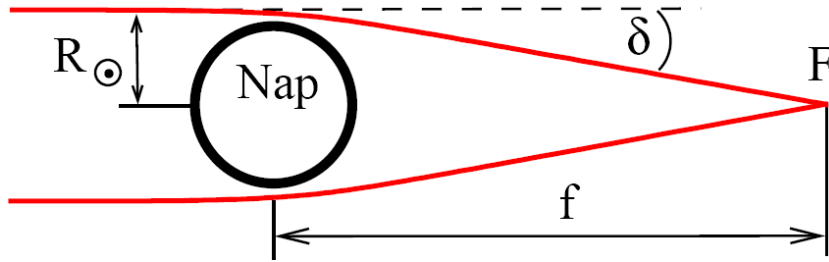
Ez csak az első képalkotás! Utána folyamatosan ~ 1000 évig.



## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



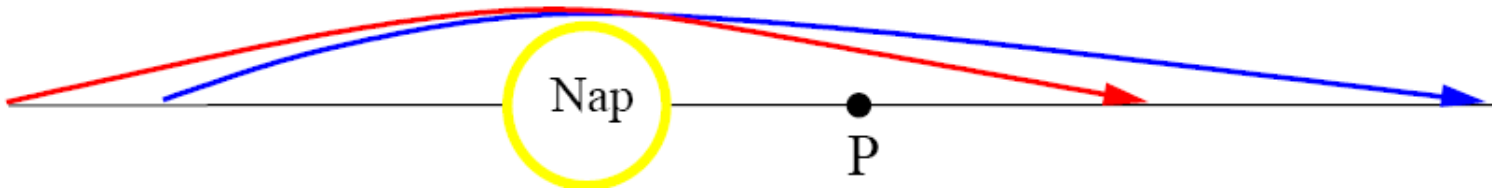
$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

Ionhajtóműves szonda ~ 25 év alatt ér oda

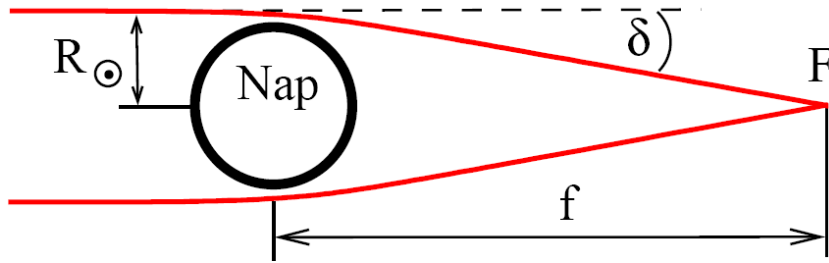
Ez csak az első képalkotás! Utána folyamatosan ~ 1000 évig.



## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



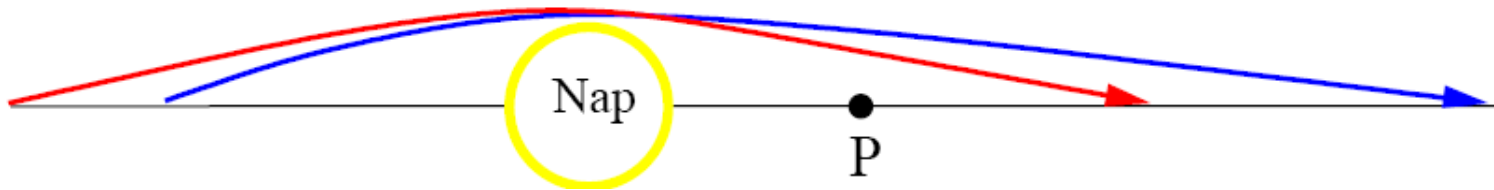
$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

Ionhajtóműves szonda ~ 25 év alatt ér oda

Ez csak az első képalkotás! Utána folyamatosan ~ 1000 évig.

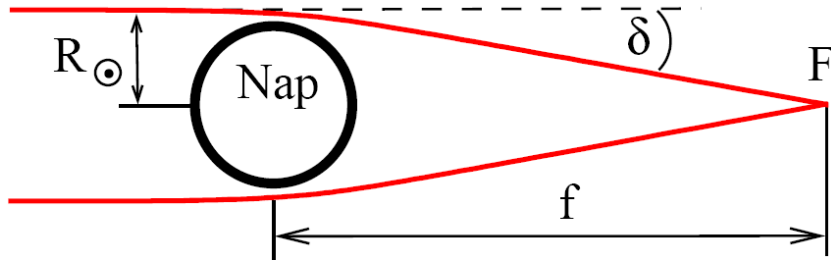


Merre induljon a szonda?

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



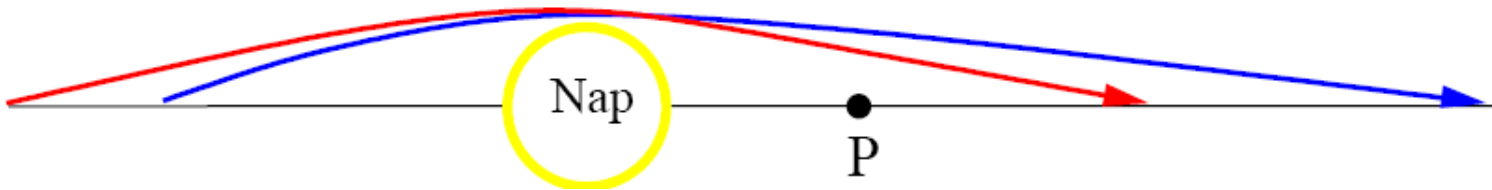
$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

Ionhajtóműves szonda ~ 25 év alatt ér oda

Ez csak az első képalkotás! Utána folyamatosan ~ 1000 évig.

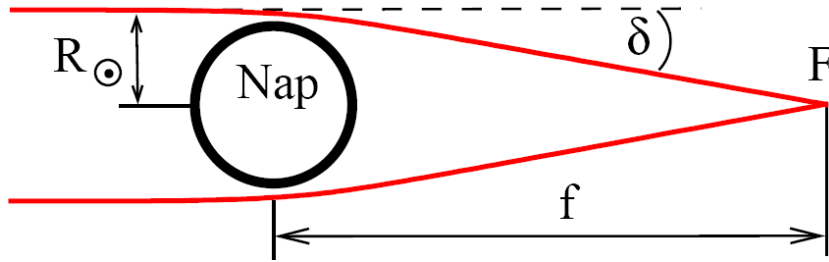


Merre induljon a szonda? Ellenkező irányban, mint ahol valami érdekes van!

## 7) Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



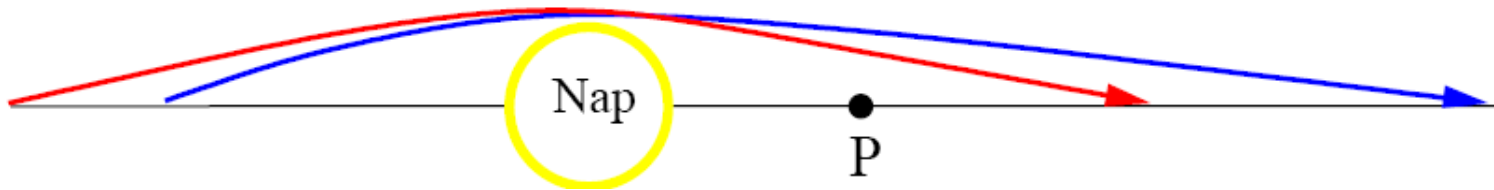
$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

Ionhajtóműves szonda ~ 25 év alatt ér oda

Ez csak az első képképzés! Utána folyamatosan ~ 1000 évig.



Merre induljon a szonda? Ellenkező irányban, mint ahol valami érdekes van!

Várható felbontás: 10 fényévre lévő bolygó kontinensei

8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függttek, ez  $\sim 10^{-6}$

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

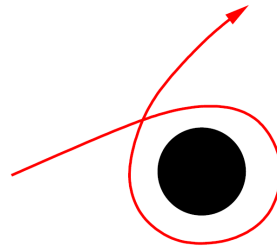
az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

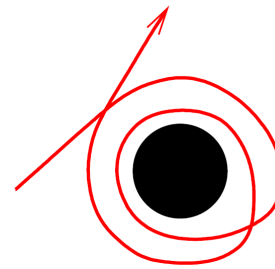
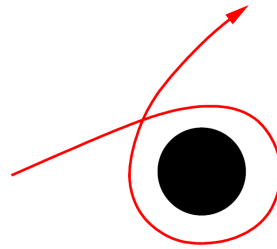




## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függttek, ez  $\sim 10^{-6}$

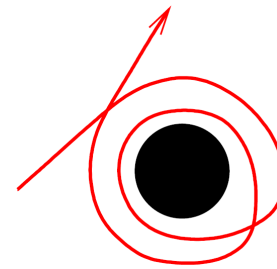
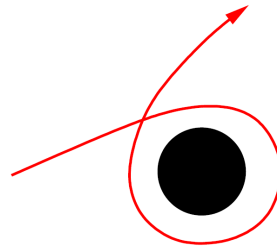
**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$



## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függttek, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$



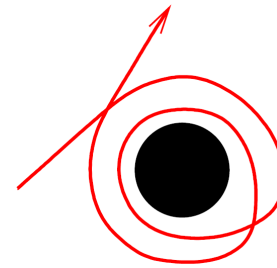
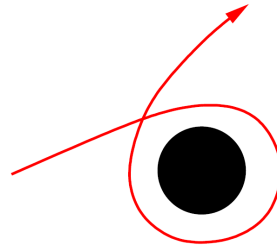
többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függttek, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



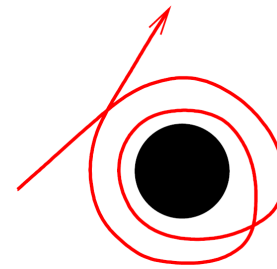
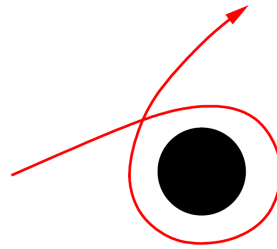
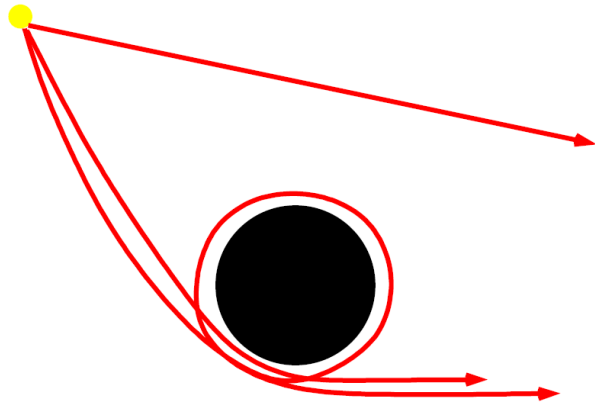
többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



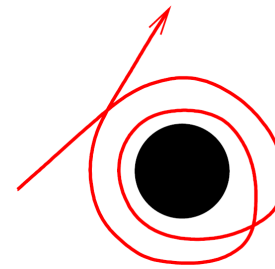
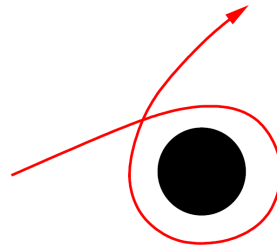
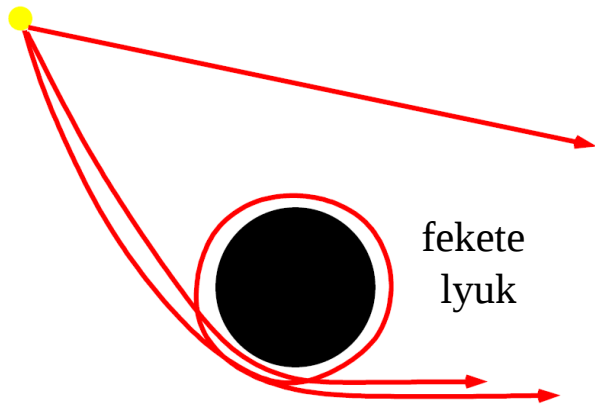
többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



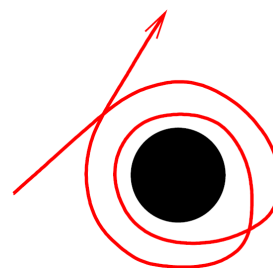
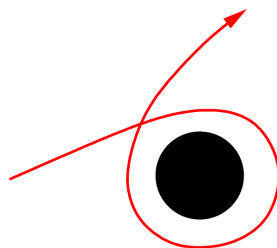
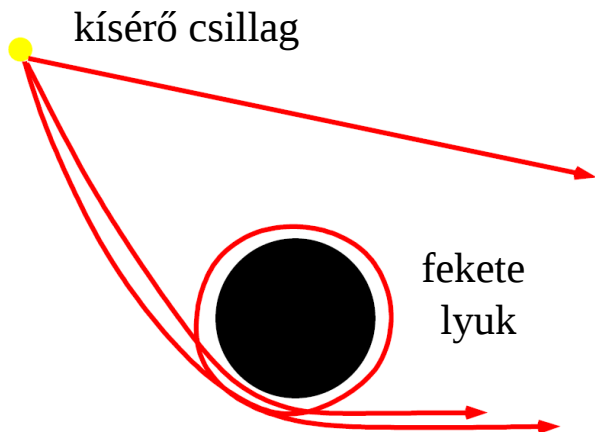
többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függttek, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



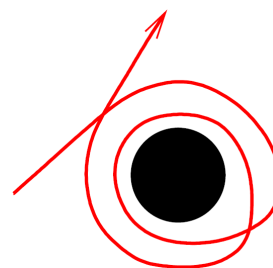
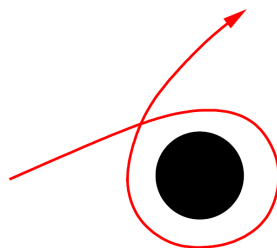
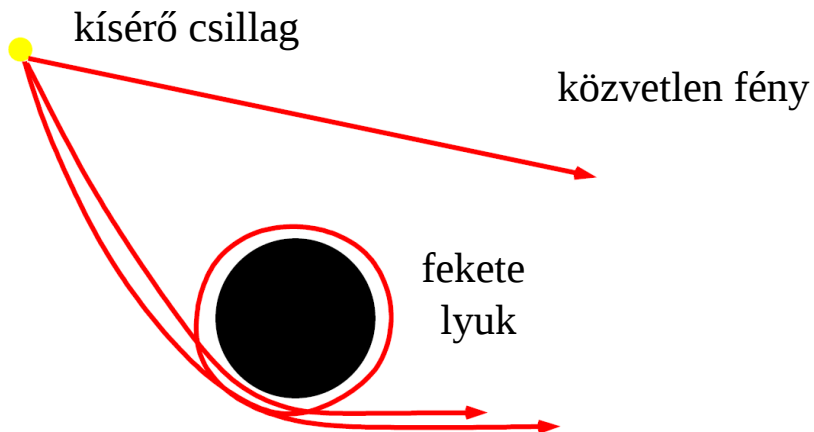
többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függttek, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



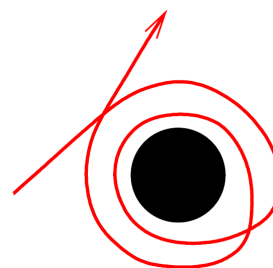
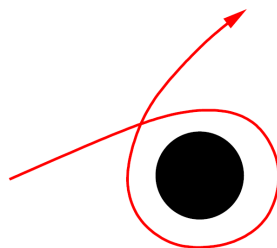
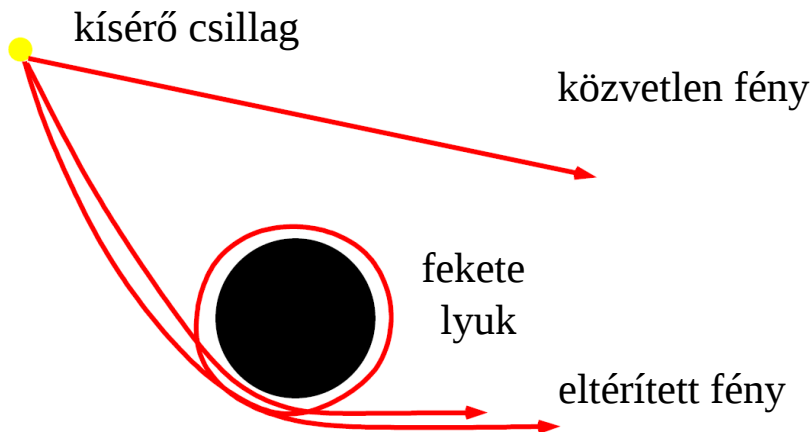
többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függttek, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

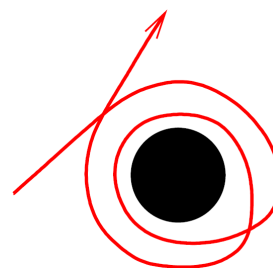
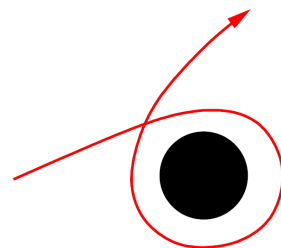
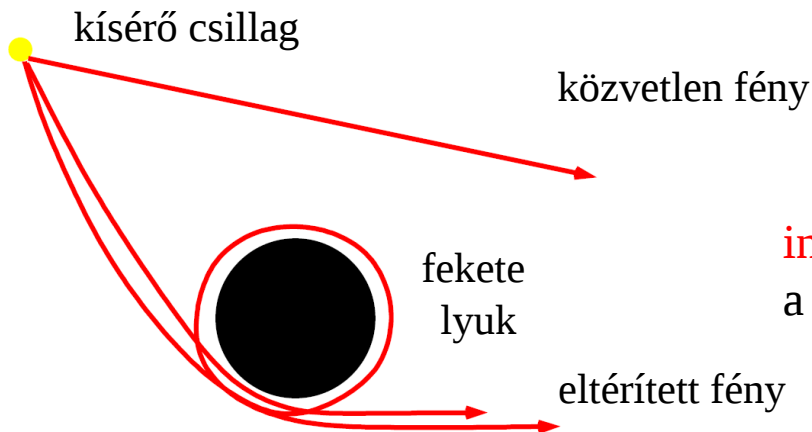


## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függttek, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

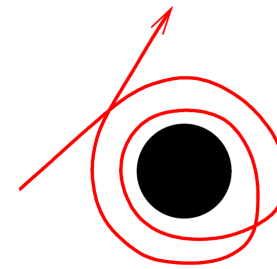
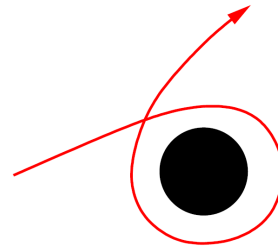
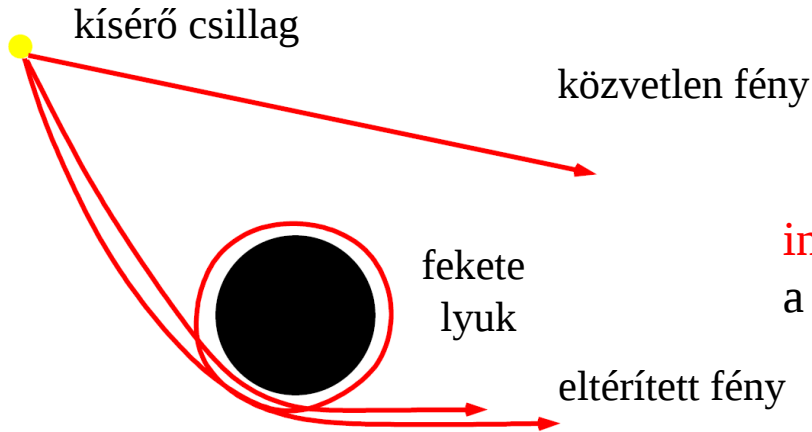
**interferenciakép**  
a keringés miatt időben változik

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

**interferenciakép**  
a keringés miatt időben változik

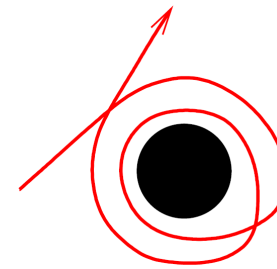
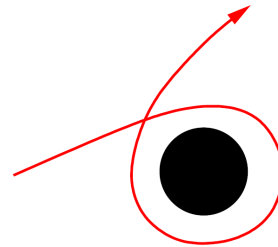
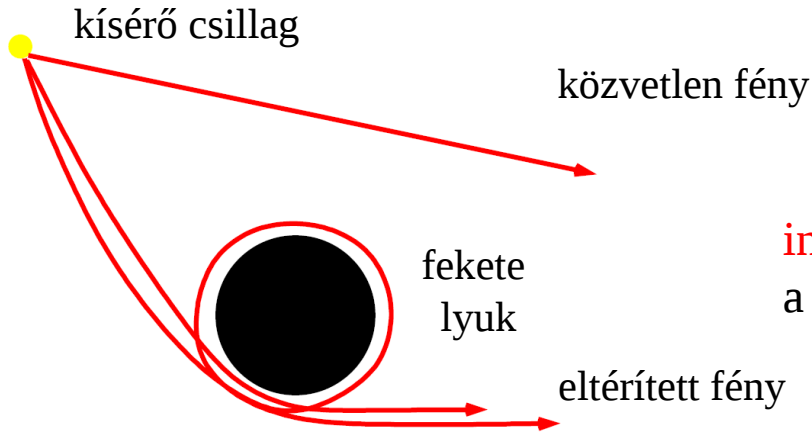
Vigyázat: nagyon gyenge jel, csak néhány fénysugár – nincs igazi képalkotás.

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

**interferenciakép**  
a keringés miatt időben változik

Vigyázat: nagyon gyenge jel, csak néhány fénysugár – nincs igazi képalkotás.

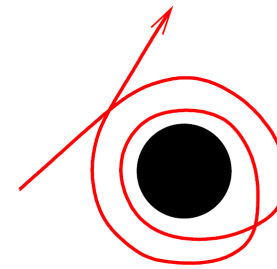
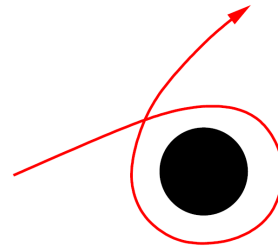
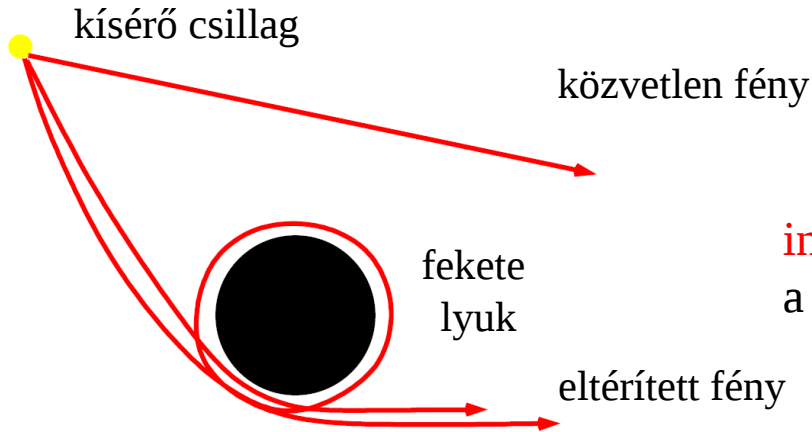
## 9) Fotongömb:

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:

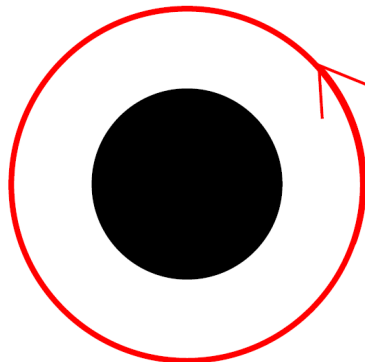


többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

**interferenciakép**  
a keringés miatt időben változik

Vigyázat: nagyon gyenge jel, csak néhány fénysugár – nincs igazi képalkotás.

## 9) Fotongömb:

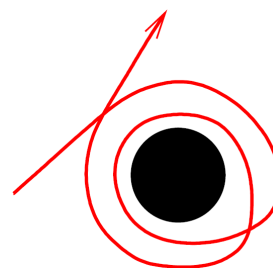
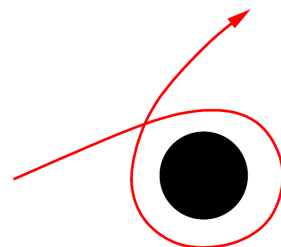
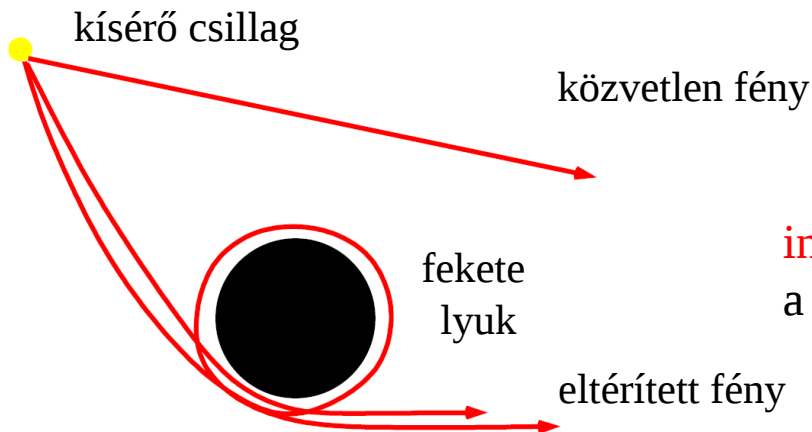


## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:

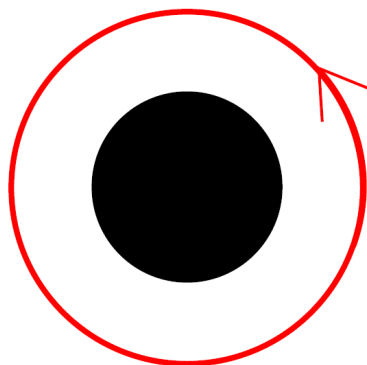


többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

**interferenciakép**  
a keringés miatt időben változik

Vigyázat: nagyon gyenge jel, csak néhány fénysugár – nincs igazi képalkotás.

## 9) Fotongömb:



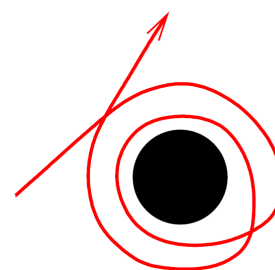
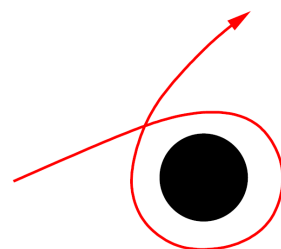
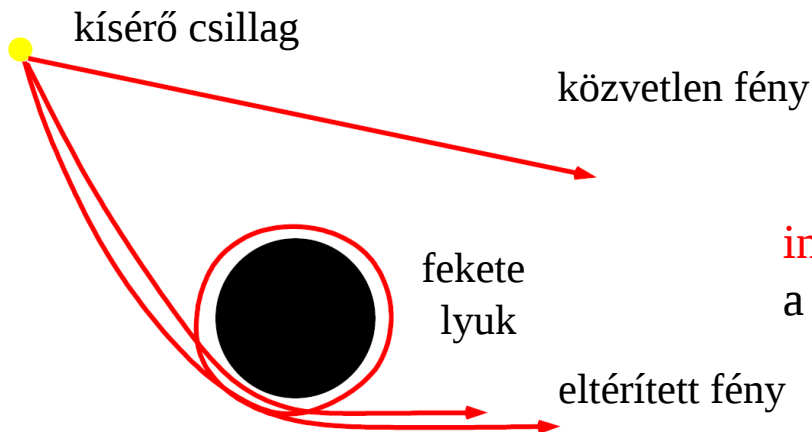
$R = \frac{3}{2} b = \frac{3GM}{c^2}$  -nél a fény körpályára áll  
a fekete lyuk körül.

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:

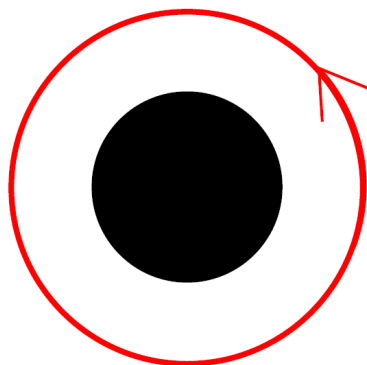


többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

**interferenciakép**  
a keringés miatt időben változik

Vigyázat: nagyon gyenge jel, csak néhány fénysugár – nincs igazi képalkotás.

## 9) Fotongömb:



$R = \frac{3}{2} b = \frac{3GM}{c^2}$  -nél a fény körpályára áll  
a fekete lyuk körül.

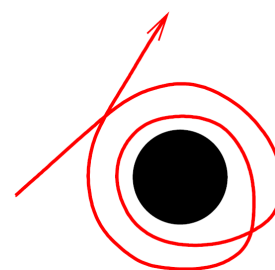
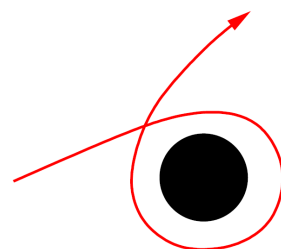
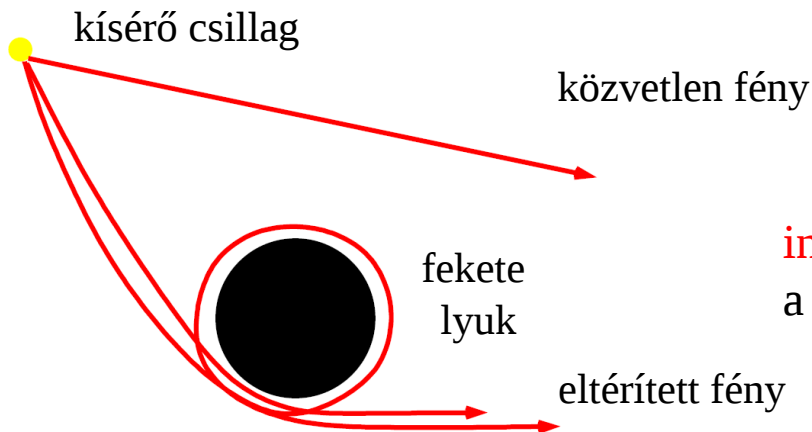
Ha zuhansz egy nagy feketeség felé, és oldalról hirtelen fényt látsz,

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:

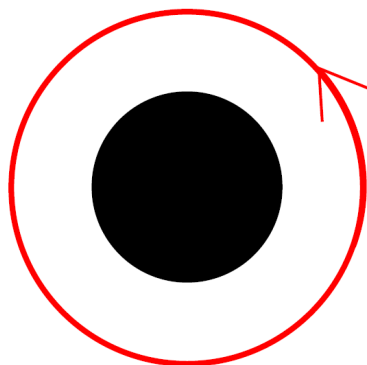


többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

**interferenciakép**  
a keringés miatt időben változik

Vigyázat: nagyon gyenge jel, csak néhány fénysugár – nincs igazi képalkotás.

## 9) Fotongömb:



$R = \frac{3}{2} b = \frac{3GM}{c^2}$  -nél a fény körpályára áll  
a fekete lyuk körül.

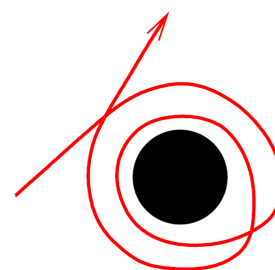
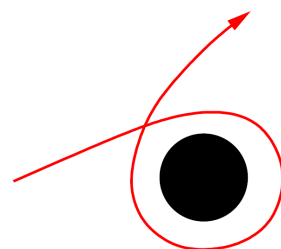
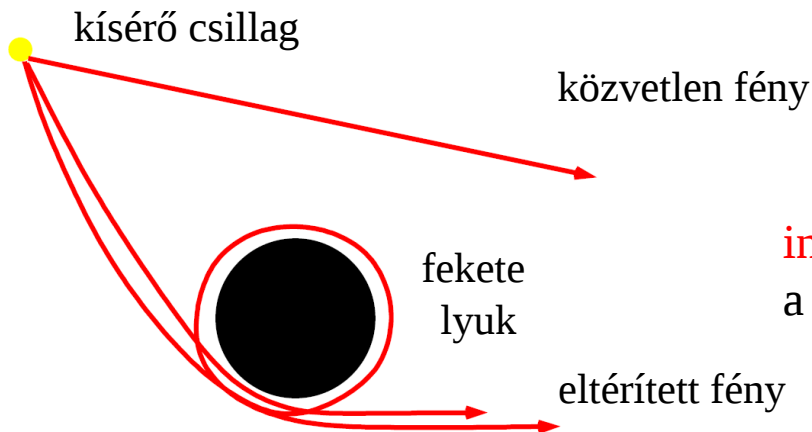
Ha zuhansz egy nagy feketeség felé, és oldalról hirtelen fényt láatsz,  
**sürgősen menekülj el!**

## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:

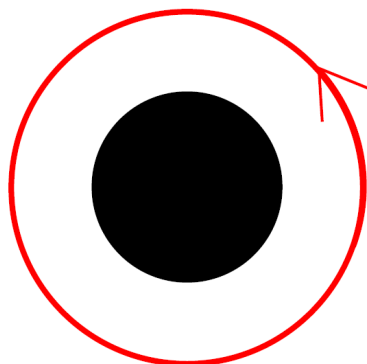


többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

**interferenciakép**  
a keringés miatt időben változik

Vigyázat: nagyon gyenge jel, csak néhány fénysugár – nincs igazi képalkotás.

## 9) Fotongömb:



$R = \frac{3}{2} b = \frac{3GM}{c^2}$  -nél a fény körpályára áll  
a fekete lyuk körül.

Ha zuhansz egy nagy feketeség felé, és oldalról hirtelen fényt láatsz,  
**sürgősen menekülj el!** (Van még rá  $1 \mu\text{s}$  – od...)

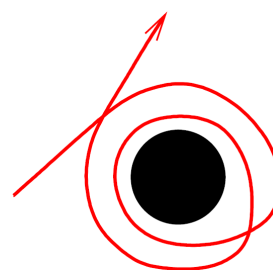
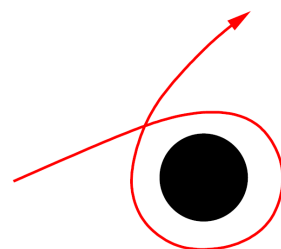
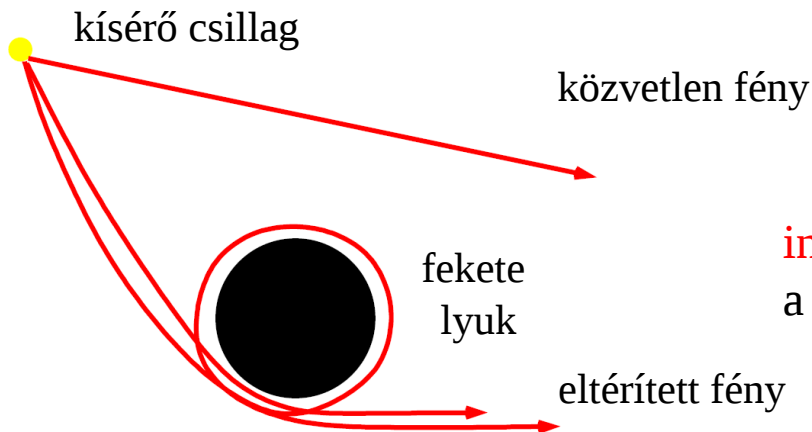


## 8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

az előző közelítések  $b/r$  – től függték, ez  $\sim 10^{-6}$

**fekete lyuk:**  $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:

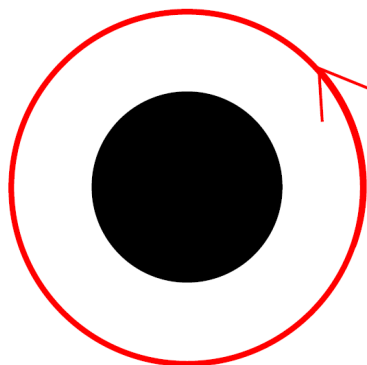


többszörös  
körbetekeredés  
is lehetséges!

**interferenciakép**  
a keringés miatt időben változik

Vigyázat: nagyon gyenge jel, csak néhány fénysugár – nincs igazi képalkotás.

## 9) Fotongömb:



$R = \frac{3}{2} b = \frac{3GM}{c^2}$  -nél a fény körpályára áll  
a fekete lyuk körül.

Ha zuhansz egy nagy feketeség felé, és oldalról hirtelen fényt láatsz,  
**sürgősen menekülj el!** (Van még rá  $1 \mu\text{s}$  – od...) 😊