

Optika és Relativitáselmélet

II. BsC fizikus hallgatóknak

6.

Geometriai optika – I.
(hullámegyenlet alapján, eikonál,
nempfény-optika)

frissítés:
2023. március 27.

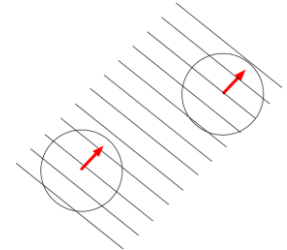


Cserti József, jegyzet, ELTE, 2007 (Dávid Gyula jegyzete alapján).

A hullámoptika és a geometriai optika kapcsolata

Homogén közeg Hullámmegyenlet: $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$

Megoldás: $\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ síkhullám



$\mathbf{k}$ mindenütt ugyanaz

Inhomogén közeg Hullámmegyenlet: $\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \Delta \Phi$

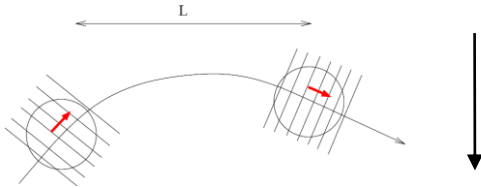
$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})}$$

Lassan változó közeg

$L \gg \lambda$

$L \sim \lambda$

Gyorsan változó közeg



L a változás karakterisztikus hossza:

$$L \sim \frac{1}{|\nabla n|}$$

Megoldás: $\Phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$

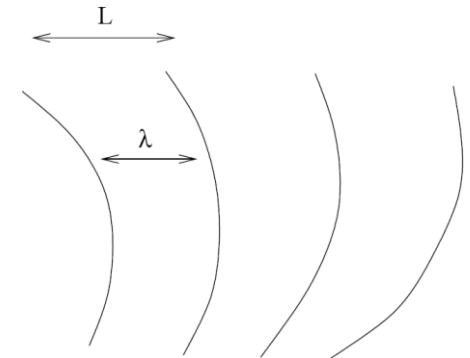
Lokális síkhullám-megoldás

Az A amplitudó lassan változik.

A φ fázis gyorsan változik (λ távolságon 2π).

$\varphi(\mathbf{r}, t)$ hordozza az információt. Ez a geometriai optika.

Nincs értelme hullámhosszról beszélni



Eikonál-közelítés

$$|\text{grad} A| \ll |\text{grad} \varphi|$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$ fázis gyorsan változik (λ távolságon 2π).

$A(\mathbf{r}, t)$ amplitúdó lassan változik.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A e^{i\varphi}) = \left(\frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i\varphi}$$

$$\Delta \Phi = \left[\Delta A + 2i(\text{grad} A)(\text{grad} \varphi) + iA \Delta \varphi - A(\text{grad} \varphi)^2 \right] e^{i\varphi} \approx -A(\text{grad} \varphi)^2 e^{i\varphi}$$

Beírva a hullámegyenletbe:
ez az **eikonál-egyenlet**

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = c^2(\mathbf{r}) (\text{grad} \varphi)^2$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \quad \text{lokális (helyfüggő) törésmutató}$$

elsőrendű parc. diff. egyenlet

Fejtsük sorba a fázist: $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i\varphi} = A e^{i\varphi_0} e^{i(\nabla \varphi \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t)} \sim A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \text{grad} \varphi(\mathbf{r}, t)$$

$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Young-tétel:

$$\frac{\partial k_l}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x_l}$$

$$\frac{\partial k_l}{\partial x_m} = \frac{\partial k_m}{\partial x_l}$$

$$\text{rot} \mathbf{k}(\mathbf{r}) = 0$$

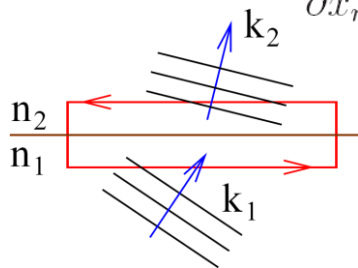
$$\oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \oint \text{rot} \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{F} = 0$$

Stokes-tétel

$$0 = \oint \mathbf{k}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int k_x^{(1)} dx + \int k_x^{(2)} (-dx) \quad \longrightarrow \quad k_x^{(1)} = k_x^{(2)}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha = \frac{\omega}{c_2} \sin \beta$$

lokális Snellius-törvény



Az eikonál-egyenlet egyszerűsítése

ω = konstans mindig és mindenütt: $\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$ ←

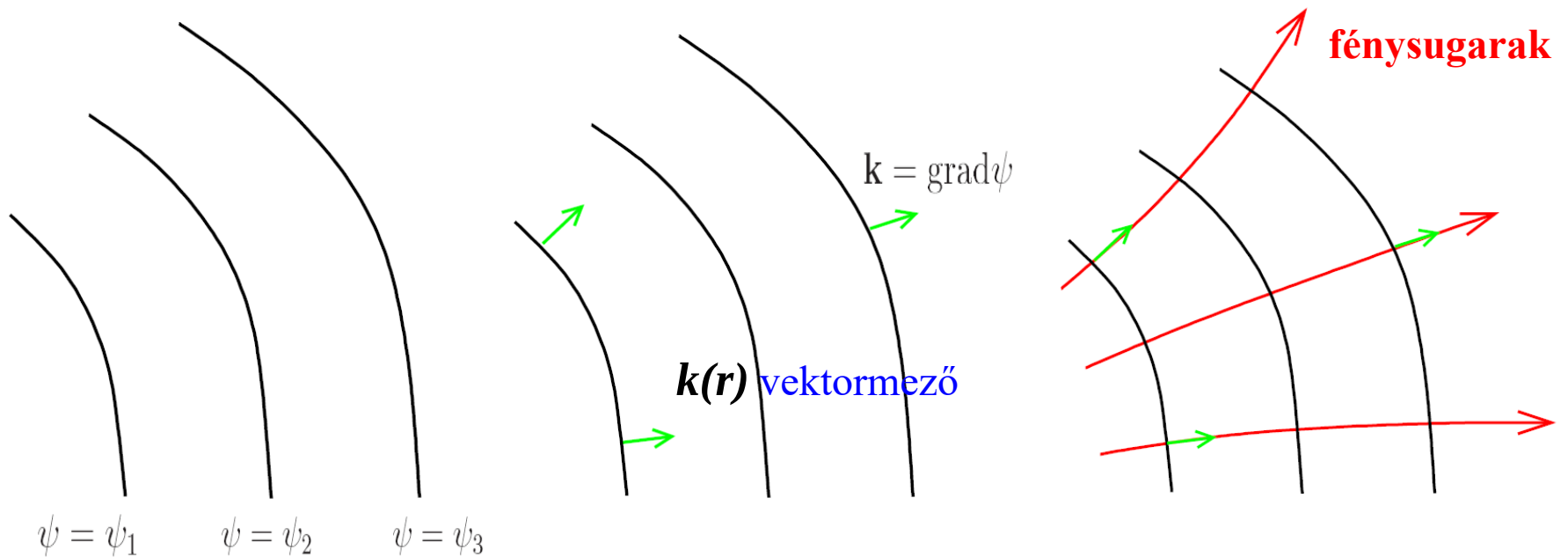
„rövidített eikonál”

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\omega \\ \text{grad} \varphi &= \text{grad} \psi \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \left(\frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 (\text{grad} \psi)^2 = \left(\frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})}$$

Megoldásai: $\psi(\mathbf{r})$

$\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans}$ felületek, a hullámfrontok

Ezekre merőlegesek a **fénysugarak**.



Analógia a pontmechanika és a geometriai optika között

Hatásintegrál: $S(\mathbf{r}, t) = \int_{P_0}^P L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S)$$



$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

E mozgásállandó:

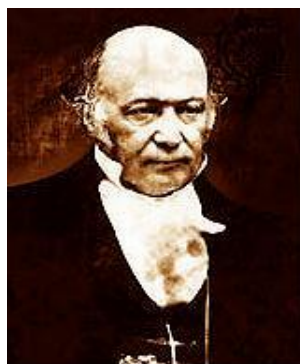
$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$$

rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \text{grad} S_0)$$

mozgásegyenletek:
Hamilton-féle
kanonikus
egyenletek

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$



Sir William **Hamilton**
(1805-1865)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \mathbf{k} \\ E &\sim \omega \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$E = \hbar \omega$$

eikonál: $\varphi(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \text{grad} \varphi \\ \omega &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

eikonál-egyenlet:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$



$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad \text{diszperziós reláció}$$

ω mozgásállandó:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$$

rövidített eikonálegyenlet:

$$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \text{grad} \varphi)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{k}} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

csoportsebesség

Hamilton-féle
sugáregyenletek

Ezekből paraxiális közelítésben levezethető a lencsetörvény.

Pálya

Pontmechanikában ha nem érdekel az időfüggés, csak a pálya, akkor az azonos energiájú pályák közül választ a Maupertius-elv:

részletek:

Györgyi Géza: Elméleti mechanika jegyzet



$$\delta \int \mathbf{p} d\mathbf{r} = 0$$

Ennek optikai analogonja:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Emlékeztető: $\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} |\mathbf{k}|$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

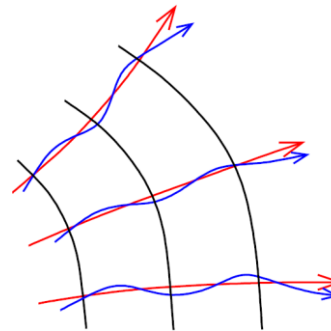
$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{k}| dl = \delta \int \frac{\omega}{c_0} n(\mathbf{r}) dl = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl$$



$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

Ez épp a Fermat-elv!

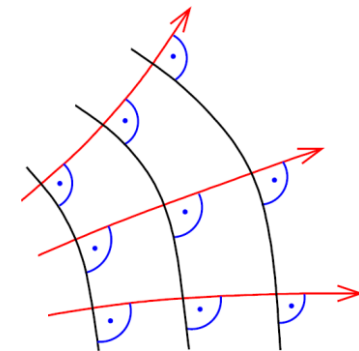
$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{k} : \mathbf{k} d\mathbf{r} = |\mathbf{k}| dl$



A valódi pályán és a szomszédos pályákon azonos az optikai úthossz: **erősítő interferencia**

Rövidített eikonál:

$$\psi = \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl \sim \text{optikai úthossz}$$



Melyik a legrövidebb út? Mindenütt **merőleges** a $\psi(\mathbf{r}) = \text{konstans}$ felületekre. A Fermat-elv által meghatározott fénysugarak a fázis-(eikonál-) felületek **ortogonális trajektóriái**.

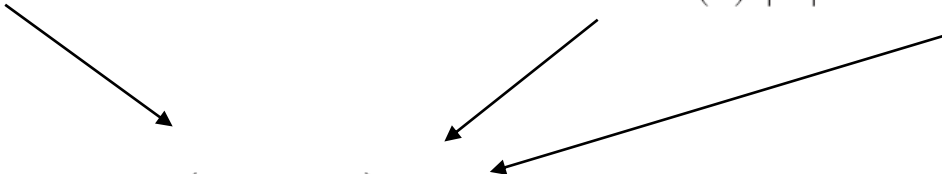
Valami hiányzik az analógiából

Pontmechanikában a Lagrange-függvény: $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}} - L \quad \boxed{L = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - H}$$

Keressük meg az optika Lagrange-függvényét!

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}\mathbf{k} - \Omega$$



$$L = \left(c(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) \mathbf{k} - c(\mathbf{r}) |\mathbf{k}| \equiv 0$$

$\Omega = c(\mathbf{r}) |\mathbf{k}|$ $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}} = c(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$

A „Lagrange-függvény” azonosan zérus!

hullámgennyet

Schrödinger-egyenlet

Hullámoptika

Hullámmechanika

eikonál
közelítés



WKB közelítés

Geometriai optika

Pontmechanika

eikonál-egyenlet

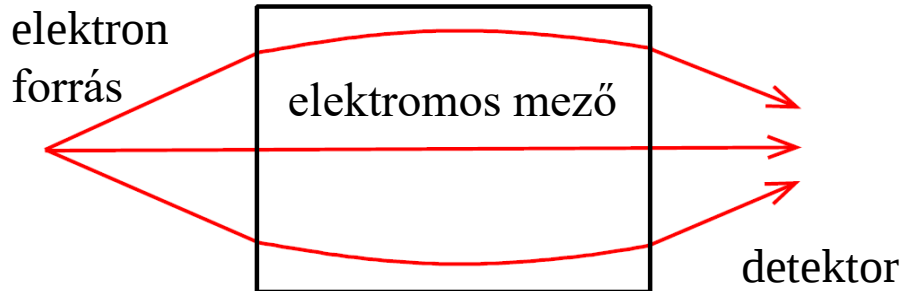
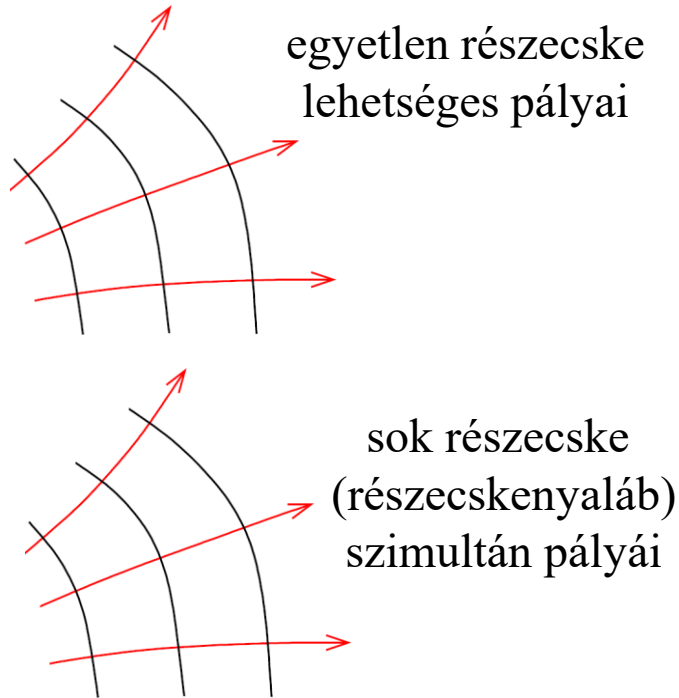
(diszperziós

reláció: $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$)

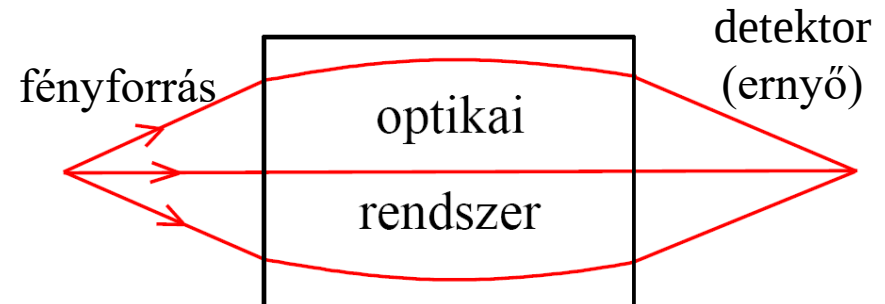
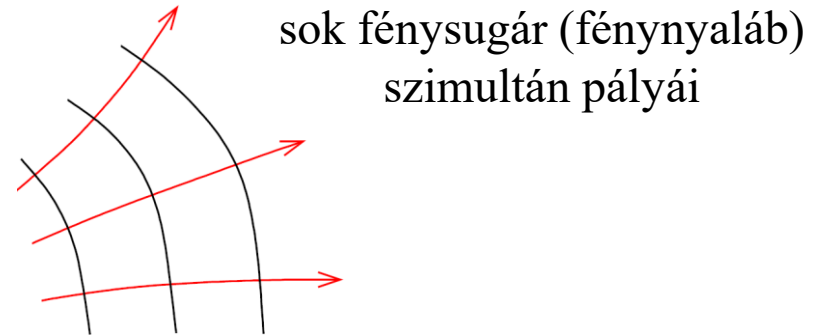
$E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$

Mire jó az optikai – mechanikai analógia?

Mechanika



Optika



Részecske-optika

Optika: Fermat-elv: $0 = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n dl = \omega \delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl \longrightarrow ?$ a mechanikai analogonja

Téves analógia: $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$ $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl = 0$ **TÉVES!!!**

Ok: $c(\mathbf{r})$ a fázissebesség, de a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ részecskesebesség a $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$ csoportsebesség analogonja.

Helyes analógia: Optika: Fermat-elv:

$$\delta \int \mathbf{k} d\mathbf{r} = 0$$

Maupertius:

$$0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

effektív törésmutató:

$$n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$$

$V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$ alkalmas megválasztásával elektrosztatikus lencsék, tükrök, stb. készíthetők.

részecske

Különbségek

optika

$n(E, \mathbf{r})$ függ a részecske energiájától,
diszperzív közeg

$n(\omega, \mathbf{r})$ diszperzió

éles képhez monoenergetikus elektronok
kellenek. $n(\mathbf{r})$ nincs korlát

éles képhez monokromatikus
fény kell.

$n > 1$, mert $C < c_0$

Elektronmikroszkóp

Felbontóképesség félynél: $\delta \sim \lambda \sim 10^{-7} - 10^{-6} \text{ m}$ baktérium

Elektronmikroszkóp:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Elég nagy gyorsítófeszültséggel tetszőleges kis hullámhossz érhető el.

- vírusok
- molekulák
- atomok
- kvarkok a proton belsejében 10^{-15} m

Vigyázat: a képkalkotás itt is hullámjelenség, de QM szerint az elektron is hullám!

Vigyázat: kis méreteknél a szóróobjektumok is kvantumosak

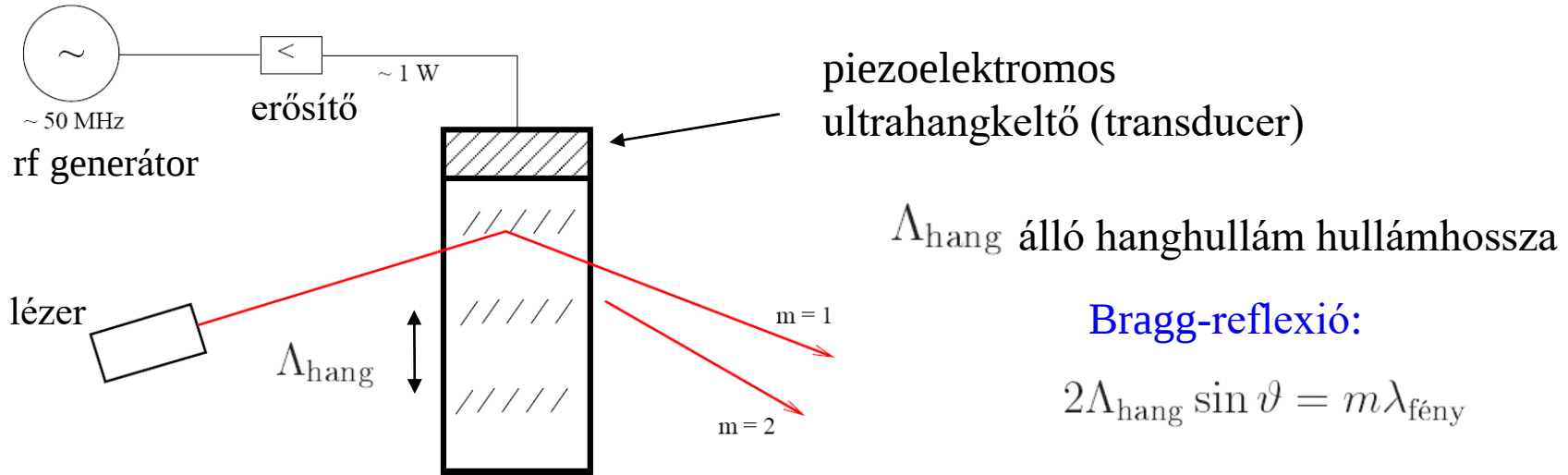


kvantummechanikai szóráselmélet



Akusztooptika

A változó törésmutatót nagy amplitúdójú **álló** sűrűség hullám hozza létre, álló ultrahanghullám.



Kis hangintenzitás: szinuszos sűrűséggrács: csak $m = 1$

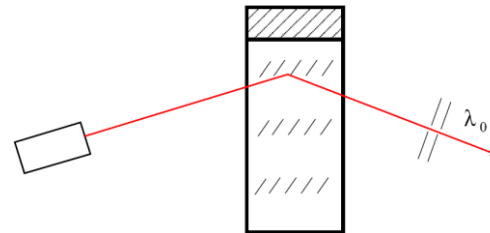
Nagy hangintenzitás: a szinusz torzul $m = 2$ és 3 is észlelhető

$$\Lambda_{\text{hang}} \sim \frac{600 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \sim 10^{-5} \text{ m} \quad \longrightarrow \quad 2\vartheta \sim 2 \sin \vartheta \sim \frac{\lambda_{\text{fény}}}{\Lambda_{\text{hang}}} \sim 0,1 \text{ rad} \sim 5^\circ$$

$$\lambda_{\text{fény}} \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Ha a bejövő hangfrekvenciát változtatjuk, a szög lassan változik:
mechanikai mozgó alkatrész nélküli SCANNER

A Bragg-feltétel adott szögre csak éles frekvencián teljesül: **akusztooptikai szűrő**, TV-ben használják

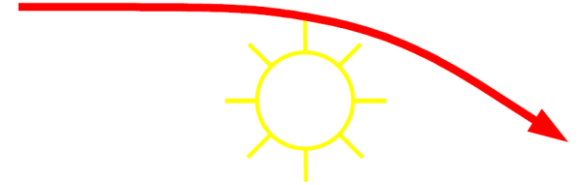


A fény egy haladó hanghullámon Doppler-eltolódást szenved: Raman-Nath-effektus

Befolyásolja-e a GRAVITÁCIÓ a fény terjedését?

- a) Newtoni fény-golyó elmélet: igen
- b) Klasszikus elektrodinamika: nem
- c) Általános relativitáselmélet: igen

a téridő „görbült”, a fény a legegyenesebb vonalon terjed, de ez görbe → **effektív törésmutató**



Ez csak közelítés, gyenge sztatikus gravitációs térben jól működik.

Mechanikai analógia: Newtoni gravitációs potenciális energia: $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$ $E = \frac{1}{2}mc^2$

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int |\mathbf{p}| dl = \delta \int \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} dl = \delta \int \sqrt{2m[E - m\Phi(\mathbf{r})]} dl = \\ &= \sqrt{2mE} \delta \int \sqrt{1 - \frac{m\Phi}{E}} dl \approx \sqrt{2mE} \delta \int \left(1 - \frac{m\Phi}{2E}\right) dl \sim \delta \int \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) dl = \delta \int n(\mathbf{r}) dl\end{aligned}$$

Newtoni modell: $n(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\Phi(\mathbf{r})}{c^2}$

Einstein (általános relativitáselmélet): $n(\mathbf{r}) = 1 - \frac{2\Phi(\mathbf{r})}{c^2}$
2-es szorzó

Spec. eset: fényterjedés csillag mellett: $\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

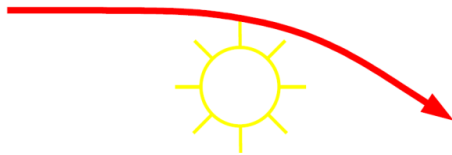
$$n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \equiv \boxed{1 + \frac{b}{r}}$$

$$\boxed{b = \frac{2GM}{c^2}}$$

Schwarzschild-sugár

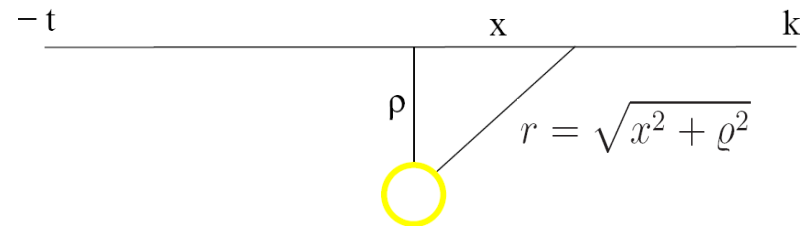
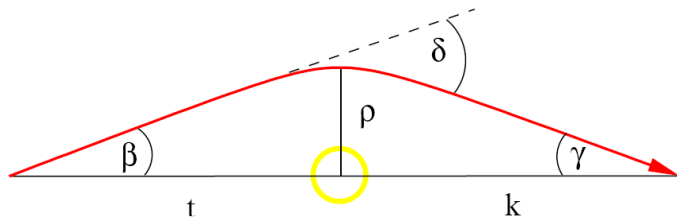
Nap esetén: $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$ $\longrightarrow b = 3 \text{ km}$ $b/R_{\odot} \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

Shapiro-effektus: a gravitációs téren áthaladó fény **késik**



$$\varphi = \int n(r) dl = \int \left(1 + \frac{b}{r}\right) dl = \int dl + b \int \frac{dl}{r} = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

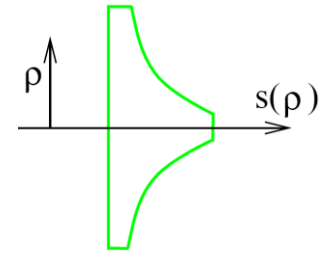
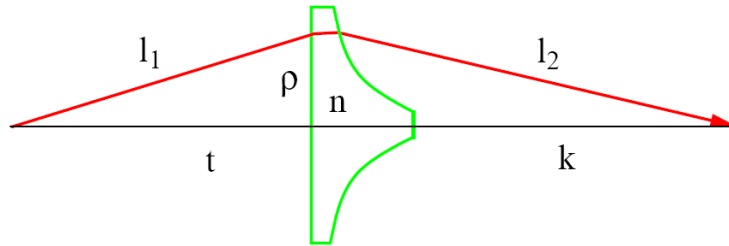
szabad terjedés



$$\Delta\varphi = b \int \frac{dl}{r} = b \int_{-t}^k \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \varrho^2}} = b \left[\text{arsh} \frac{x}{\varrho} \right]_{-t}^k \approx b \left(\ln \frac{2k}{\varrho} + \ln \frac{2t}{\varrho} \right) = b \ln \frac{4kt}{\varrho^2} = 2b \ln \frac{2\sqrt{kt}}{\varrho}$$

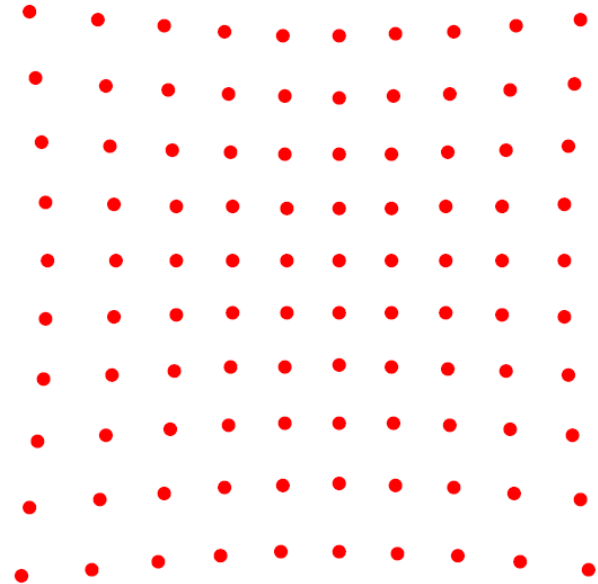
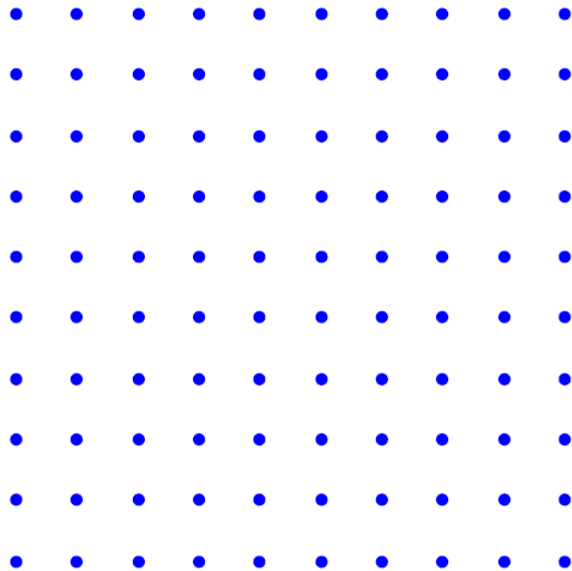
$k, t \gg \varrho$

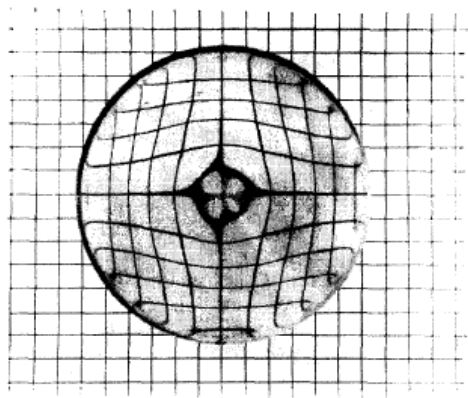
Szimuláljuk az időkéseletet egy **lencsével**!
Hengerszimmetrikus logaritmikus lencse:



Homogén sűrűségű gömb gravitációs lencsehatása

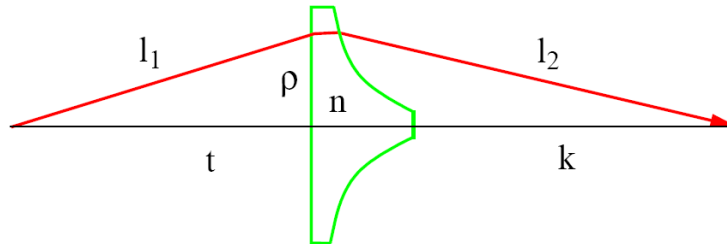
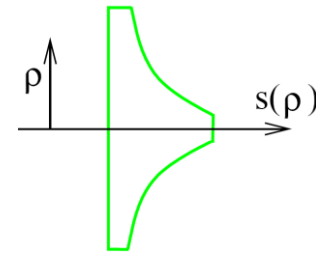
Négyzetrács torzulása





Logaritmiikus profilú műanyag lencse,
R. J. Adler et al. AJP.63, 536 (1995)

Szimuláljuk az időkéseletet egy **lencsével!**
 Hengerszimmetrikus logaritmusos lencse:



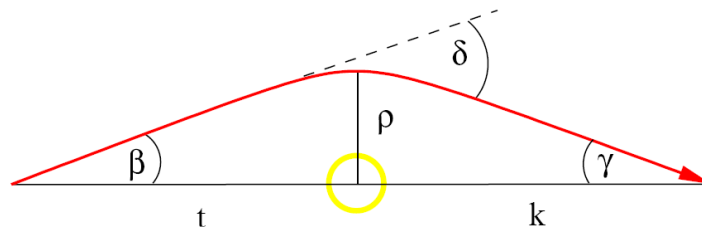
$$\varphi = \int n dl = l_1 + l_2 + ns(\varrho) = \sqrt{t^2 + \varrho^2} + \sqrt{k^2 + \varrho^2} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{k^2}} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$$\approx t \left(1 + \frac{\varrho^2}{2t^2}\right) + k \left(1 + \frac{\varrho^2}{2k^2}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho} = t + k + \frac{\varrho^2}{2f} + 2b \ln \frac{\kappa}{\varrho}$$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$

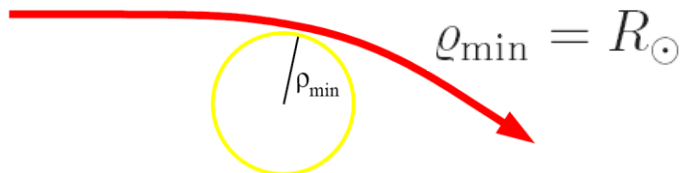
irreleváns állandó

Fermat-elv: $\delta\varphi = 0 \rightarrow$ a görbe minimumhelye: $\varrho = R = \sqrt{2fb}$



$$\beta = \frac{\varrho}{t} \quad \gamma = \frac{\varrho}{k}$$

$$\delta = \alpha + \gamma = \varrho \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\varrho}{f} = \frac{\varrho}{\varrho^2/(2b)} = \frac{2b}{\varrho}$$



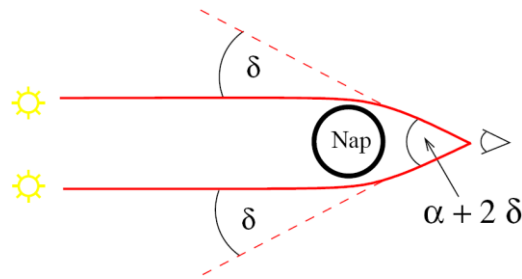
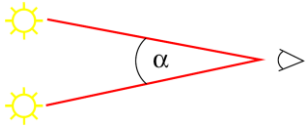
$$\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$$

Einstein, 1915
 kimérte Eddington, 1919

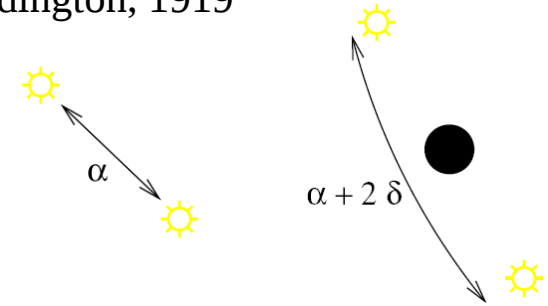
(Newtoni-modell: fele ekkora érték jött ki!)

Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

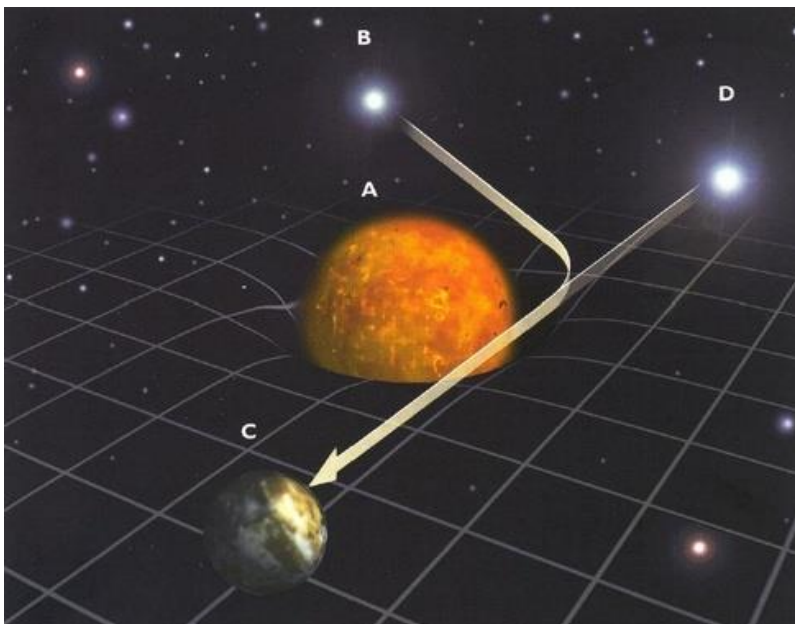
1) Fényelhajlás a Nap mellett: $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető
Eddington, 1919



Amikor a fény nem jó irányból érkezik

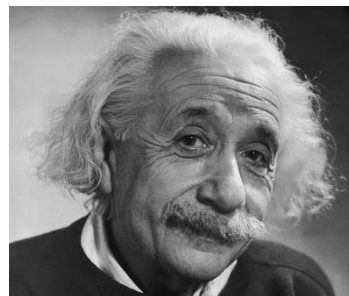


a nagy tömegű testek
gravitációs hatása eltéríti a fénysugarat

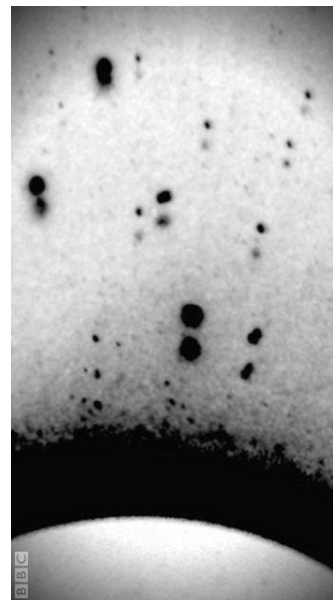
ezért a pontszerű forrásokat rossz
irányban látjuk

a kiterjedt objektumok képe pedig
eltorzul

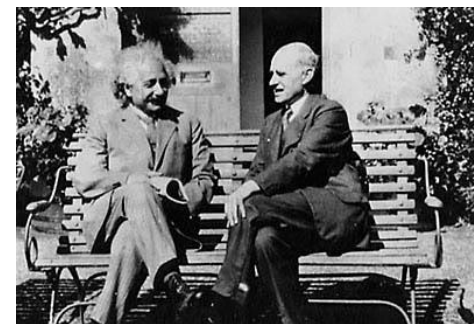
ezt a jelenséget Einstein általános
relativitáselmélete jósolta meg



először Arthur Eddington
mérte meg 1919-ben



csillagok képe eredeti
és a Nap által eltérített
pozícióban

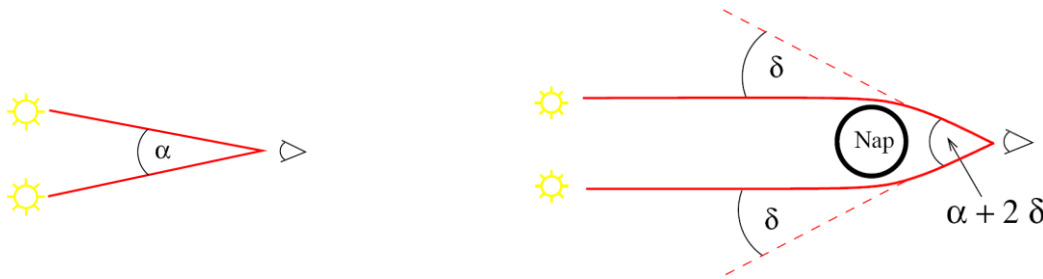


ezt megbeszéltük!

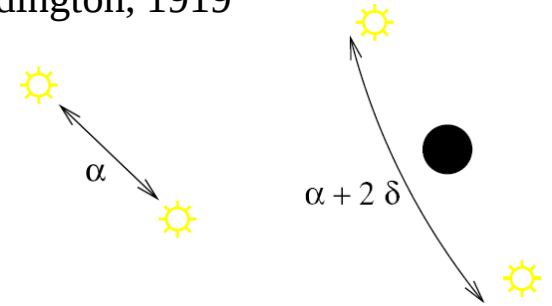


Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

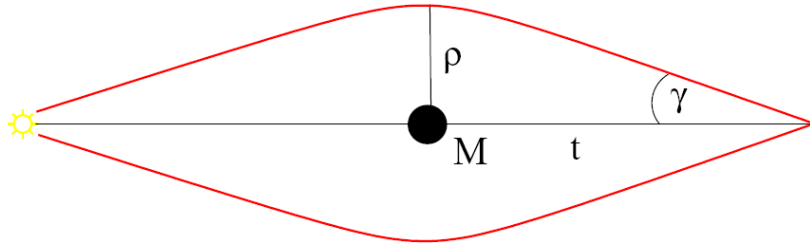
1) Fényelhajlás a Nap mellett: $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető
Eddington, 1919



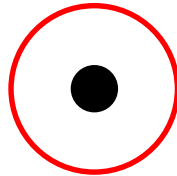
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



hengersizimmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű
fényes gyűrű



Amikor a fény nem jó irányból érkezik

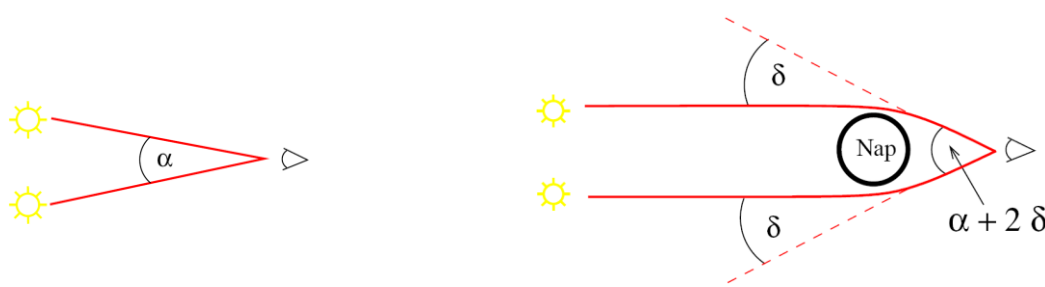
példák a gravitációs lencsehatásra

Einstein-
gyűrű

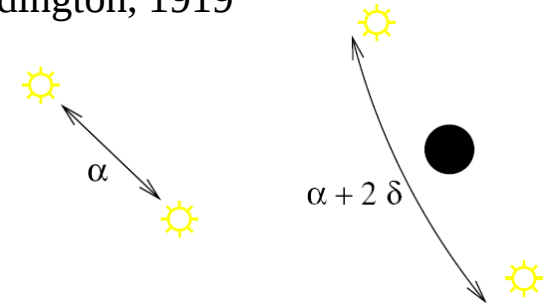


Gravitációs fényelhajlás – csillagászati tapasztalatok

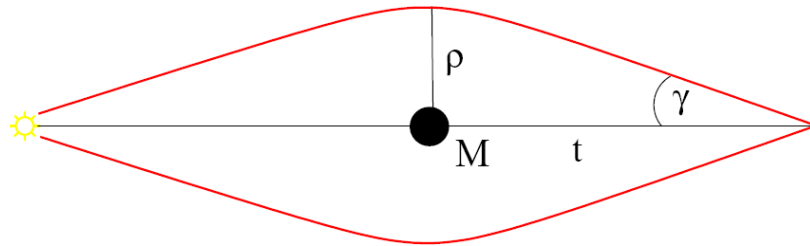
1) Fényelhajlás a Nap mellett: $\delta = \frac{2b}{\varrho} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 1,7''$



Napfogyatkozáskor fényképezhető
Eddington, 1919



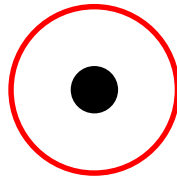
2) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengelyen:



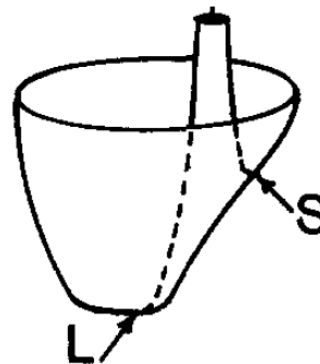
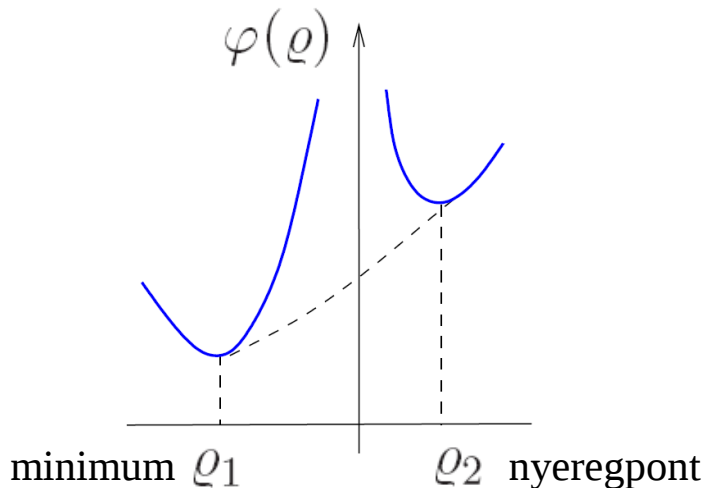
hengersizimmetrikus helyzet

$$\gamma = \frac{\varrho}{t} = \frac{\sqrt{2fb}}{t}$$

Einstein-gyűrű
fényes gyűrű



3) Távoli, kicsi objektumok az optikai tengely mellett:



Két kép keletkezik!

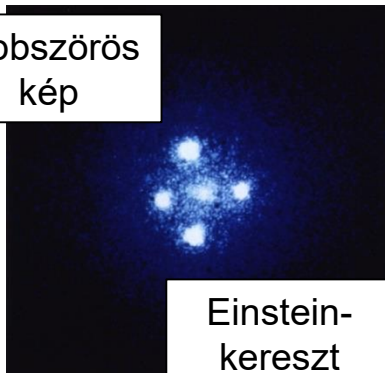


Amikor a fény nem jó irányból érkezik példák a gravitációs lencsehatásra

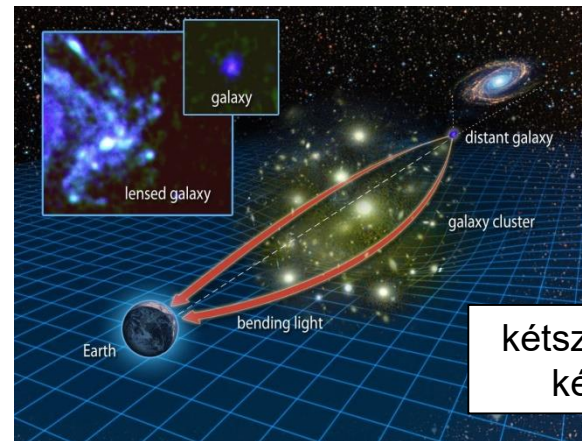
Einstein-
gyűrű



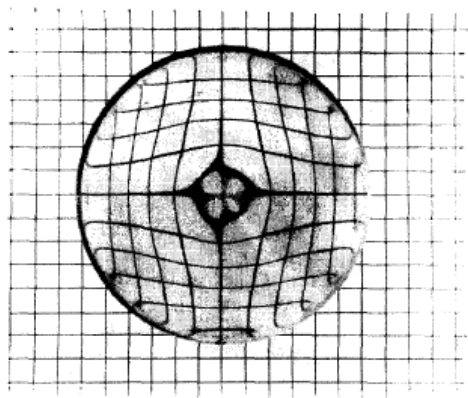
többszörös
kép



Einstein-
kereszt

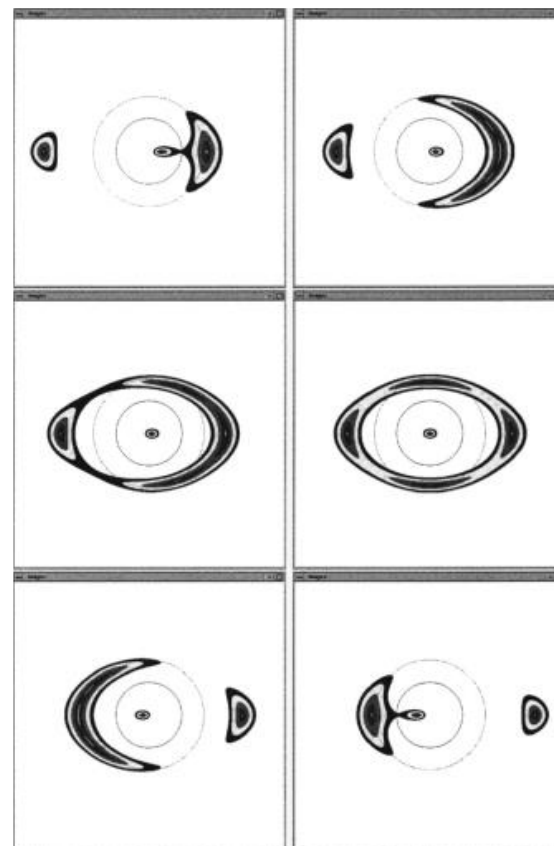
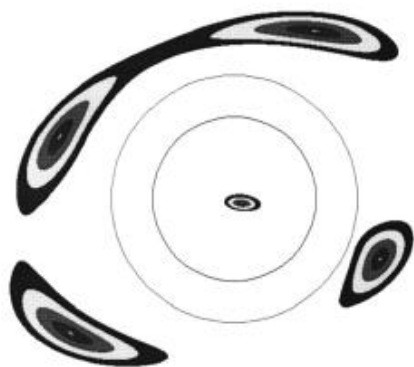


kétszeres
kép

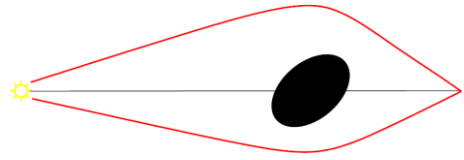


Logaritmusos profilú műanyag lencse,
R. J. Adler et al. AJP.63, 536 (1995)

Gravitációs lencseleképezés számítógépes szimulációja,
F. F. Alfaro AJP.69, 218 (2001)



4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:

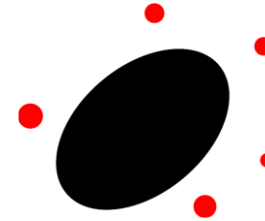


nem hengersizmetrikus

Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$ év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás



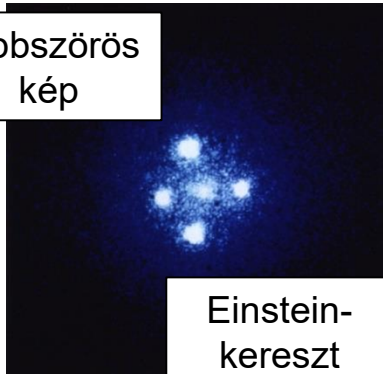
ugyanannak a távoli
objektumnak a képei!

Amikor a fény nem jó irányból érkezik példák a gravitációs lencsehatásra

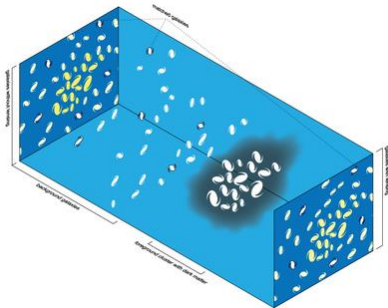
Einstein-
gyűrű



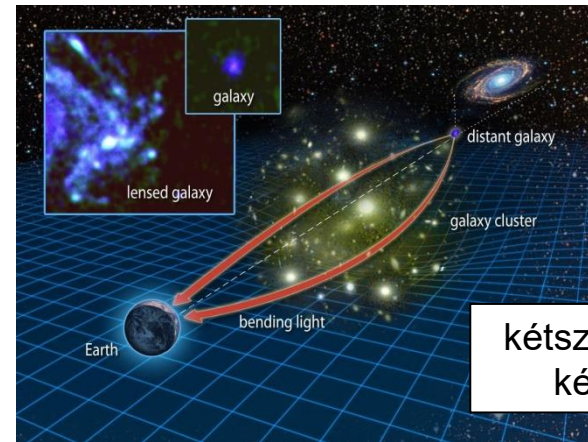
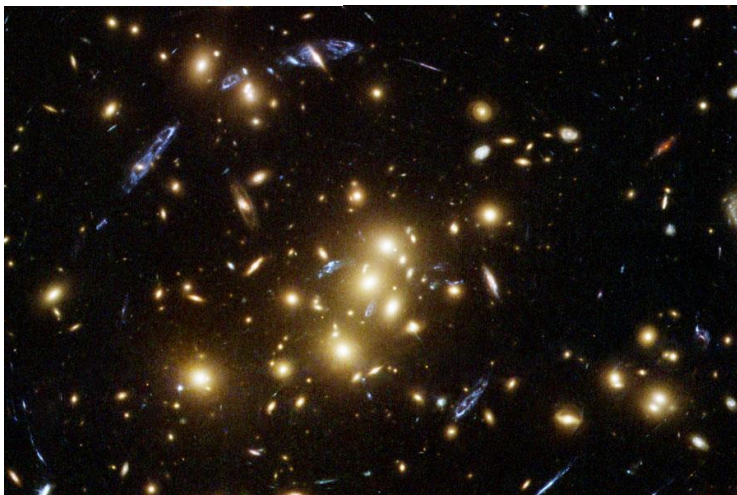
többszörös
kép



Einstein-
kereszt



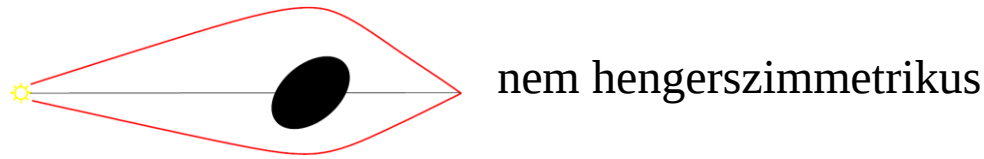
a háttérgalaxisok
ívéssé torzítása



kétszeres
kép



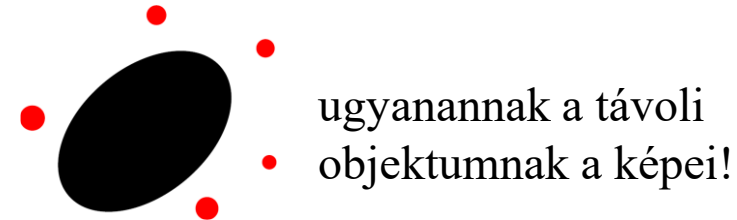
4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színeképük

$\Delta t \sim 1$ év is lehet!

Többszörös, torz képalkotás



Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! Felfedezve 2006-ban ✓

Amikor a fény nem jó irányból érkezik

**...és ezért azt is látjuk,
amit nem láthatunk**

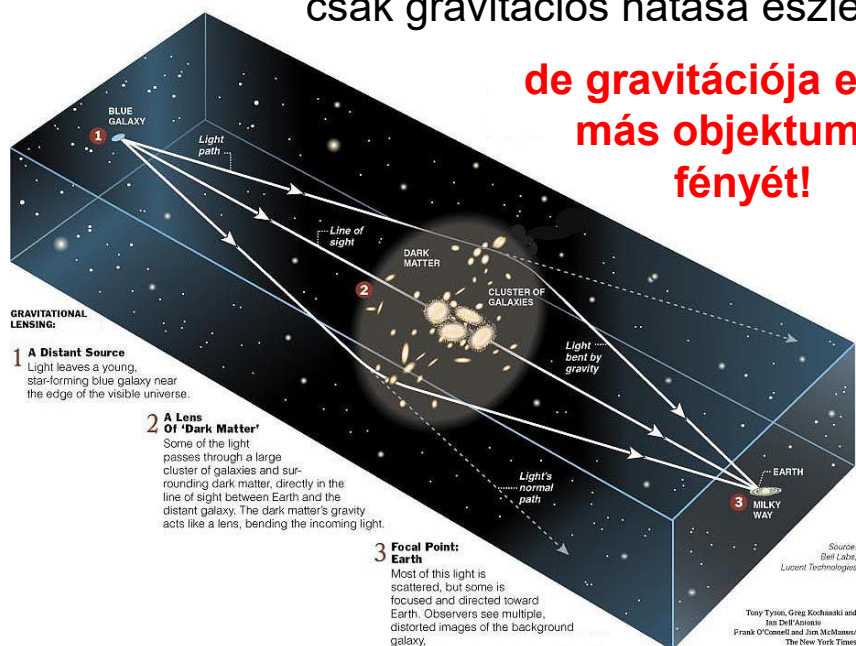
Az Univerzum anyagának kb. 24 %-a

sötét anyag

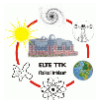
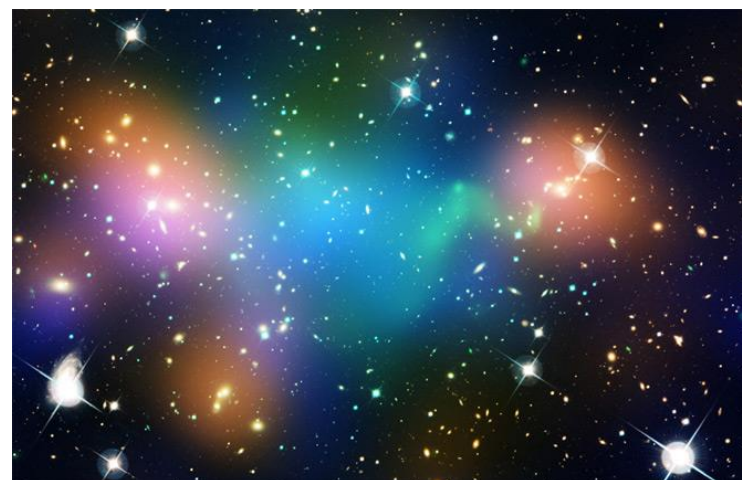
A sötét anyag nem bocsát ki fényt,
tehát nem látható

csak gravitációs hatása észlelhető

**de gravitációja eltéríti
más objektumok
fényét!**

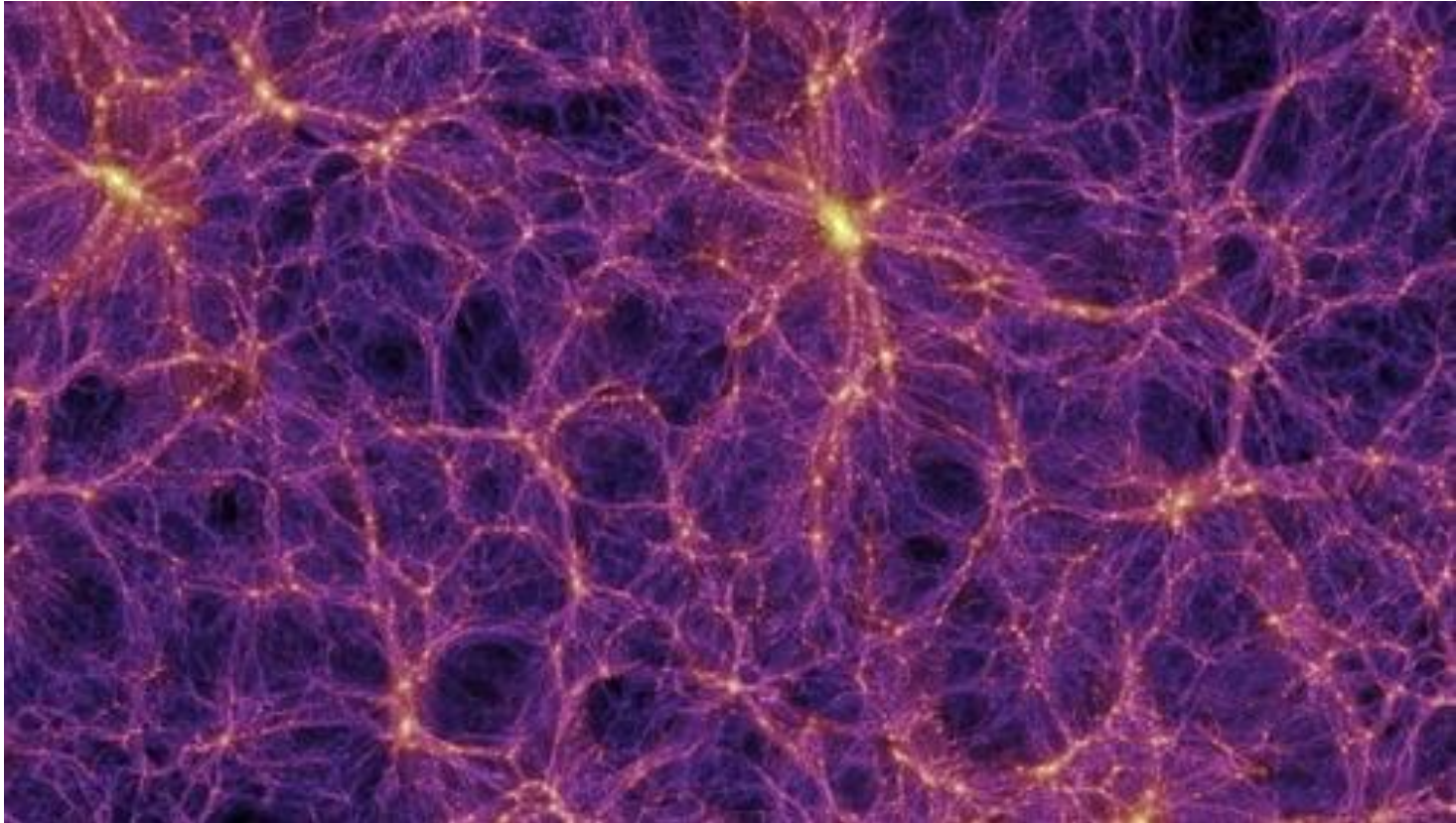


**a láthatatlan sötét anyag
eloszlásának feltérképezése**

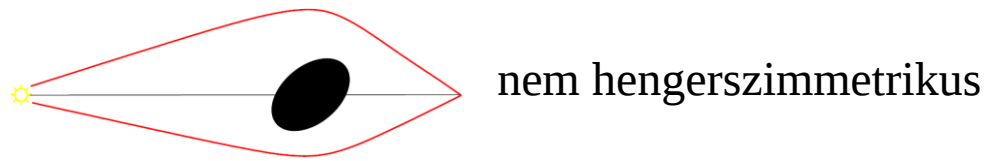


A sötét anyag eloszlása az Univerzumban

2007 januári eredmény



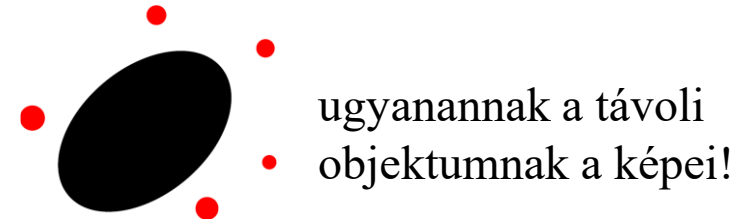
4) Kiterjedt objektum (galaxis) gravitációs lencsehatása:



Honnan tudjuk? pl. egyforma a színekük

$\Delta t \sim 1$ év is lehet!

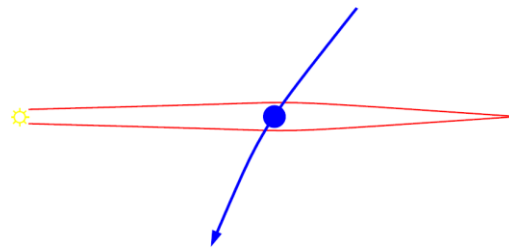
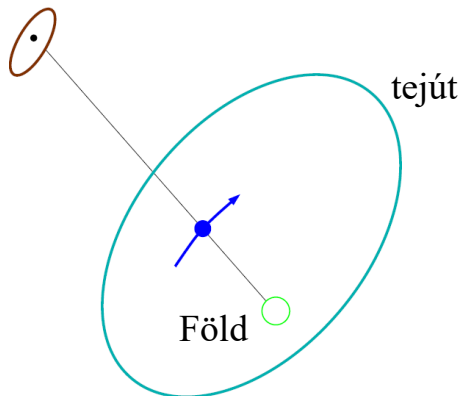
Többszörös, torz képalkotás



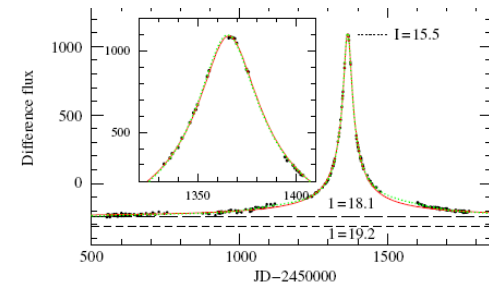
Gyorsan változó objektumok (kvazárok, szupernovák): TV-film, pár hónap múlva ismételhető, más szögből nézve! Visszaszámolás: a képek optikai vizsgálatából következtetni lehet a lencsehatást létrehozó tömegeloszlásra, össztömegére. És ha nincs ott semmilyen galaxis? Akkor az a **sötét anyag**! Felfedezve 2006-ban ✓

5) Mikrolencse: kicsiny, csillagszerű objektum halad el egy távoli csillag előtt; a felbontás kicsi, nincs többszörös kép, de a fókuszálás miatt megnő az intenzitás.

Magellán-felhő



Mi okozta: barna törpe, elvetélt csillag (túl könnyű a fúzióhoz)



Mikrolencse-statisztika → a Galaxis anyagának 10%-a barna törpe! (1997)

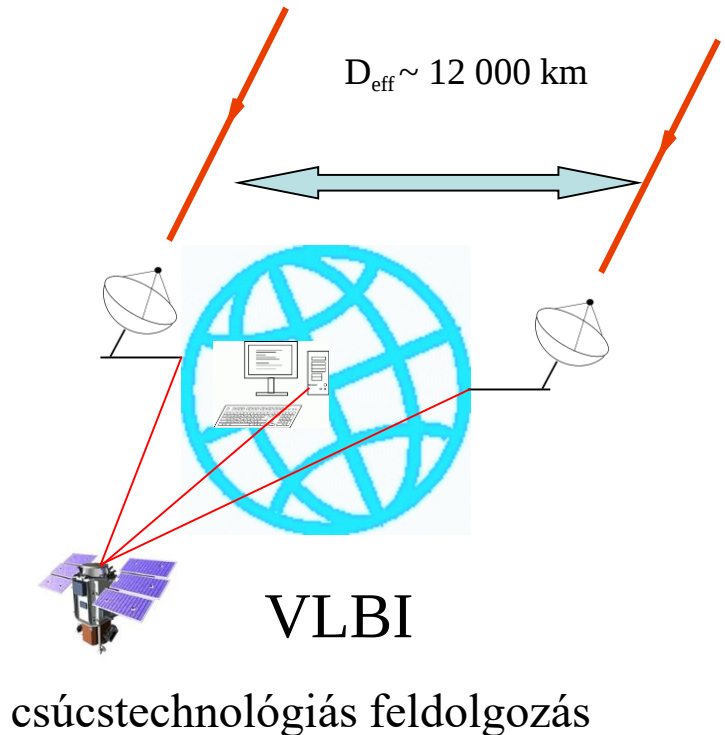
6) Kisebb objektumok: bolygó

Jupiter, 2003 - elfedett egy távoli kvazárt (nagyon távoli, nagyon pontszerű forrás)

Mikrohullámú tartomány: detektálás: VLBI (Very Large Based Interferometer):
nagyon nagy alapvonalú interferométer



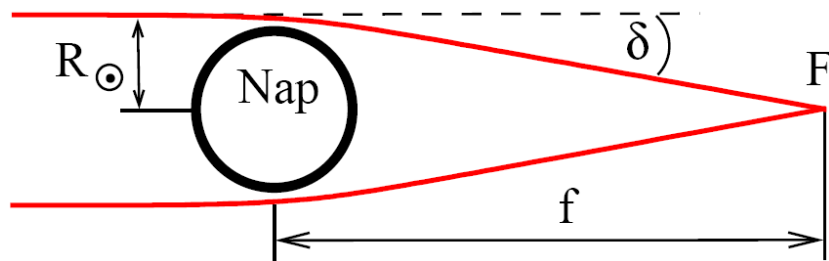
rádiótávcső-farm
szinkronizált jelfeldolgozás



7) A Nap, mint távcső:

távoli galaxis, csillag, barna törpe: véletlenszerű lencsehatás

Ehelyett tervszerű lencsézés: küldjünk detektort a kívánt képpontba!



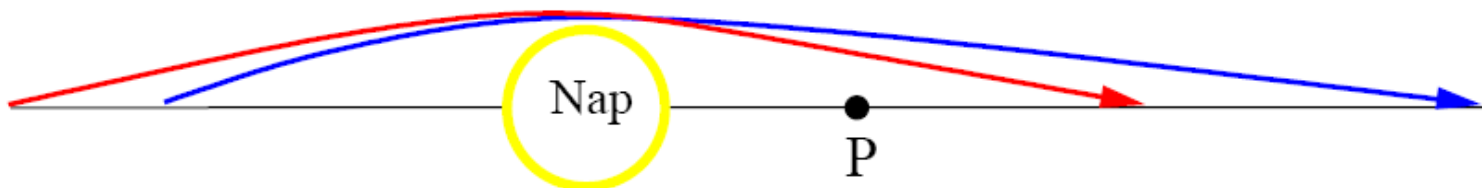
$$f = \frac{R}{\delta} = \frac{R^2}{2b} = \frac{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^3 \text{ m}} \sim 7 \cdot 10^{13} \text{ m} \sim 500 \text{ CsE}$$

1 CsE = 150 millió km

(Plutó: 30 CsE, Voyager 86 CsE)

Ionhajtóműves szonda ~ 25 év alatt ér oda

Ez csak az első képalkotás! Utána folyamatosan ~ 1000 évig.



Merre induljon a szonda? Ellenkező irányban, mint ahol valami érdekes van!

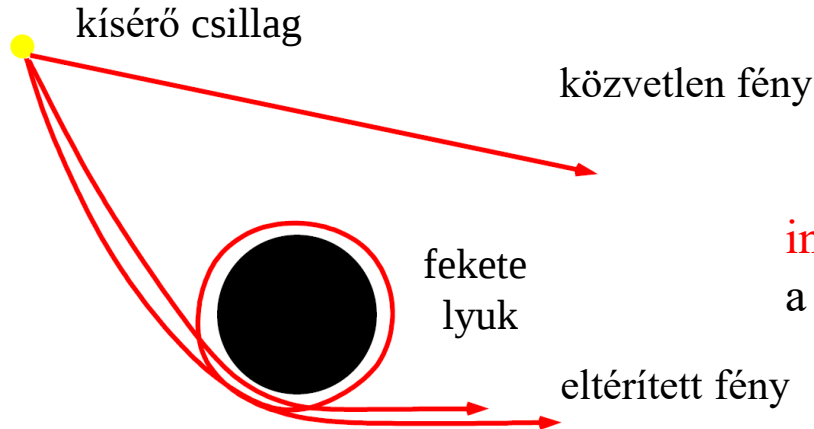
Várható felbontás: 10 fényévre lévő bolygó kontinensei

8) Fényelhajlás erős gravitációs térben:

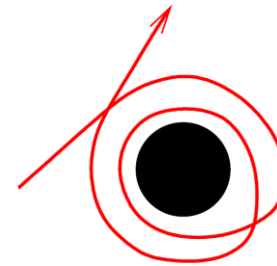
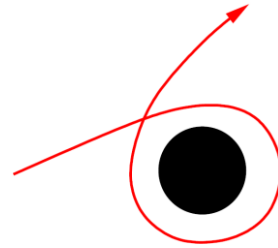
az előző közelítések b/r – től függtek, ez $\sim 10^{-6}$

fekete lyuk: $\frac{b}{r} \sim 1$

Mérési javaslat:



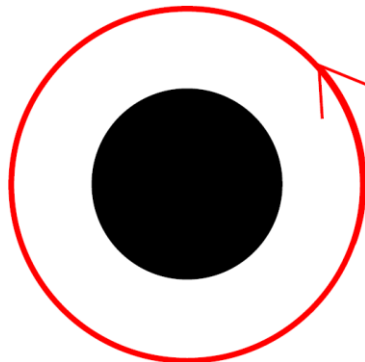
interferenciakép
a keringés miatt időben változik



többszörös
körbetekeredés
is lehetséges!

Vigyázat: nagyon gyenge jel, csak néhány fénysugár – nincs igazi képalkotás.

9) Fotongömb:



$R = \frac{3}{2} b = \frac{3GM}{c^2}$ -nél a fény körpályára áll
a fekete lyuk körül.

Ha zuhansz egy nagy feketeség felé, és oldalról hirtelen fényt láatsz,
sürgősen menekülj el! (Van még rá $1 \mu\text{s}$ – od...) ☺

Itt kezdődik a gyakorlat anyaga:

A Fermat-elv alkalmazásai:

- fénysugár pályájának számítási módszerei**
- délibáb-jelenségek**
- bolygóléggörök optikája**

Pálya számítása a Fermat-elvvel

Fényterjedés változó törésmutatójú közegben

$$\delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$$

A pálya egyenlete a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenlete.

Az idő irreleváns paraméter (nem tudjuk követni a fénysugár gyors terjedését időben)

A pályát egy tetszőleges w paraméterrel adjuk meg: $\mathbf{r}(w)$

Ekkor: $dl = |d\mathbf{r}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dw} dw \right| = |\dot{\mathbf{r}}(w)| dw = \sqrt{\dot{x}^2(w) + \dot{y}^2(w) + \dot{z}^2(w)} dw$

$$\delta \int \left[n(\mathbf{r}(w)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(w)} \right] dw \quad \longrightarrow \quad \text{Euler-Lagrange-egyenlet: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dw} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Lagrange-függvény: $L(\mathbf{r}(w), \dot{\mathbf{r}}(w))$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad } n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = n(\mathbf{r}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$\frac{d}{dw} \left[n(\mathbf{r}(w)) \frac{\dot{\mathbf{r}}(w)}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|} \right] = |\dot{\mathbf{r}}(w)| \text{grad } n(\mathbf{r})$$

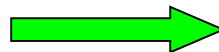
ez a pályaegyenlet: másodrendű közönséges diff. egyenlet
kezdőfeltételek: kezdeti hely és kezdeti irány.

Speciális paraméterezés: ívhosszparaméter: $w = s \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e} \quad \mathbf{e}^2 = 1 \quad |\dot{\mathbf{r}}| = 1$

$$\frac{d}{ds} [n(\mathbf{r}) \mathbf{e}] = \text{grad } n(\mathbf{r})$$

$$n \mathbf{e}'(s) + \mathbf{e} \left(\text{grad } n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n$$

$$n \mathbf{e}'(s) = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}) \text{grad } n$$



$$\mathbf{e}'(s) = (I - \mathbf{e} \circ \mathbf{e}) \text{grad } (\ln n(\mathbf{r}))$$

síkprobléma: $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$

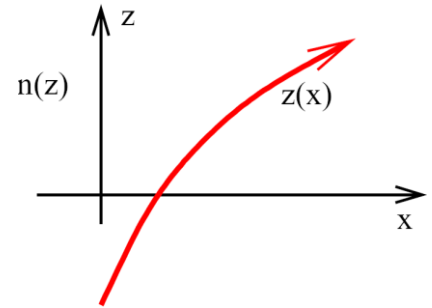
$\varphi'(s) = \dots$
egyetlen egyenlet

Speciális (egyszerű) törésmutató: pl. $n(z)$

Pálya: $z(x) \longrightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'(x)^2} dx$

$$\delta \int \left(n(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) dx \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z} = n'(z) \sqrt{1 + z'(x)^2} \\ \frac{\partial L}{\partial z'} = n \frac{z'}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \end{cases}$$

$L(z, z')$



Euler-Lagrange-egyenlet: $\frac{d}{dx} \left(\frac{n(z(x)) z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right) = n(z(x)) \sqrt{1 + z'(x)^2}$

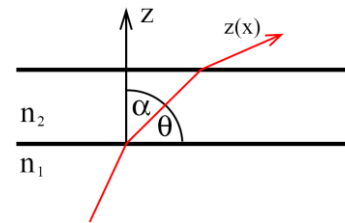
Trükk a mechanikából: L nem függ explicit x -től, ezért H mozgásállandó:

$$H = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = z' \frac{n z'}{\sqrt{1 + z'^2}} - n \sqrt{1 + z'^2} = -\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{const.}$$

Közvetlenül is kijön:

$$n(z) \sin \alpha(z) = n(z) \cos \vartheta(z) = \text{const.}$$

$$\text{tg} \vartheta(z) = z'(x) \quad \cos \vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$



Lapos sugármenet: $\vartheta \ll 1$ $\sin \vartheta \approx \text{tg} \vartheta \approx \vartheta$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz} (n(z) \cos \vartheta(z)) = n'(z) \cos \vartheta(z) + n \frac{d \cos \vartheta(z)}{dz} = n'(z) \cos \vartheta(z) - n \sin \vartheta(z) \frac{d \vartheta(z)}{dz} = \\ &= n'(z) \cos \vartheta - n \sin \vartheta \frac{dx}{dz} \frac{d \vartheta}{dx} = \cos \vartheta \left(n'(z) - n(z) \frac{d \vartheta}{dx} \right) \approx \cos \vartheta \left(n'(z) - n(z) \frac{d(\text{tg} \vartheta)}{dx} \right) = \\ &= n'(z) - n(z) \frac{d}{dx} \frac{dz}{dx} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \frac{n'}{n(z)} = \frac{d}{dz} \ln n(z)$$

ismert függvény

Olyan, mint a Newton-egyenlet

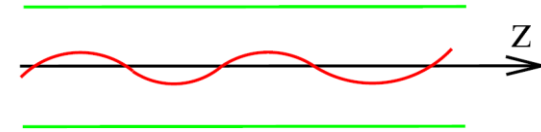
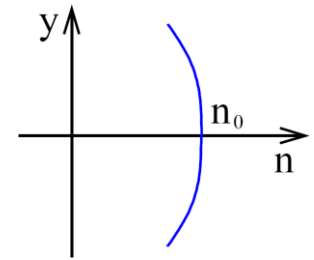
Hasonló egyenlet hengerszimmetrikus esetben is levezethető.

SELFOC lemez („önfokuszáló”, **GRIN**=GRadient in the **IN**dex):

$$n(y) = n_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right)$$

$$\frac{dn}{dy} = -n_0 \alpha^2 y \xrightarrow{|\alpha y| \ll 1} \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \approx -\alpha^2 y$$

pályaegyenlet: $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -\alpha^2 y \longrightarrow \boxed{y(z) = y_0 \sin(\alpha z + \varphi)}$

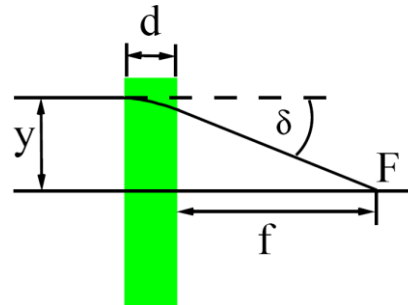


hullámvezető

Fókuszálás vékony SELFOC lemezzel:

$$\delta = -\alpha^2 y d$$

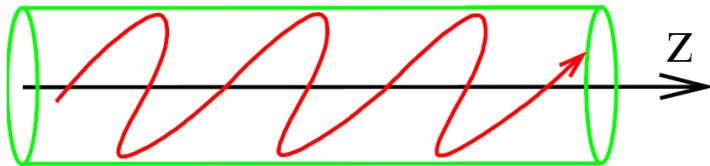
$$f = \frac{y}{|\delta|} = \frac{1}{\alpha^2 d}$$



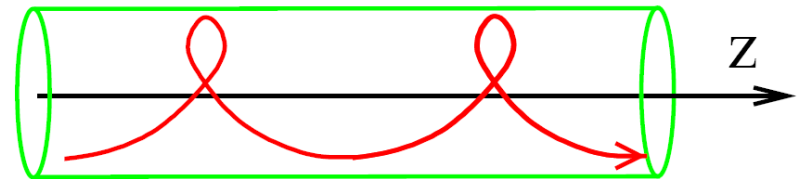
SELFOC-szál vagy rúd (hengerszimmetrikus):

Két független, merőleges komponens:

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} r^2 \right) \quad r^2 = x^2 + y^2$$

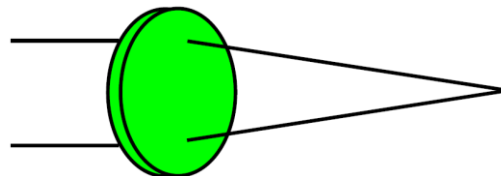


meridionális sugármenet



helikális sugármenet

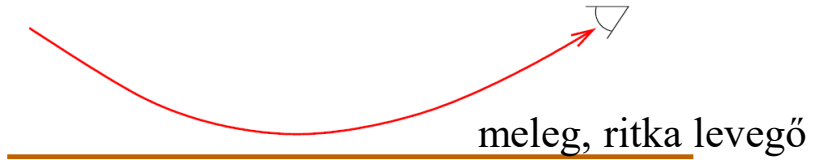
SELFOC lencse: a rúd szelete



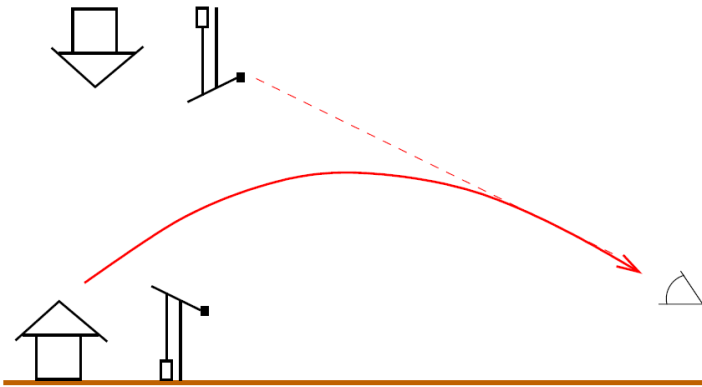
vékony, mégis nagy dioptriájú szemüveg

Alkalmazások

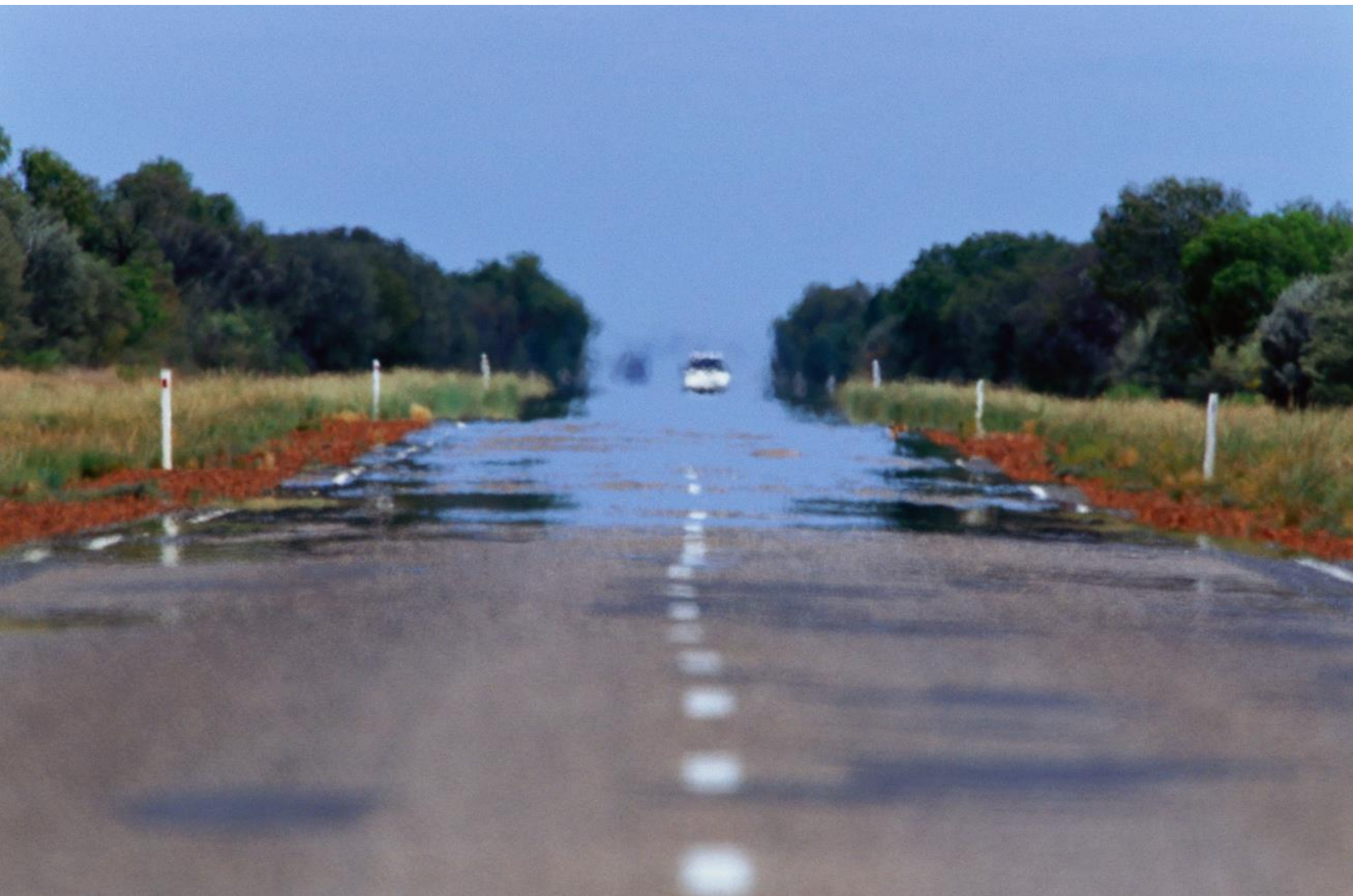
a) Légekroptika: délibáb $n(\varrho, T)$, $T(z)$, $\varrho(z) \rightarrow n(z)$

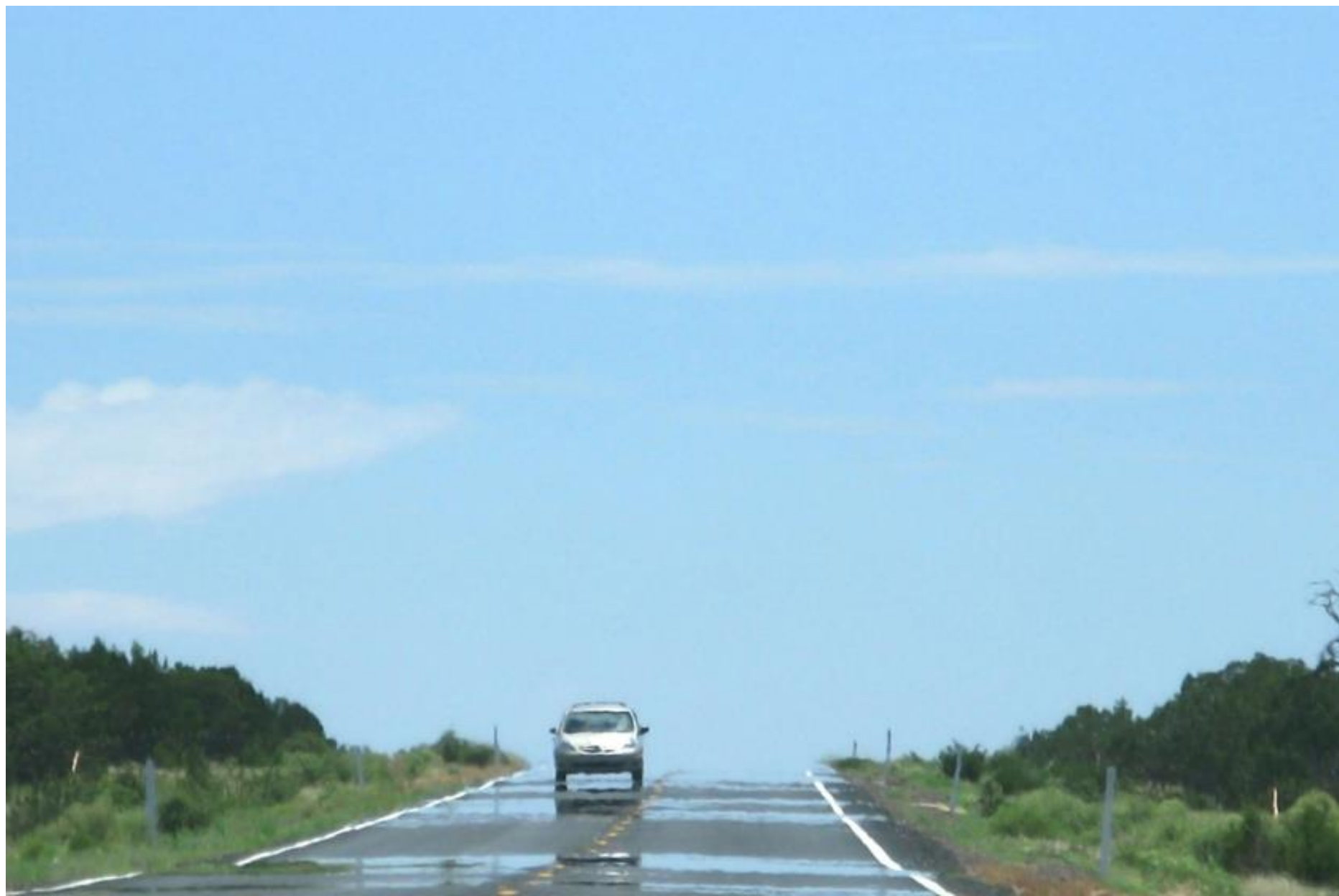


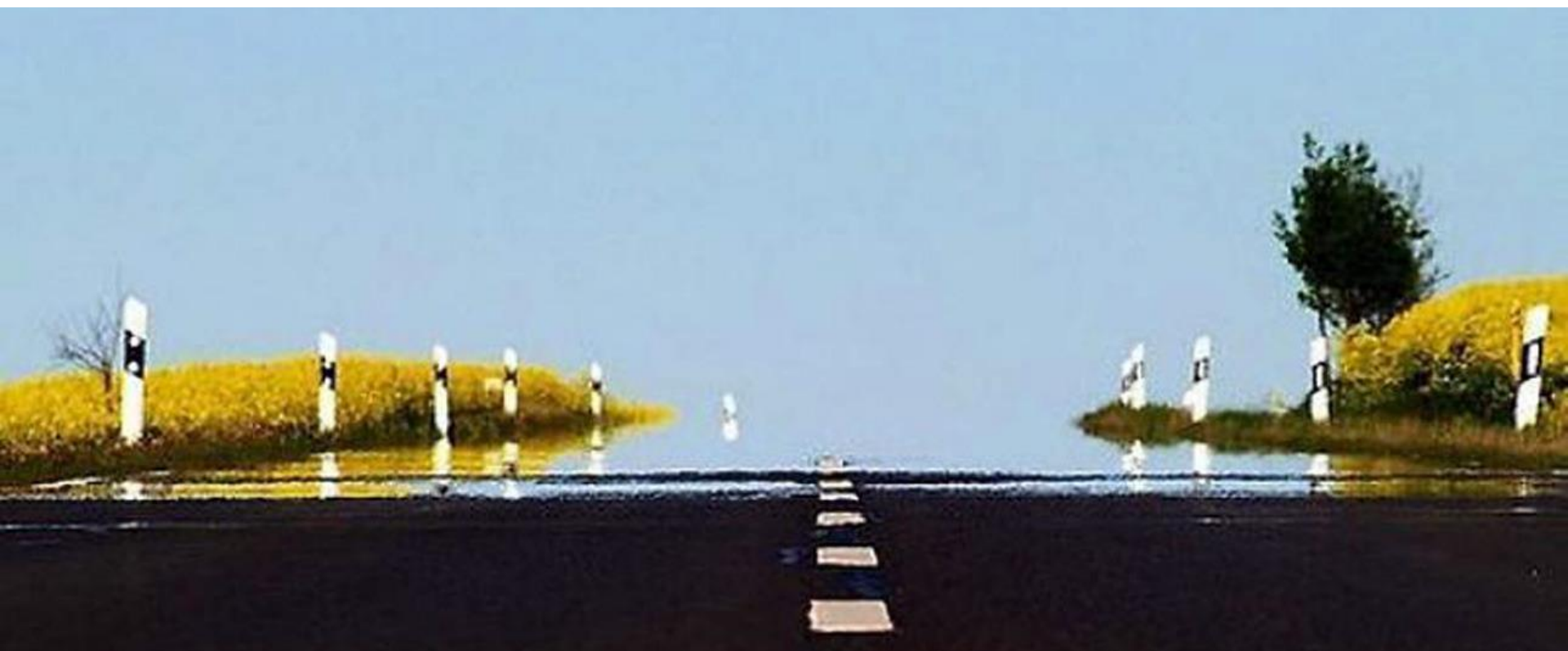
Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.



















Hot air

Duct

Cold air



Numerical Simulation of Mirages above Water Bodies

Gergely Gábor Barnaföldi, Balázs Bámer, and Anna Horváth
Wigner Research Center for Physics, 89-33 Konkoly-Thege Miklós Str., H-1121 Budapest, Hungary
(Dated: July 14, 2022)

Mirage or *fata morgana* is typically an upside-down 'mirror' image of a scenery in deserts, overheated roads, or above bodies of water in Nature. While the temperature gradient in air gets large close to the surface, it results in rapid changing of the density and the refraction index. The phenomenon is visible, when light travels through a large-scale medium with changing refractive index, therefore it gets bent towards its higher values by generating reflected pictures. A computer program, which simulates mirages above water using the method of ray tracing, has been developed and presented here in details. Results on the effect are presented by simulated images for given water-air temperature-difference cases, with values from 5°C to 1°C . Comparison of the simulations to real situation has been also provided.

I. INTRODUCTION

When light travels through a medium with a changing refractive index, it gets bent towards its higher values. This effect can produce upside down 'mirror' images of a scenery in deserts, overheated roads, surfaces, or above bodies of water. The so called *mirage* or *fata morgana* appears in stable weather conditions, if the temperature difference between the two layers is high-enough to create large refraction index gradient to observe the effect.

We implemented a computer program, which simulates mirages above water using the method of ray tracing. We built a model for the temperature profile based on measurement data, from which we calculated the refractive index of air. Rays of light are traced by solving the eikonal equation using different Runge-Kutta methods. Given a picture, a physical setup and a value for both the temperature of the water body and that of the ambient air sufficiently far from the surface (where it can be considered constant), our program can realistically reproduce images of photographed mirages. The numerical code is capable of simulating the 'mirrored' pictures of objects on large distances, from practically zero to tens of kilometres. Indeed the curvature of Earth was also taken into account in the simulations, which effect the pictures depending on the observer's height as on Fig. 1.



FIG. 1: Inferior mirage over Lake Balaton (top) and the scenery of the same area without a mirage (bottom) taken from a height of approximately 50m, so that the surface level would not get cut off by Earth's curvature.

We made a comparison between a real photographed mirage and a simulated one for the exact same location at Lake Balaton, around Keszthely, Hungary. In our example the distance between the observer and the scenery was 16.7km with water temperature equalling 5°C and ambient temperature 1°C .

The structure of the paper is as follow: we present the optical situation and the effect for different cases in Section II. The model for the temperature-profile above the water is presented in Section III. We explain the ray tracing and the numerical solution of the eikonal equation in Section IV. Finally, results by numerical simulations are shown in Section V, which are compared to natural situations.

II. REFRACTION OF LIGHT

Here we model the optical situation of mirage-formation above water surfaces. The temperature distribution over the water surface is given with ambient temperature 1°C , the water temperature is 5°C and the air pressure is 101kPa.

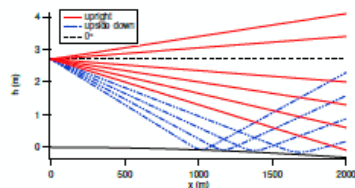


FIG. 2: Bending of light rays in air over a water surface with ambient temperature 1°C and water temperature 5°C , on a distance of 2 000m. Each ray starts from a height of 2.7m in different angles (-0.16 – -0.04° from horizontal in 0.02° steps). The surface of Earth is indicated with a solid black curve.

Figure 2 shows how rays travel with setting various

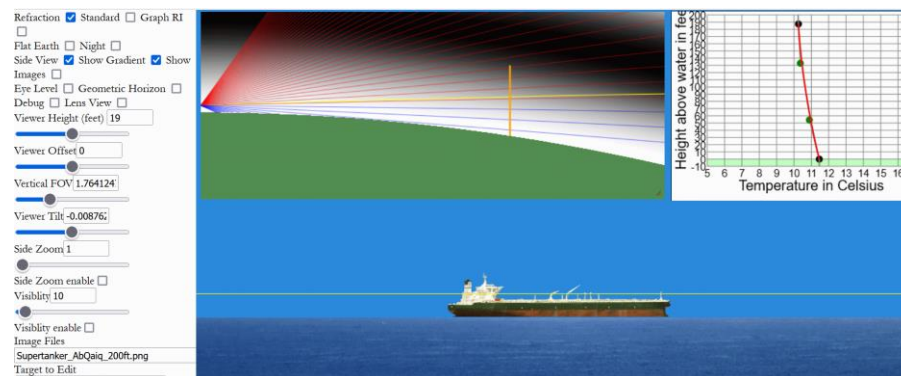
"Tán a fényes délibábot? Hisz olyat már sokat látott..." – vagy tán mégsem?

Barnaföldi Gergely
előadása

Wigner Fizikai Kutatóközpont, RMI

0:08 / 43:45

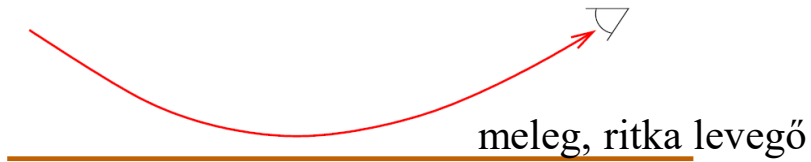
Barnaföldi Gergely: "Tán a fényes délibábot?/Hisz olyat már sokat látott..."
(Atomcsill, 2022.10.20.)



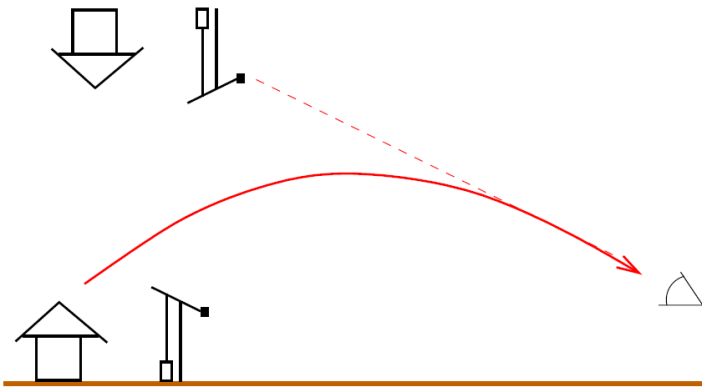
<https://www.metabunk.org/refraction/>

Alkalmazások

a) Légekoptika: délibáb $n(\varrho, T)$, $T(z)$, $\varrho(z) \rightarrow n(z)$

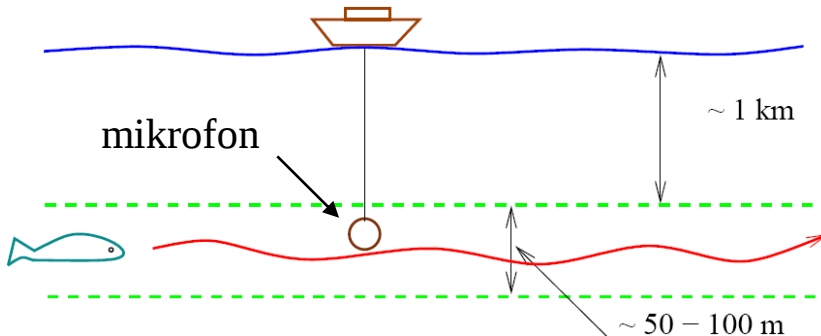


Az eget látjuk! „Tócsák” az országúton.



Távoli tájak az égen, fejjel lefelé.

b) Hangterjedés az óceánban



$n(\varrho, T)$ $T(z)$, $\varrho(z)$ z : mélység
sókonzentráció

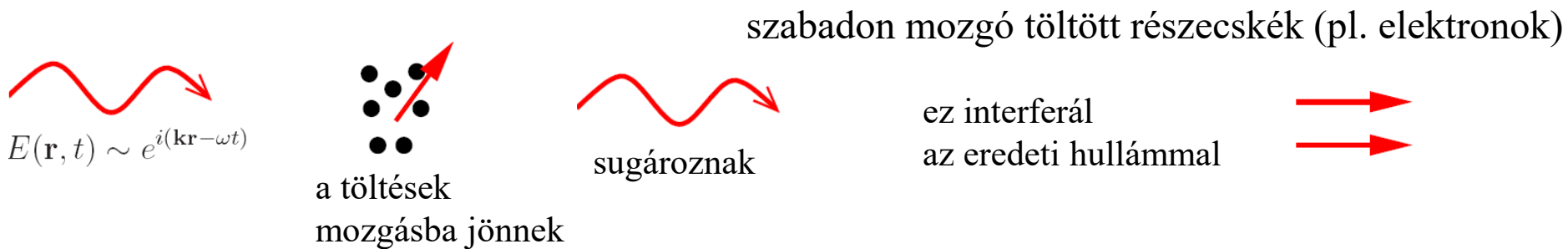
hullámvezető réteg:
a bálnák fütttyögése 1000 km-re is eljut

Itt egy későbbi gyakorlat anyaga következik:

Fényterjedés plazmában

**Az elektromos és mágneses mező hatása
a fény terjedésére**

Fényterjedés plazmában



Ugyanez az atomi mechanizmusa a közönséges „átlátszó” anyagok törésmutatójának is!

$$\mu = \mu_0 \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m\omega^2} N(\mathbf{r}) \quad \text{dielektromos állandó} \quad m: \text{elektrontömeg}$$

$$c(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu}}$$

$$e: \text{elektrontöltés}$$

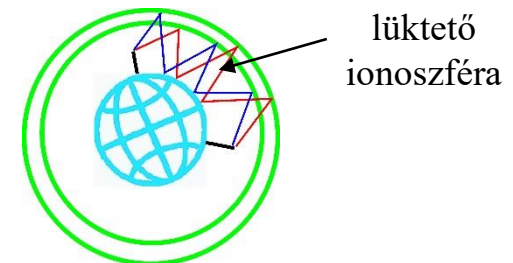
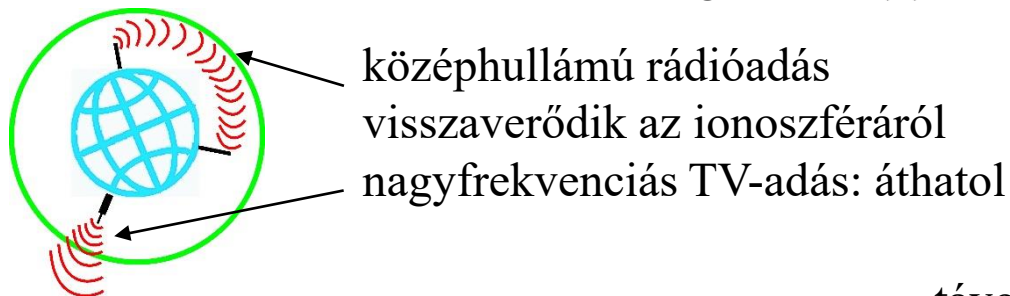
$$N: \text{elektronsűrűség } \left(\frac{1}{\text{m}^3}\right)$$

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2(\mathbf{r})}{\omega^2}$$

$$\Omega^2(\mathbf{r}) = \frac{e^2 N(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m} \quad \text{plazmafrekvencia}$$

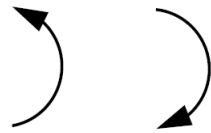
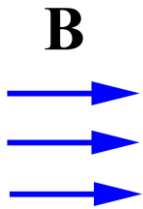
$$\omega < \Omega(\mathbf{r}), \quad n^2 < 0 \quad n \text{ képzetes: elnyelődés, teljes visszaverődés}$$

Változó elektronsűrűség: ahol $\Omega(\mathbf{r}) = \omega$, ott **tükröződés**



távoli vétel, interferencia-fütyök: fading

Külső állandó mágneses tér befolyásolja az elektronok mozgását.



$$\Omega_c = \frac{eB}{m}$$

ciklotron frekvencia

$$\omega_R(k) \neq \omega_L(k) \quad \text{fázisok szétcsúszása}$$

Cirkulárisan polarizált hullám



$$|\uparrow\rangle = |\circlearrowright\rangle + |\circlearrowleft\rangle \quad \longrightarrow \quad |\circlearrowright\rangle e^{ik_R d} + |\circlearrowleft\rangle e^{ik_L d} = |\nearrow\rangle$$

lineárisan polarizált hullám

A polarizációs sík elfordulása:
optikai aktivitás

Hol van ilyen plazma?

- ionoszféra
- csillagközi tér
- fémek belsejében elektronplazma