

Bevezetés a modern optikába

II. BSc fizikus hallgatóknak

8.

Geometriai optika – II.
(sugároptika vagy mátrixoptika)



Geometriai optika –II

(sugároptika vagy mátrixoptika)

- Egyszerű optikai eszközök, ahogy már ismerjük őket
- Mi van, ha az optikai eszközöket egymás után tesszük: leképezések egymásutánja (bonyolult)
- Gyakorlatilag fontos eset: **paraxiális közelítés** (hengerszimmetrikus, tengelyközeli)
- Sugármenet leírása: szög és tengelytől való távolság
- Tükör és törőfelület esete, linearitás
- Általános eset: lineáris transzformáció, **mátrixoptika**
- Az általános rendszer építőkövei: **szabad terjedés, gömbtükör, gömb törőfelület**
- Vékony lencse, gömbtükör: fókusztávolság definíciója. k , t és f közötti összefüggés
- Bonyolultabb eset: **vastag lencse**
- Általános eset: **fősíkok** megjelenése
- Optikai eszközök (lupe, távcső, mikroszkóp), nagyítóképesség

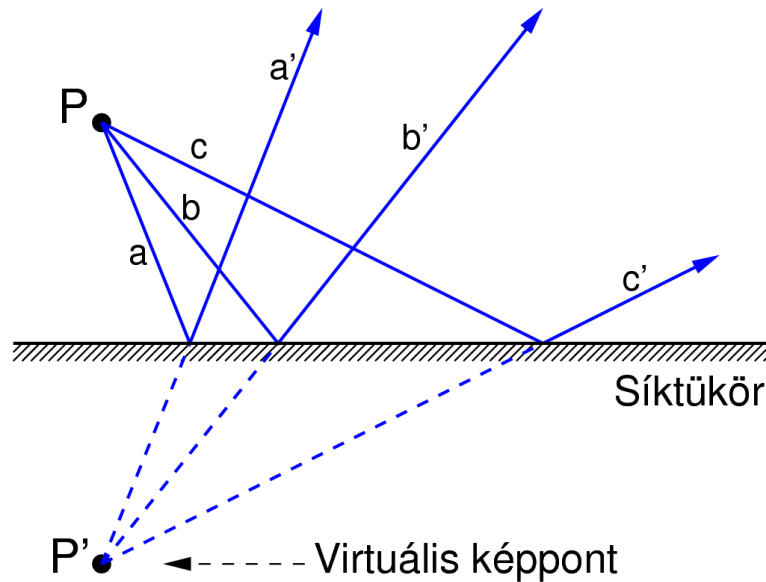
Optikai eszközök

Ha a rendszer minden releváns mérete sokkal nagyobb, mint a fény hullámhossza:
geometriai optika, fénysugarak terjedése.

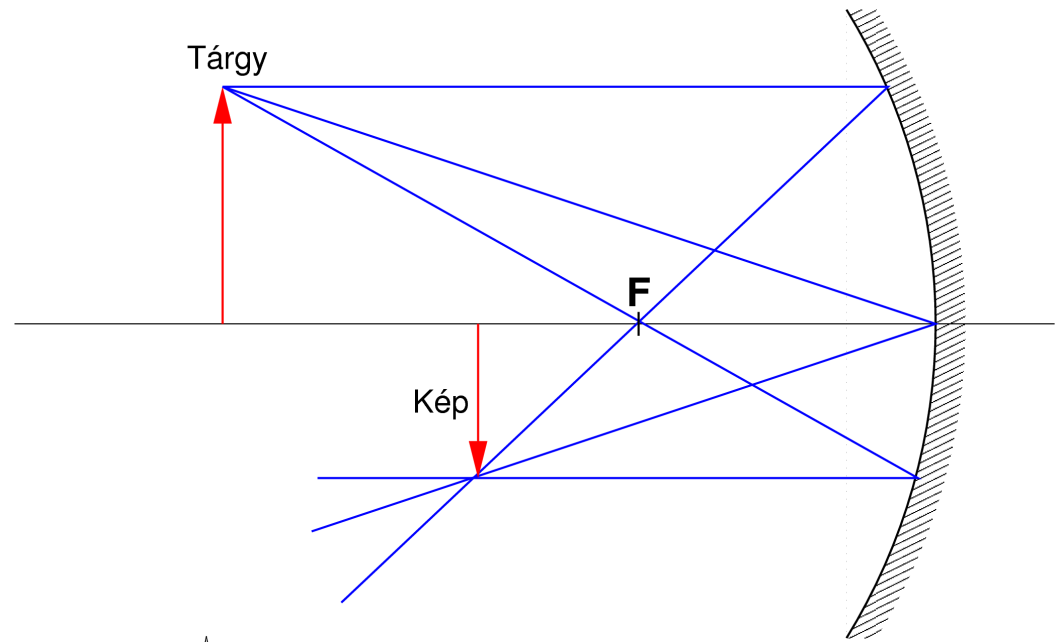
Cél: leképezés létrehozása, az egy pontból kiinduló sugarak összegyűjtése egy másik pontba.

Példák:

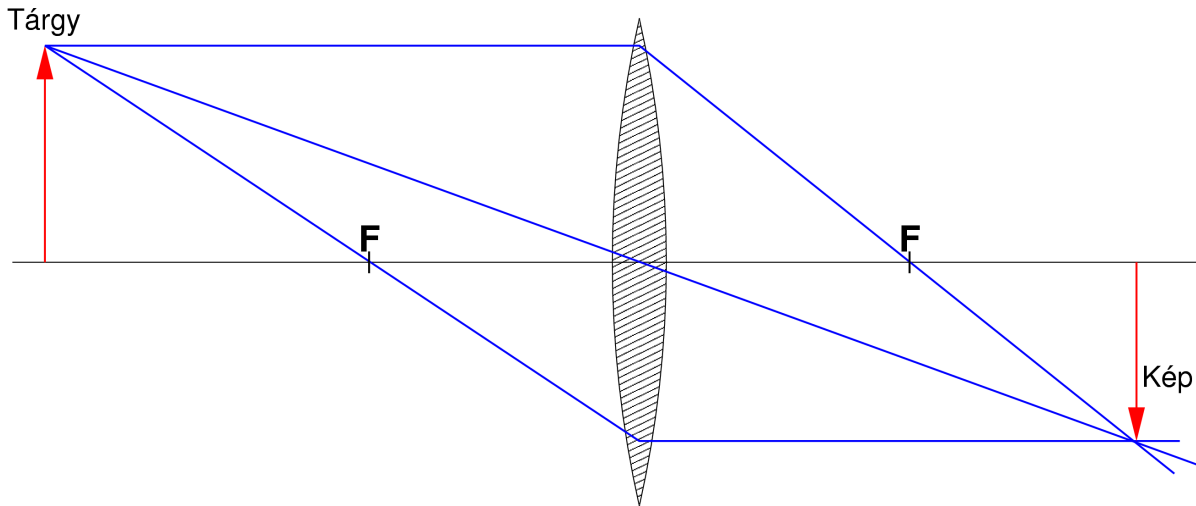
a) Síktükör leképezése (virtuális kép, technikailag nem vetíthető ernyőre):



b) Gömbtükör leképezése:



c) Lencse leképezése:



A leképezés szerkeszthető, de pl. több lencsére bonyolult és pontatlan technika!

Mi a fenti rendszerekben a közös? **Hengerszimmetria és a tengelyközei** sugarak

Paraxiális (tengelyközei) rendszerek

hengersizimetrikus leképező rendszerben tengelyközei sugarakat vizsgálunk:

- tengelytől való távolság kisebb, mint bármilyen releváns fókusz távolság vagy rendszer méret

$$\vartheta \ll 1$$

- kicsik a sugarak szögei a tengelyhez képest ($\vartheta \ll 1$)

ebben a közelítésben: $\sin \vartheta \approx \text{tg} \vartheta \approx \vartheta$

A fénysugarakat az optikai tengelytől mért y távolsággal és az optikai tengellyel bezárt ϑ szöggel jellemezzük.

Célunk: meghatározni, hogy hogyan változnak ezek paraméterek a leképezés után.

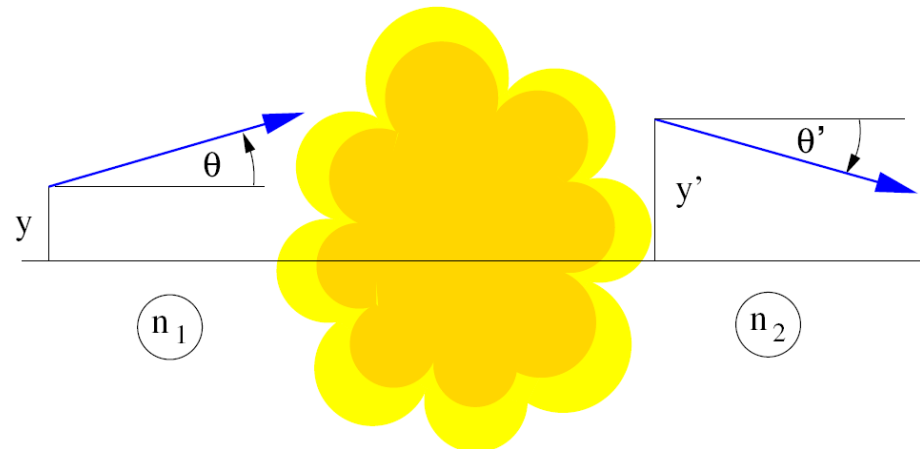
Az y , y' távolságok **előjelesek**.

Hasonlóan a **szögeket is előjelesen vesszük**:

pozitív (óramutatóval ellentétes),

negatív (óramutatóval azonos).

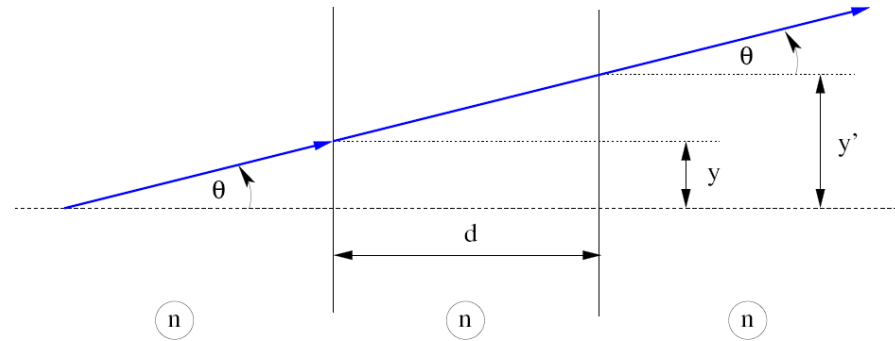
Feltesszük, hogy a fénysugarak balról jobbra haladnak, de megadjuk az összefüggéseket ellentétes irányú terjedésre is.



Mátrixoptika paraxiális közelítésben

$$\begin{pmatrix} y \\ n_1\vartheta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y' \\ n_2\vartheta' \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y' \\ n_2\vartheta' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} y \\ n_1\vartheta \end{pmatrix}$$

1) Szabad terjedés:

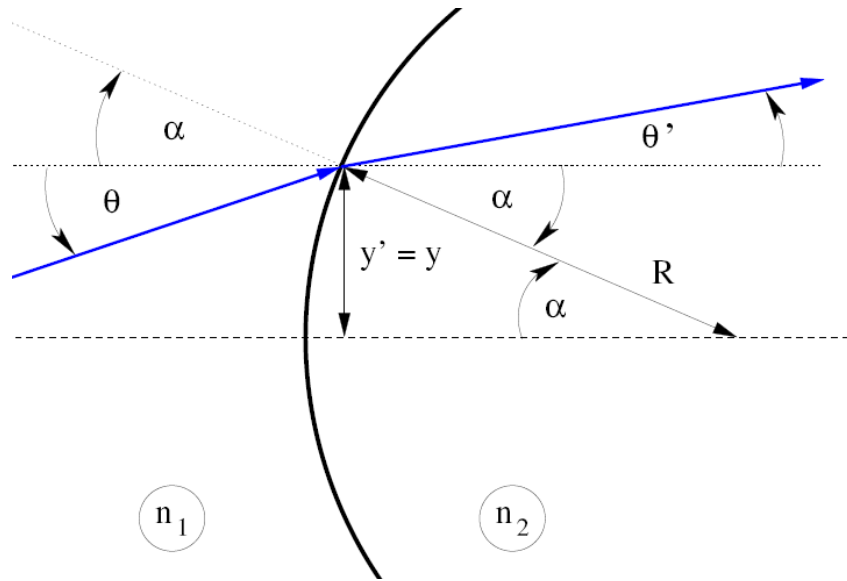


$$y' = y + d \operatorname{tg} \vartheta \approx y + d \vartheta = y + \frac{d}{n} n\vartheta \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y' \\ n\vartheta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ n\vartheta \end{pmatrix}$$
$$n\vartheta' = n\vartheta$$

$$\mathbf{M}_{szab} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \det \mathbf{M}_{szab} = 1$$

Ha a fénysugár jobbról balra halad, akkor d **negatív**!

2) Gömb alakú törőfelület:



Az ábra alapján: $\alpha \approx -\frac{y}{R}$
 $y' = y$

Snelliusz-Descartes-törvény (kis szögekre):

$$n_1(\vartheta - \alpha) \approx n_2(\vartheta' - \alpha)$$



$$\begin{aligned} y' &= y \\ n_2 \vartheta' &= \frac{n_1 - n_2}{R} y + n_1 \vartheta \end{aligned}$$



$$\mathbf{M}_{\text{törés}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$



$$\det \mathbf{M}_{\text{törés}} = 1$$

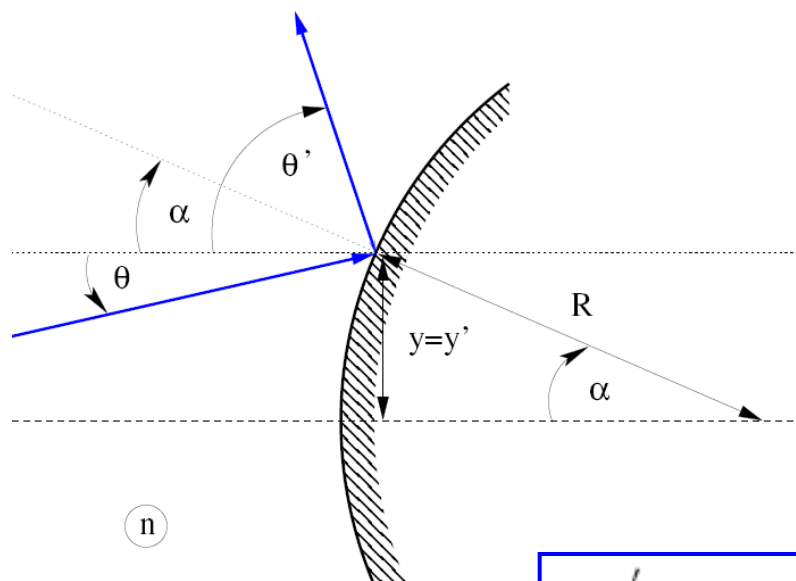
R előjel-konvenciója
 (mindegy, hogy milyen irányban
 halad a fénysugár):



$$R > 0$$

$$R < 0$$

3) Visszaverődés gömbtükrőről:



Az ábra alapján: $\alpha \approx -\frac{y}{R}$

A tükrözés miatt: $y' = y$
 $\alpha - \vartheta' = \vartheta - \alpha$

$$n\vartheta' = -\frac{2n}{R}y - n\vartheta$$

$$\begin{aligned} y' &= y \\ n\vartheta' &= -\frac{2n}{R}y - n\vartheta \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{\text{tükör}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{M}_{\text{tükör}} = -1$$

Belátható, hogy a fénysugár terjedésének irányától függetlenül a mátrix ugyanaz!

Az R előjel-konvenciója **azonos** a gömb alakú törőfelület előjel-konvenciójával (mindegy, hogy milyen irányban halad a fénysugár).

Tetszőleges paraxiális optikai rendszer elemi építőkövei:

Mind a három eset egy homogén lineáris transzformációnak tekinthető:

$$\begin{pmatrix} y \\ n_1\vartheta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y' \\ n_2\vartheta' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ n_2\vartheta' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} y \\ n_1\vartheta \end{pmatrix}$$

Szabad terjedés

$$\mathbf{M}_{szab} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Törés gömbfelületen

$$\mathbf{M}_{törés} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

Visszaverődés gömbfelületről

$$\mathbf{M}_{tükör} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}$$

A fénysugarakat követve, a mátrixokat összeszorozzuk (balról jobbra), és így kapjuk meg a teljes rendszert leíró mátrixot. Fontos: mindig a fénysugarat kövessük – hisz meg is fordulhat.

Tetszőleges paraxiális optikai rendszerre igaz: $\det \mathbf{M} = \pm 1$

A leképezés alapfogalmai

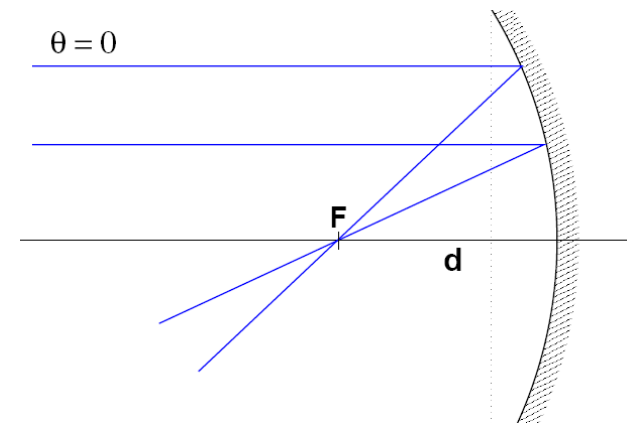
- **Fókuszpont:** minden párhuzamos fénysugarat egy pontba gyűjtünk össze, azaz y -tól függetlenül valahol az $y' = 0$.
- Egy pont **leképezése** egy másik pontba: a pontból kiinduló összes fénysugarat ϑ -tól függetlenül egy másik pontba gyűjtünk össze.

Gömbtükör fókusza:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2d}{R} & \frac{d}{n} \\ -\frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y' \\ \vartheta' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{2d}{R})y \\ -\frac{2n}{R}y \end{pmatrix} \rightarrow y' = M_{11}y$$

y-tól függetlenül $y' = 0 \rightarrow M_{11} = 0 \rightarrow d \equiv f = -\frac{R}{2}$



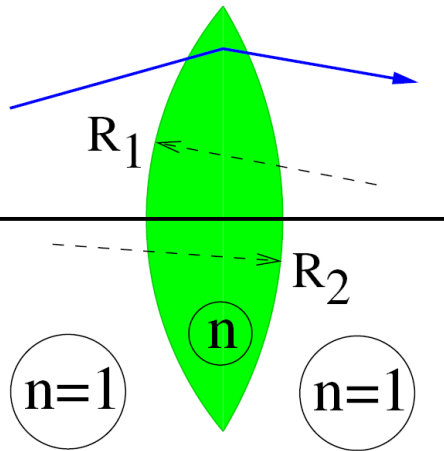
Gömbtükör leképezési törvénye (n = 1):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2k}{R} & k + (1 + \frac{2k}{R})t \\ -\frac{2}{R} & -1 - \frac{2t}{R} \end{pmatrix}$$

y' független ϑ -tól $\rightarrow M_{12} = 0 \rightarrow k + \left(1 + \frac{2k}{R}\right)t = 0$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

Vékony lencse fókuszpontja



Jobb oldali törőfelület mátrixa: $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & 1 \end{pmatrix}$

Bal oldali törőfelület mátrixa: $M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix}$

$M = M_R M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) & 1 \end{pmatrix}$

Optikai tengellyel párhuzamos fénysugár:

$$\begin{pmatrix} y' \\ \vartheta' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y M_{21} \end{pmatrix}$$

$\vartheta' = y M_{21}$

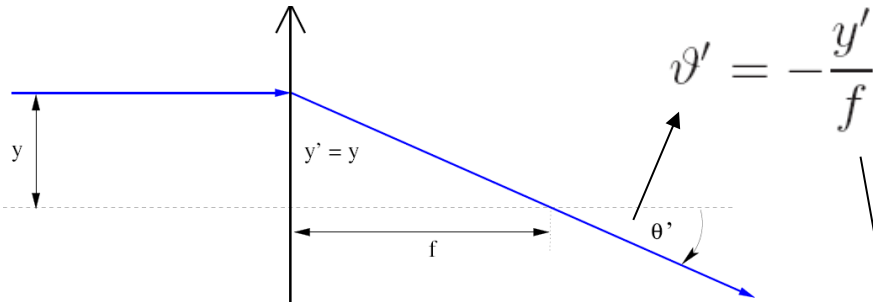
$$\frac{1}{f} = -M_{21}$$

Fókusz távolság:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Dioptria,
a fókuszáló képesség mértéke:

$$D = \frac{1}{f} \quad [1/m]$$



Vékony lencse leképezési törvényei

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{k}{f} & k + t - \frac{kt}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{t}{f} \end{pmatrix}$$

y' független ϑ -tól $\rightarrow M_{12} = 0 \Rightarrow k + t - \frac{kt}{f} = 0$

Itt is igaz a leképezési törvény:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

Összetett optikai rendszerek

Alapelv: szorozni kell a mátrixokat.

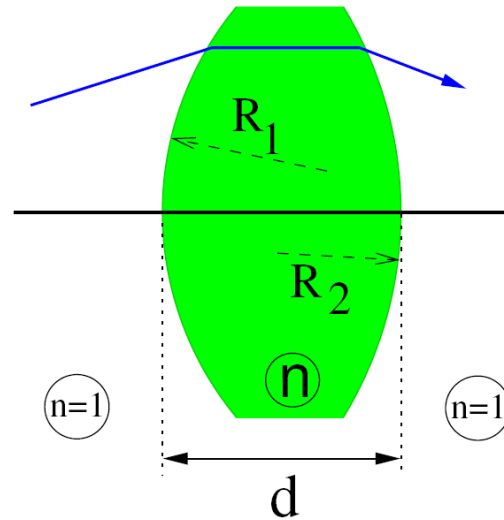
Példák:

a) Két vékony lencse egymáshoz szorosan közel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

A dioptriák összeadódnak!

b) Vastag lencse:



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - d \frac{n-1}{n R_1} & \frac{d}{n} \\ (n-1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} - d \frac{n-1}{n R_1 R_2} \right) & 1 + d \frac{n-1}{n R_2} \end{pmatrix}$$

Bonyolódik... itt mi lesz a fókusztávolság, mi a leképezés törvénye?

Általános leképezés

$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ Ezzel az a baj, hogy túl tetszőleges az, hogy hol a rendszer eleje és a vége. Próbáljuk módosítani, hogy „jó” alakja legyen!

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & k_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

t_0 és k_0 ügyes választásával:

$$t_0 = \frac{1}{M_{21}} (\det M - M_{22}) = \frac{1}{M_{21}} (\pm 1 - M_{22})$$

$$k_0 = \frac{1}{M_{21}} (1 - M_{11})$$

Házi feladat:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M_{21} & \det M \end{pmatrix}$$

Ez már nagyon egyszerű!

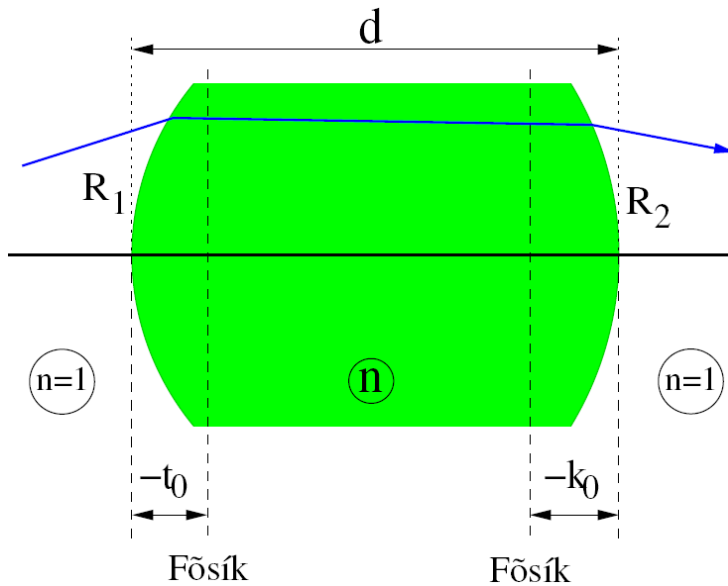
$$\det M = \pm 1$$

Korábban láttuk, hogy vékony lencsére a mátrix ilyen alakú, így a fókusz távolságra:

$$\frac{1}{f} = -M_{21}$$

Fősíkok

t_0 és k_0 jelentése: a fősíkok helyét kódolja (ennyivel kellett eltolni az eredetit).



A tárgy- és a képtávolságot a fősíkoktól kell mérni!

Ekkor ismét igaz lesz az ismert leképezési törvény (házi feladat):

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

Ismét a vastag lencse:

$$t_0 = f \frac{d}{R_2} \frac{(n-1)}{n} \qquad k_0 = -f \frac{d}{R_1} \frac{(n-1)}{n}$$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + d \frac{n-1}{n R_1 R_2} \right)$$

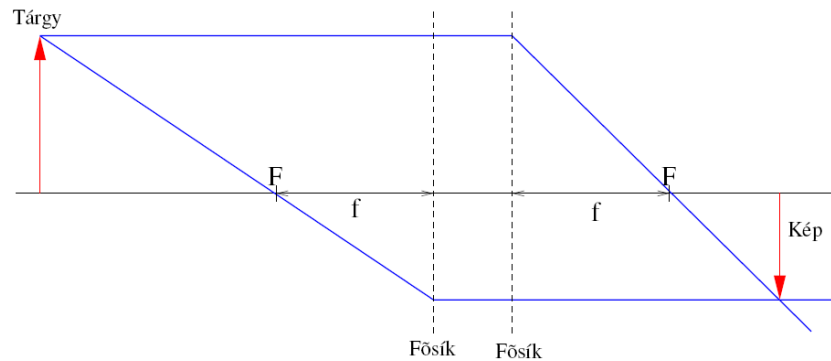
Lencsekészítők alapképlete

Mindkét felén domború lencsére t_0 és k_0 negatívak!
Azaz, mindkét fő sík a lencsén belül van.

Képszerkesztés általános esetben

Minden optika rendszer leírható a fókusz távolsággal, illetve a fősíkok helyével.

A képszerkesztés annyiban változik, hogy most a **fősíkoktól** kell mérni a fókusz távolságot, ugyanakkor a **nevezetes sugármenetek közül a középen áthaladó nem használható**.



Legáltalánosabb esetben a két oldalon különböző a törésmutató. Mátrixoptikával megmutatható, hogy a két oldalon nem azonosak a fókusz távolságok (ahol n nagyobb, ott f is annyiszor nagyobb).

Házi feladat: n törésmutatójú gömb felszínének egyik felét befoncsorozzuk.

Határozzuk meg az optika rendszer M leképezési mátrixát!

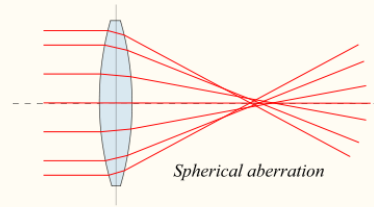
Milyen n -re viselkedik macskaszemként a rendszer? Hol használják?

(Megj.: 5 darab mátrixot kell összeszorozni.)

Lképezési hibák (nem paraxiális) rendszereknél (abberációk)

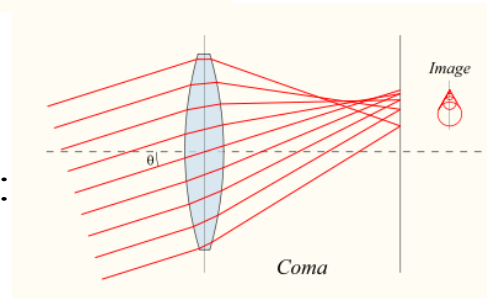
Ponthibák, vonalhibák, síkhibák; színhibák (nem szigorú osztályozás, átfedő kategóriák)

Pont \rightarrow pont



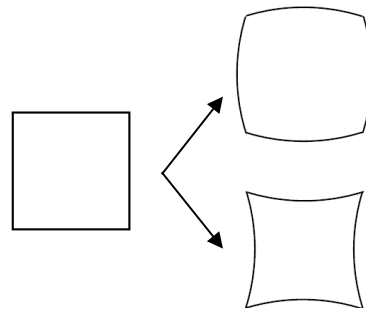
Szférikus abberáció
kausztikák (lásd később).

Koma (üstökös hiba),
tengelyen kívüli pontok leképezése):



A kép nem egy pont,
hanem egy üstököshöz
hasonló folt.

Egyenes \rightarrow egyenes



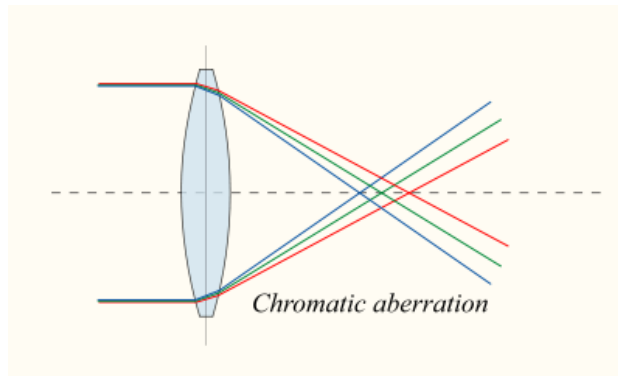
donga

torzítások

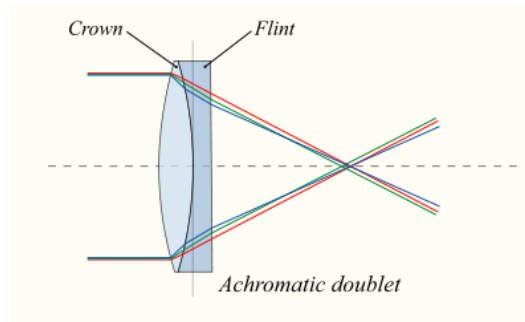
párna

Sík
sík \rightarrow

Színhibák: színfüggő törésmutató: $n(\omega)$



A lencse felbontja a fényt, mint a prizma,
kompenzálható összetett lencsékkel (**akromátok**):



Immerziós mikroszkóp

Egy nagyon nem paraxiális rendszer: $x'(x, \alpha)$ lehet független α -tól?
 Ha igen, akkor P' virtuális képe P-nek.

S & D: $\sin \vartheta' = n \sin \vartheta$

szinusz-tétel:

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} = \frac{R}{x} \\ \frac{x'}{R} = \frac{\sin \vartheta'}{\sin \alpha'} \end{cases}$$

Ha $\alpha' = \vartheta \rightarrow \frac{x'}{R} = \frac{\sin \vartheta'}{\sin \alpha'} = \frac{\sin \vartheta'}{\sin \vartheta} = n \rightarrow \boxed{x' = nR}$

ábrából, külső szög: $\beta = \alpha + \vartheta = \alpha' + \vartheta' \rightarrow \alpha = \vartheta'$

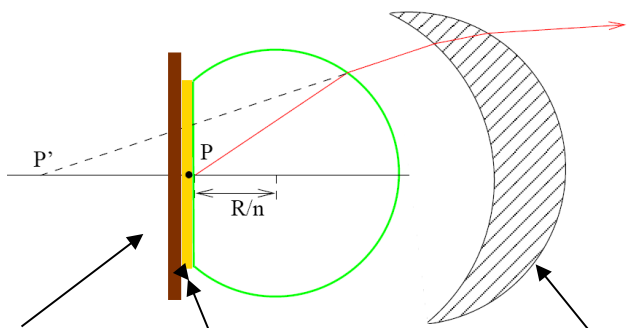
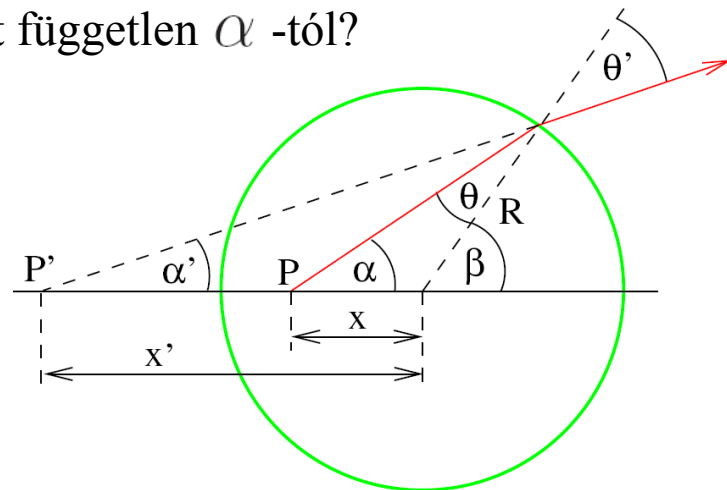
$\boxed{x = \frac{R}{n}}$

Ha tehát a P tárgyponot $x = \frac{R}{n}$ helyre tesszük,

akkor az n törésmutatójú gömb virtuális képet alkot róla P'-ben.

Ez csinál a virtuális képből nagyított, valódi képet.

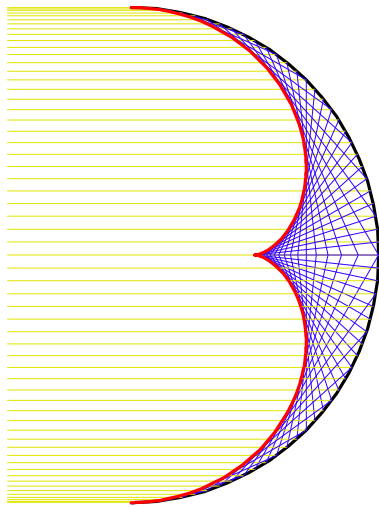
Ideális képet alkot, szférikus abberáció nélkül!



tárgylemez
 olaj-immenzió,
 n törésmutatójú

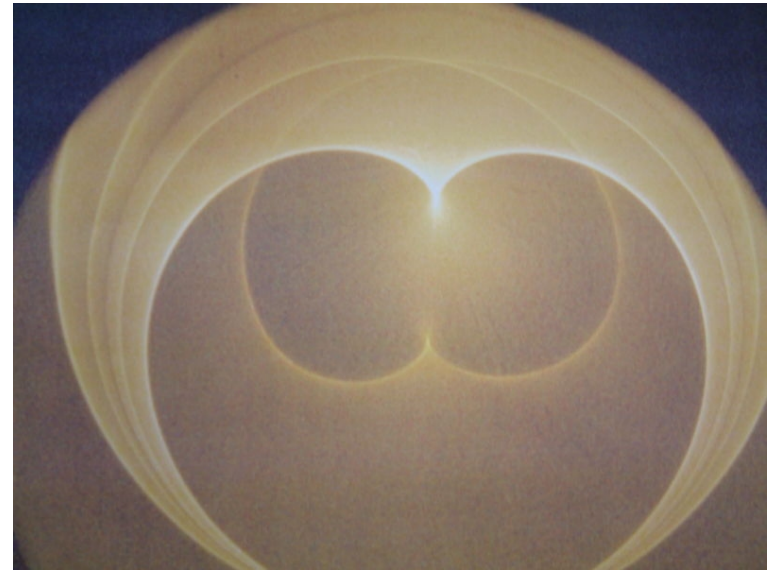
Kausztika = görbesereg burkolója

Pohár belső faláról
visszaverődő fénysugarak:

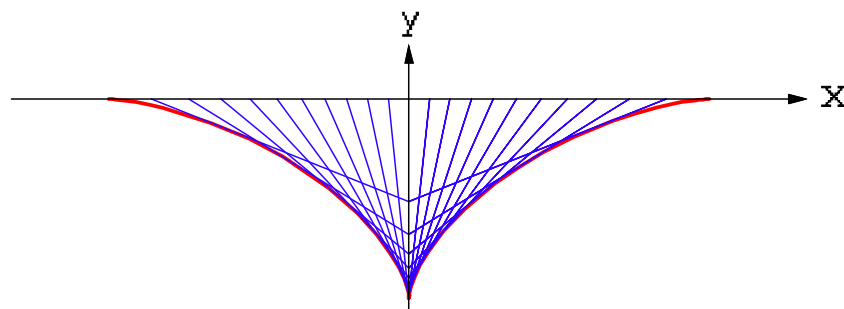
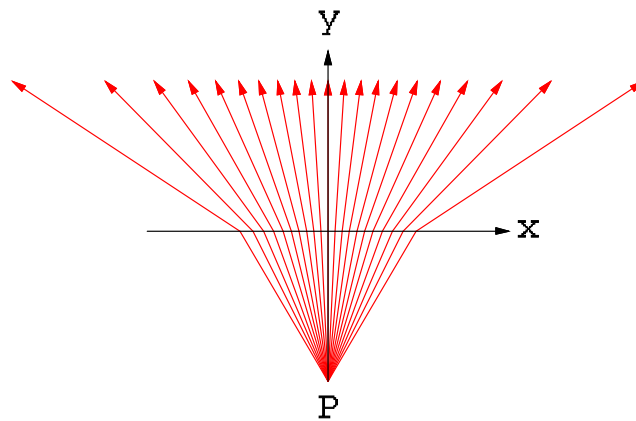


$$\mathbf{r}_k(\alpha) = R \begin{pmatrix} \cos \alpha \left(1 - \frac{\cos 2\alpha}{2} \right) \\ \sin^3 \alpha \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

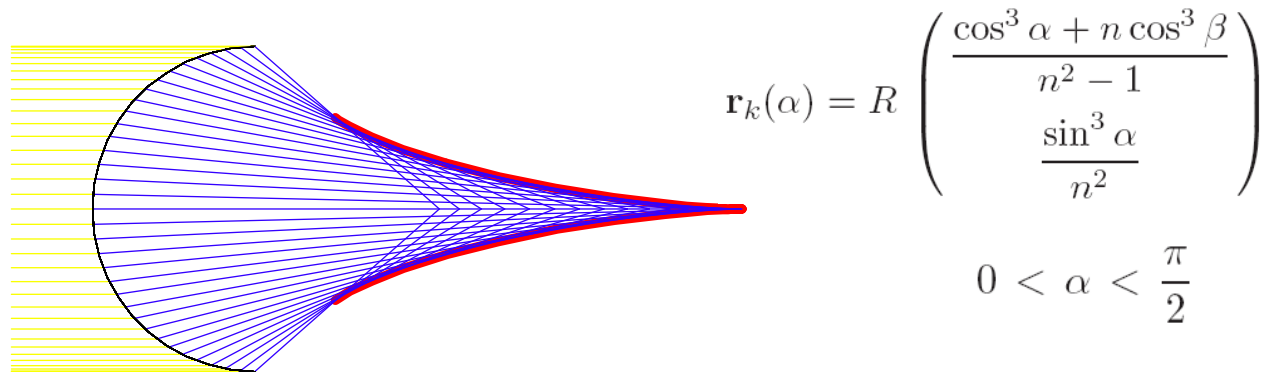


Virtuális kausztika

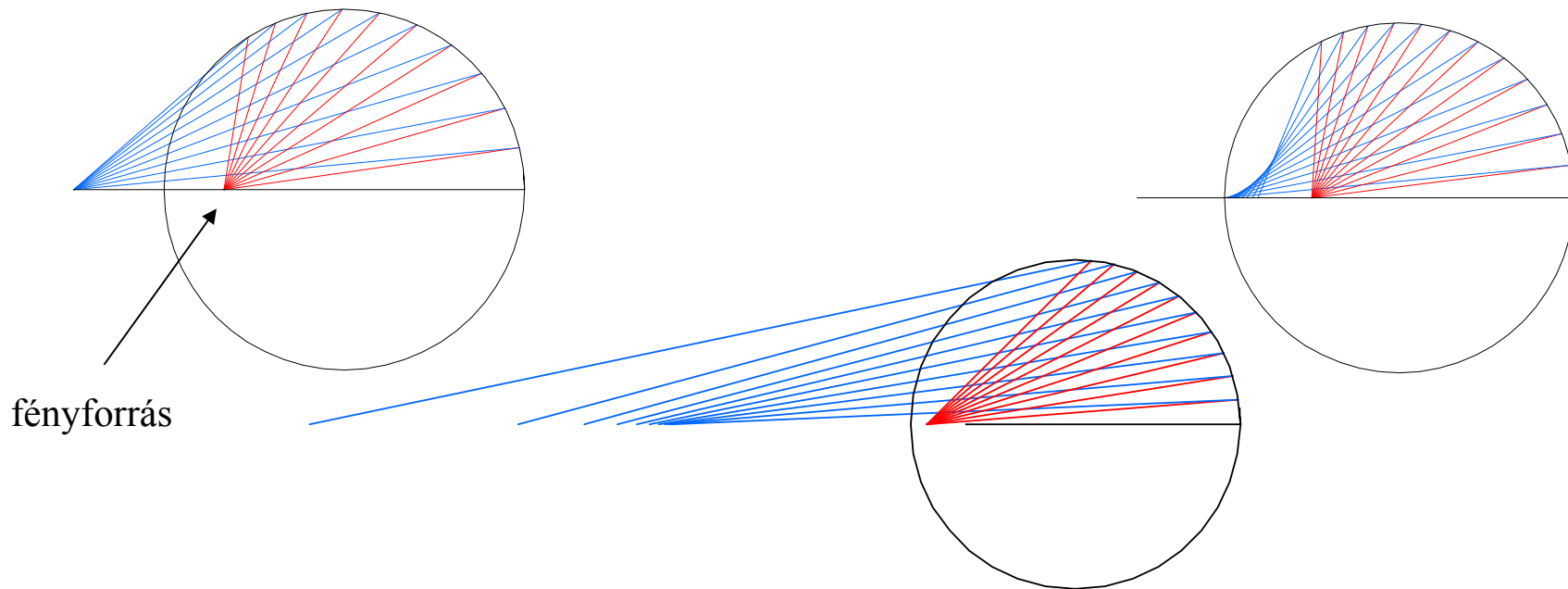


$$\left(\frac{\sqrt{n^2 - 1} x_k}{d} \right)^{2/3} + \left(\frac{ny_k}{d} \right)^{2/3} = 1, \quad y_k < 0$$

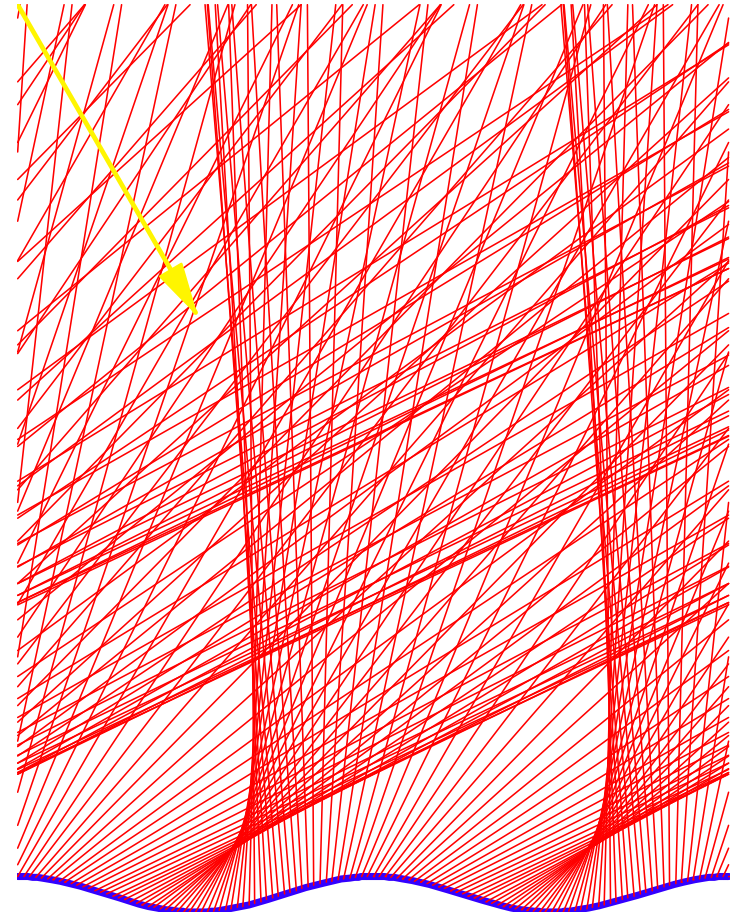
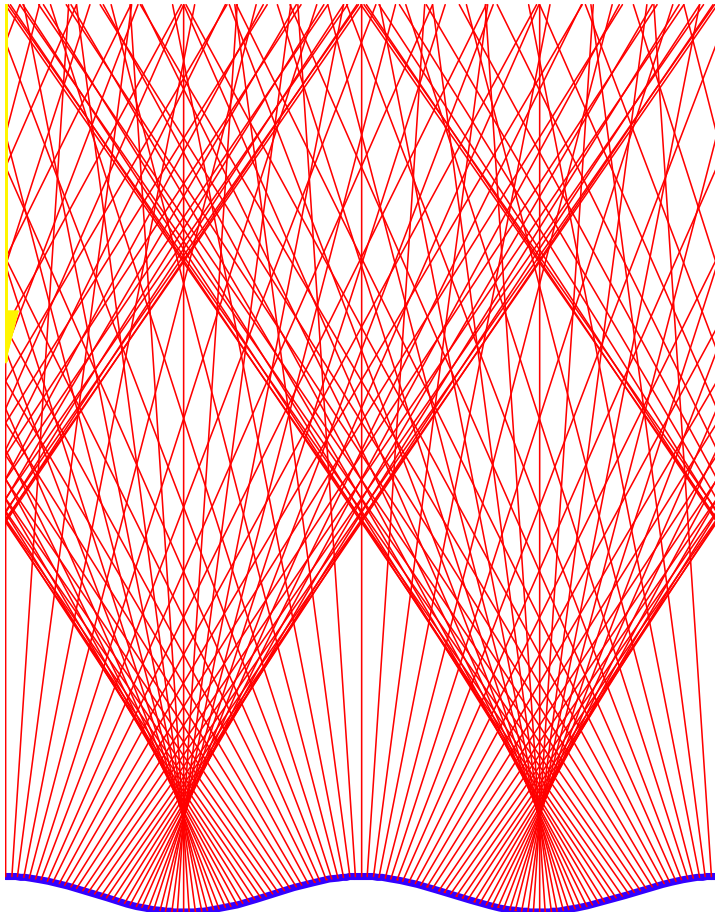
Abberáció, a fókuszpont nem tökéletes:



Virtuális kausztika immerziós mikroszkópban:

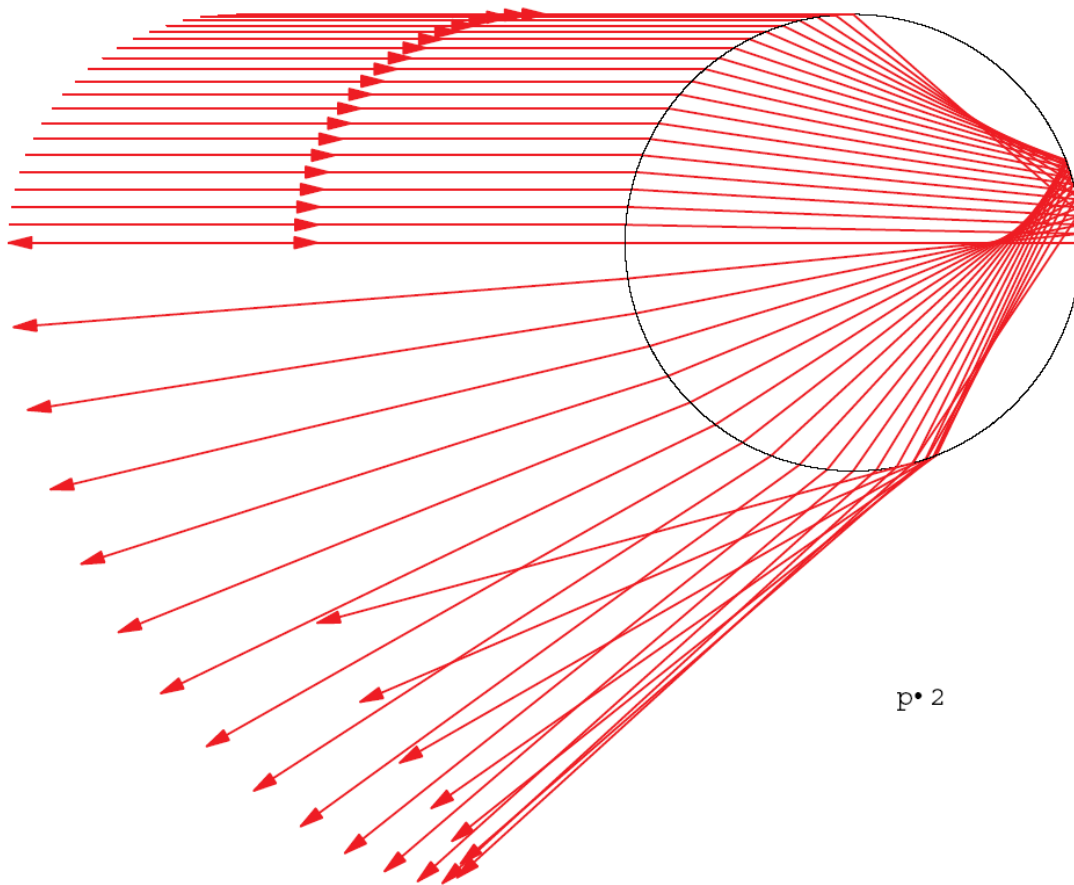


Balaton vízéről visszatükröződő fénysugarak:



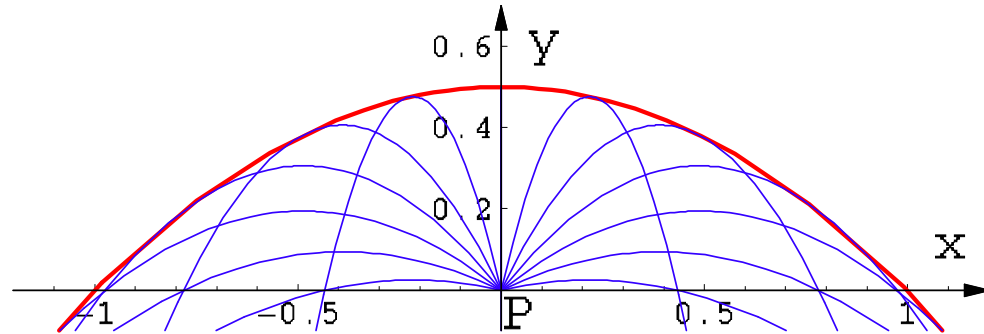
Vízfelszín: $A \sin(2\pi x / \lambda)$

Szivárvány:

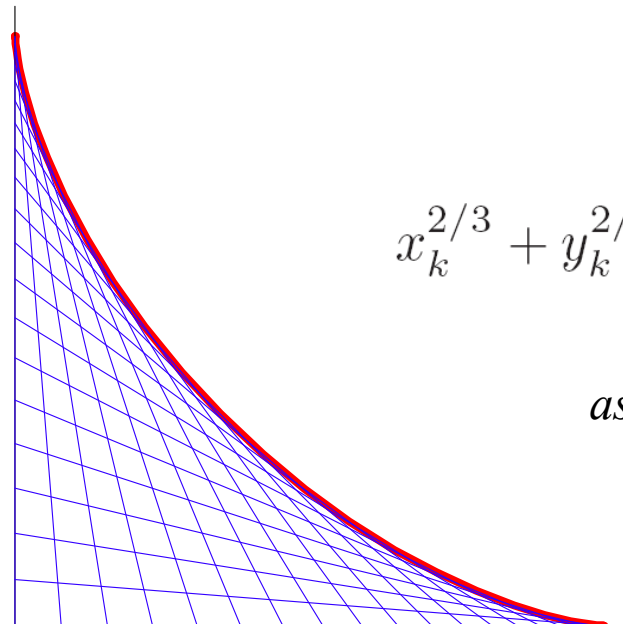
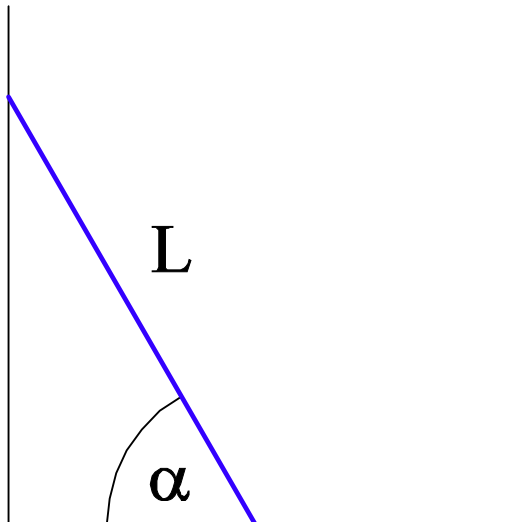


Nem optikai kausztikák

Locsoló, parabola pályák
burkolója is parabola:



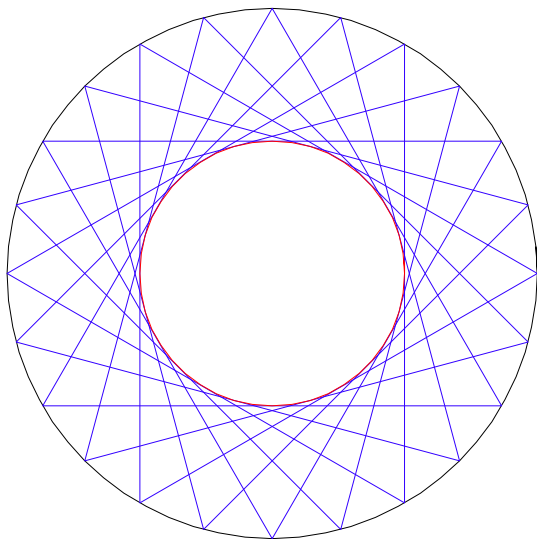
Falmentén lecsúszó merev rúd:



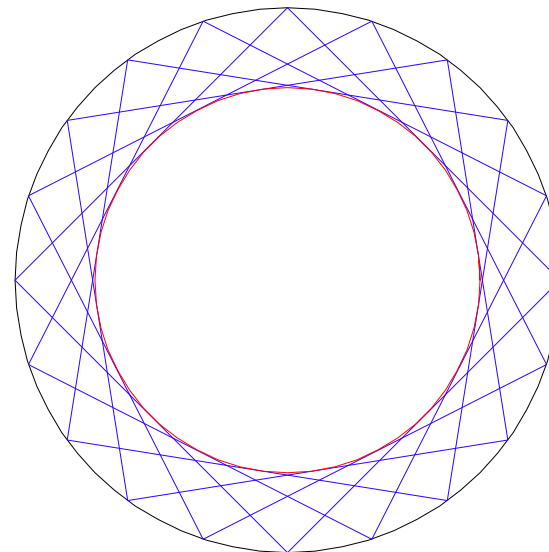
$$x_k^{2/3} + y_k^{2/3} = L^{2/3}$$

asztroid

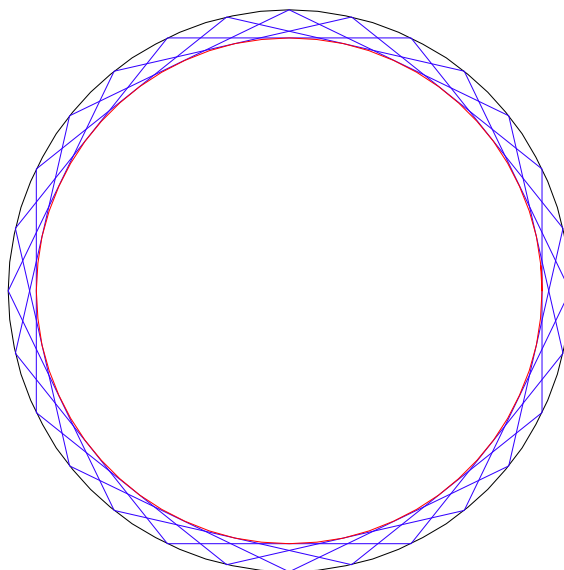
Kör alakú biliárdban pattogó golyó:



$N = 3$

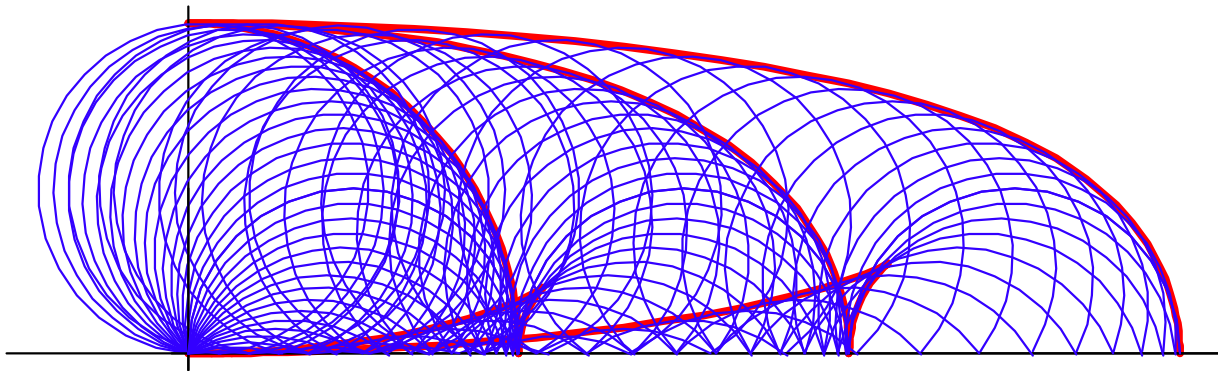
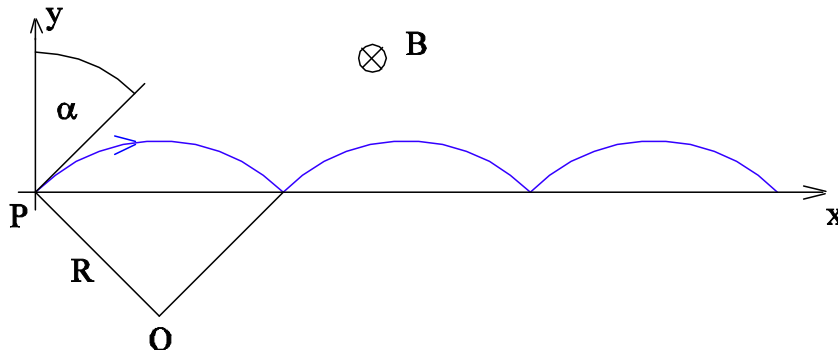


$N = 4$



$N = 7$

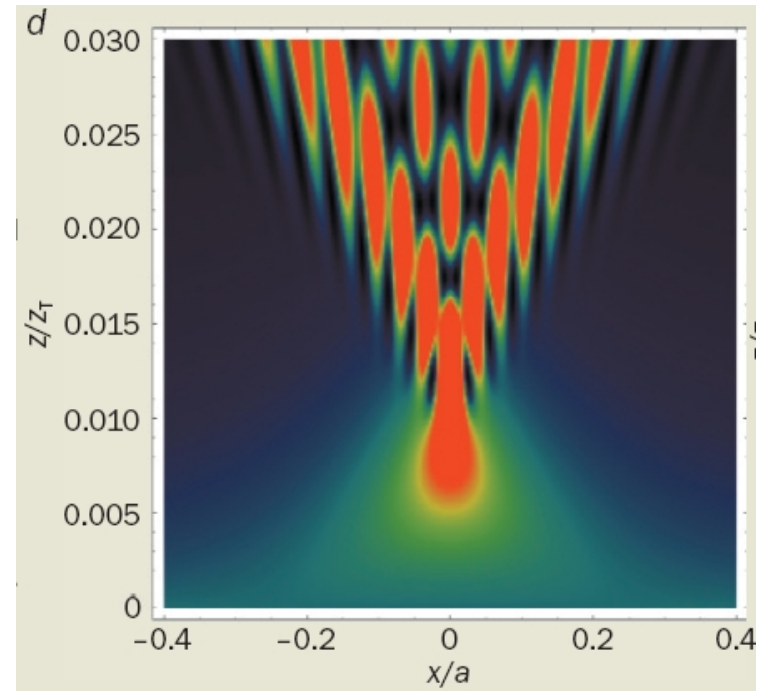
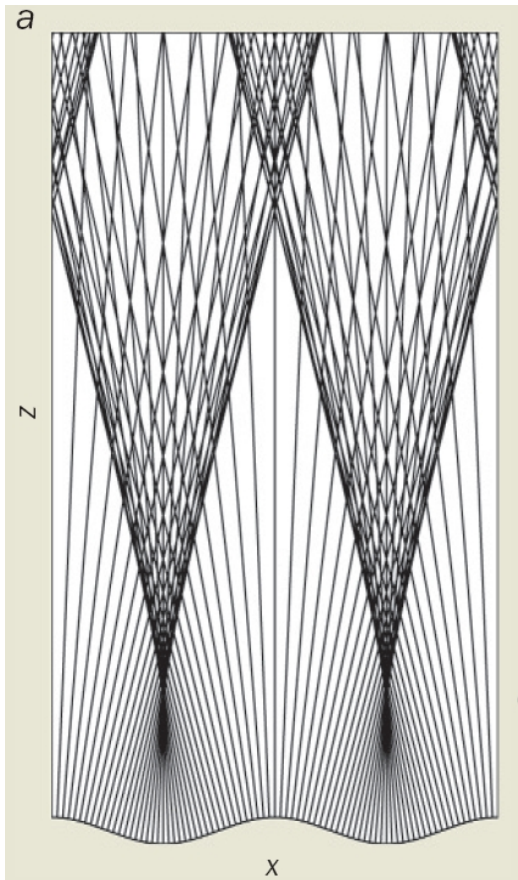
Elektron mozgása mágneses térben:



$$\mathbf{r}_k(\alpha) = R \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + (2p-1) \cos \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$u = \text{ctg} \alpha / (2p - 1)$$

A kausztika „finomszerkezete”



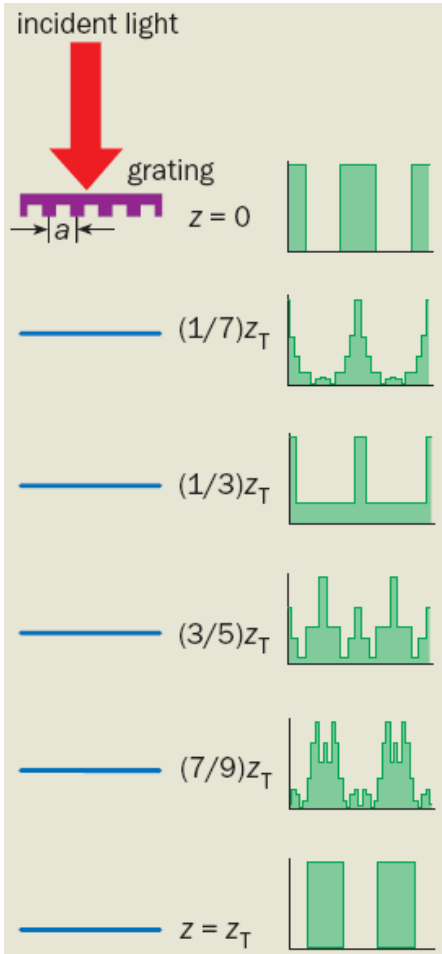
Hullámegyenlet (Helmholtz-egyenlet) megoldása a kausztikák körül.

fázisrács:

geometriai optika szerint a fénysugarak merőlegesen haladnak át a „rácson”.

Talbot-effektus

Henry Fox **Talbot** (1800–1877)
(Picture courtesy of The National Trust and the Fox Talbot Museum)
A fényképezés feltalálója



Az optikai rácstól távolodva bizonyos távolságra megismétlődik a diffrakciós kép.

Ezt nevezik Talbot-periódusnak.

$$\text{Talbot-periódus: } z_T = \frac{a^2}{\lambda}$$

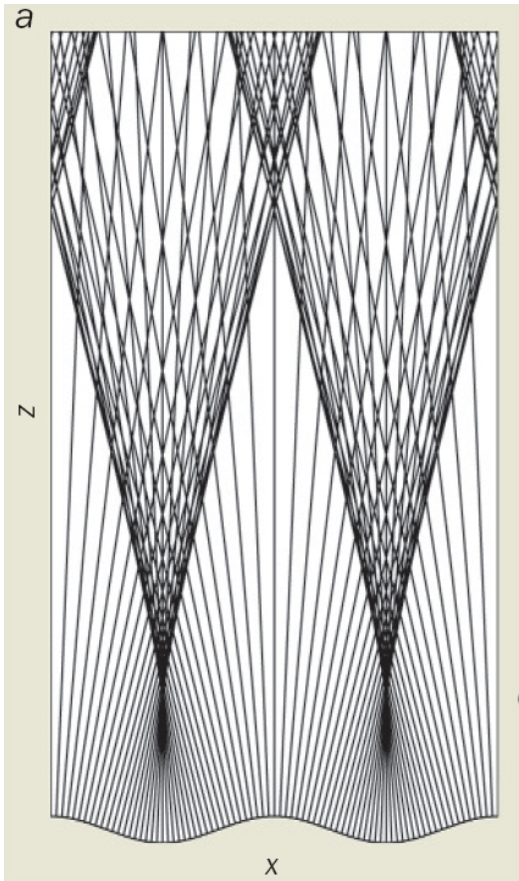
$$a = 0.508 \text{ mm}$$

$$\lambda = 632.8 \text{ nm (vörös fény)}$$



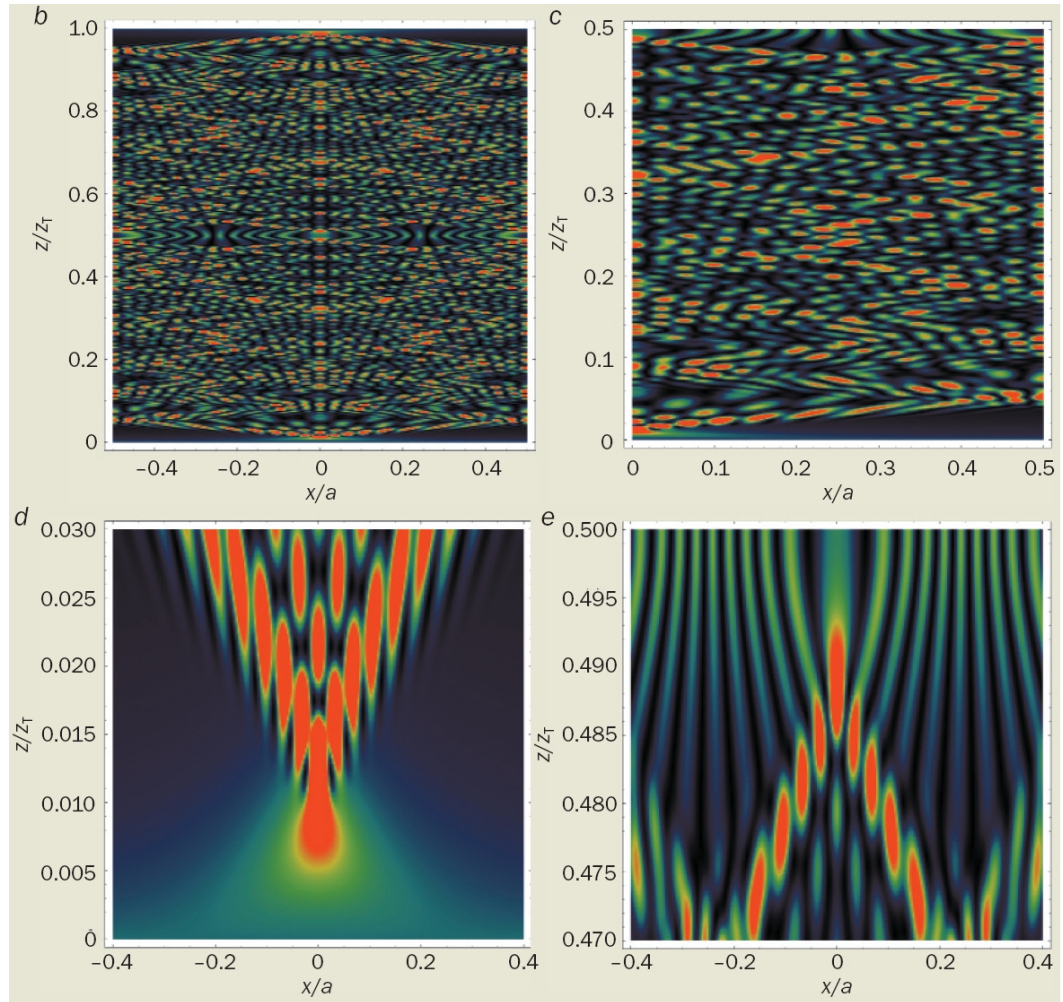
$$z_T = 407.8 \text{ mm}$$

„Fény szőnyeg” (carpet of light)



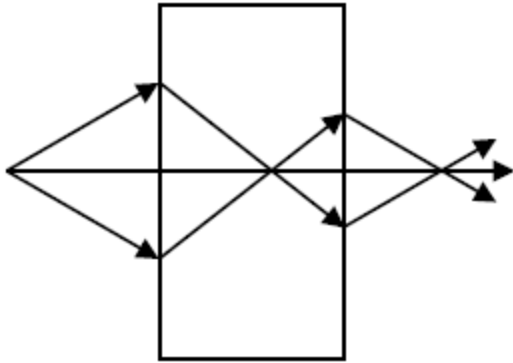
fázisrács:

geometriai optika szerint a fénysugarak merőlegesen haladnak át a „rács”.

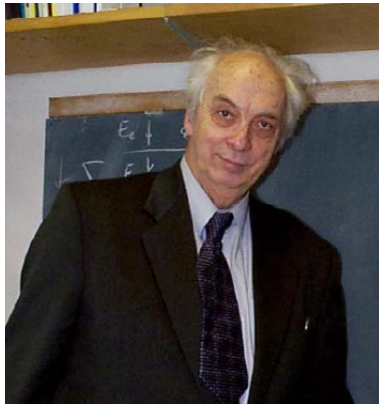


Hullámegyenlet (Helmholtz-egyenlet) megoldása a kausztikák körül.

Kausztikák negatív törésmutatójú anyagokban



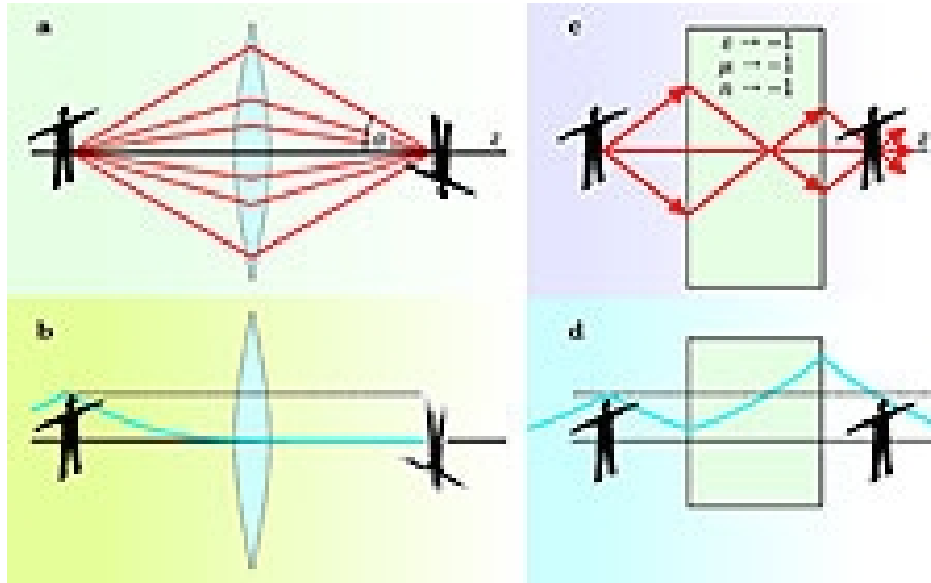
Negatív törésmutatójú anyag a fényt **negatív szögben** téríti el a beesési merőlegeshez képest. Egy pontforrásból kiinduló és divergáló fénysugarak az anyagon áthaladva visszatérnek egy közös pontban, a fókuszpontba.



Veselago, Sov. Phys.-Usp., 10, 509 (1968).

Pendry, Phys. Rev. Lett., 85, 3966 (2000).

Furcsaságok



Jó attekintés:

J. B. Pendry and D. R. Smith, *Physics Today* **57**, 37 (2004).

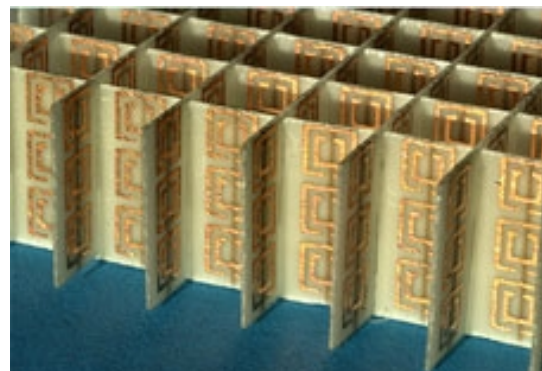
Húsz évvel ezelőtt Eli Yablonovitch állított elő elsőként olyan szerkezetet, amelynek **tiltott sávja volt** az elektromágneses hullámok bizonyos hullámhossztartományában. 6 mm átmérőjű furatok háromdimenziós, periodikus rendszerét fúrta egy teflontömbbe, és mérésekkel igazolta az elméleti számításokat, miszerint ennek a rendszernek a 13–16 GHz frekvenciatartományban (mikrohullám) tiltott sávja van.

A természet több százmillió éve hoz létre szubmikronos, illetve nanoméretű skálán rendezett háromdimenziós szerkezeteket – minden élőlény ilyen rendszer.

(Lásd: Márk Géza István, Bálint Zsolt, Kertész Krisztián, Vértesy Zsófia, Biró László Péter: *A biológiai eredetű fotonikus kristályok csodái*, Fizikai Szemle, 4. szám, 116-121 oldal, 2007).

Metamaterials

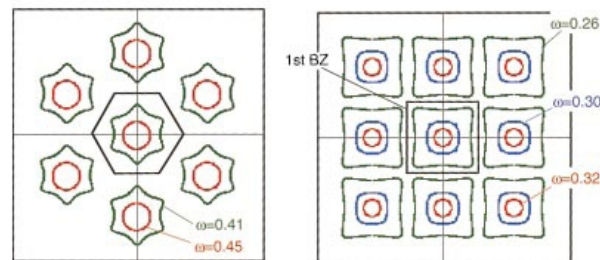
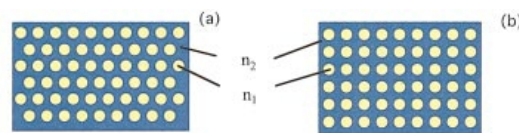
A.F. Starr, P. M. Rye, D. R. Smith,
and S. Nemat-Nasser, PRB **72**, 113102 (2004).



Fotonikus kristályok

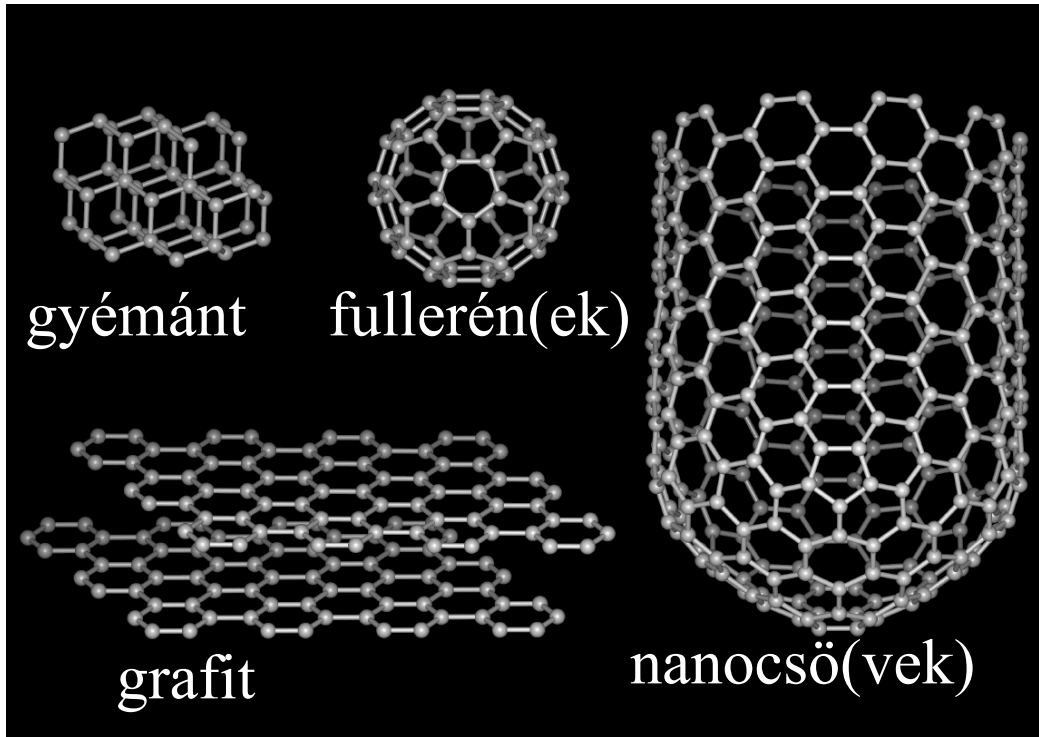
M. Notomi, PRB **62**, 10696 (2000).

$$\begin{aligned}
 n &= \sqrt{|\mu| |\varepsilon| \exp(2i\pi)} \\
 &= \sqrt{|\mu| |\varepsilon|} \sqrt{\exp(2i\pi)} \\
 &= -\sqrt{|\mu| |\varepsilon|}
 \end{aligned}$$



Negatív törésmutató grafénben

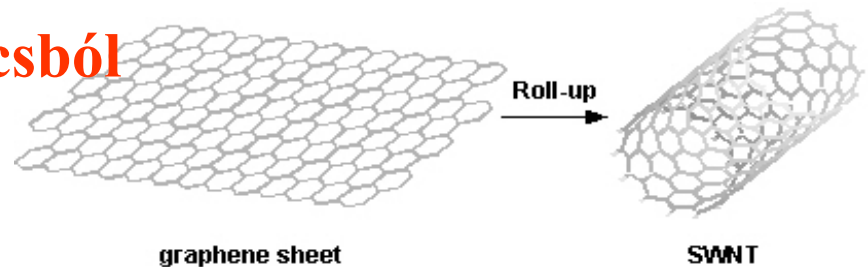
Szén különböző módosulatai:



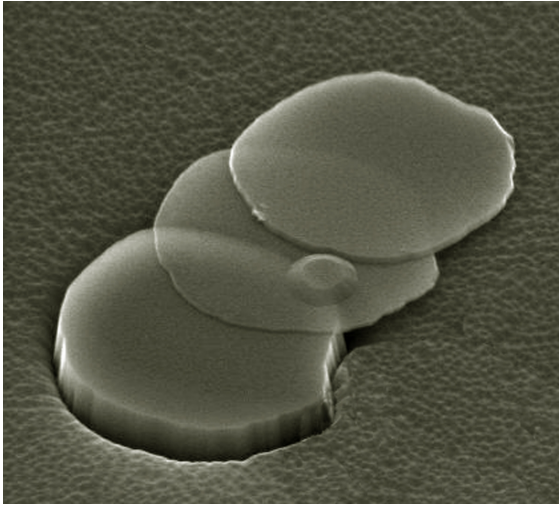
Kürti Jenő:

Szén nanocsövek: mik azok és mire jók?
(Az atomoktól a csillagokig,
www.atomcsill.elte.hu).

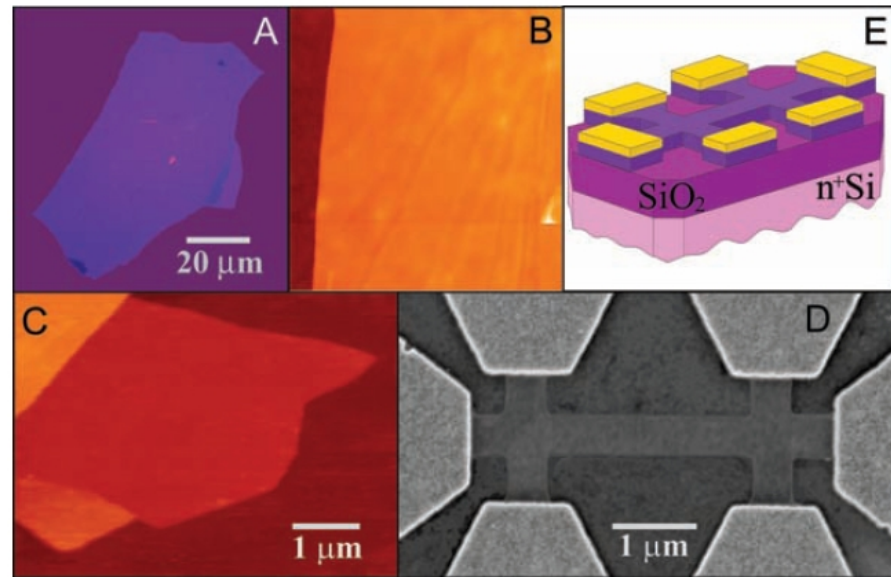
Gráfén = egy réteg a hatszögrácsból



Gráfén lapok

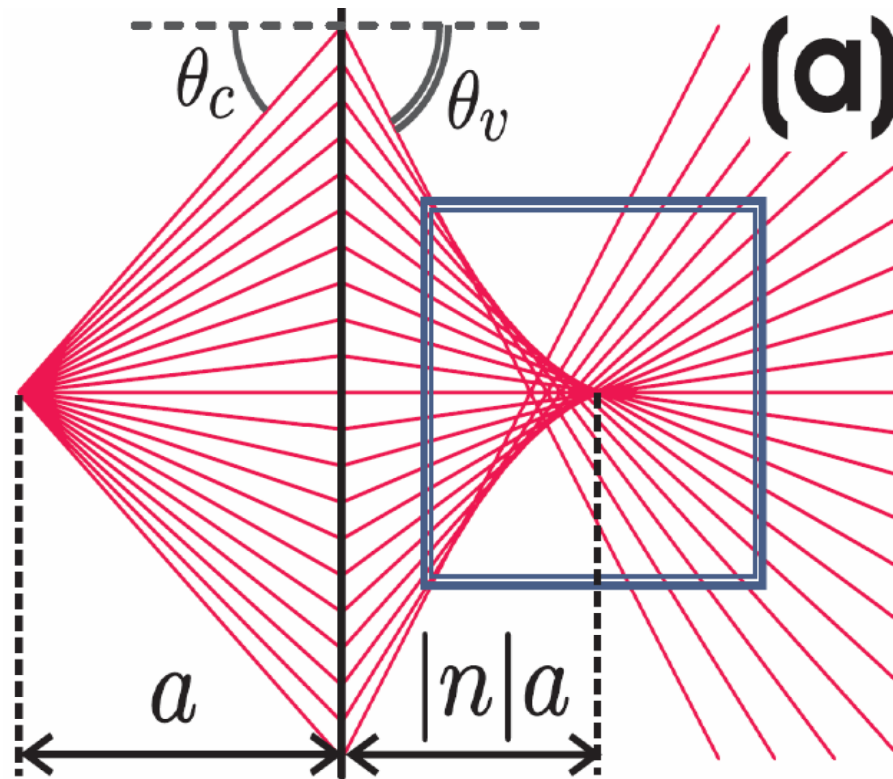


10 nm carbon flake (30 layer thick)

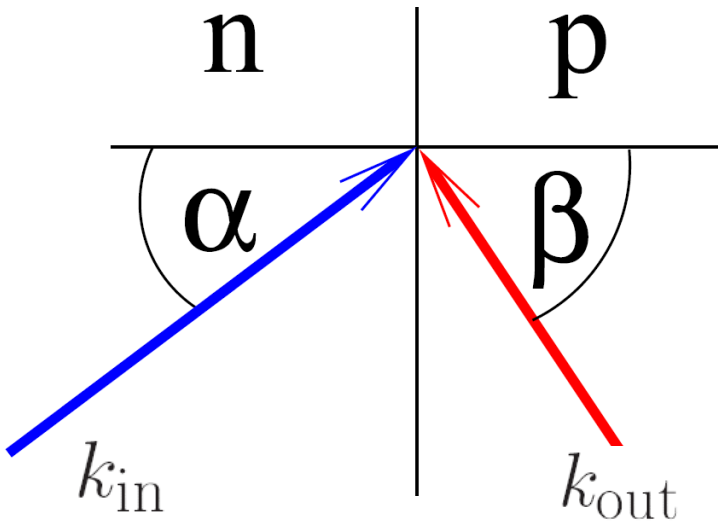


Elektronoptika p-n átmenetű grafénben

Vadim V. Cheianov, Vladimir Fal'ko, B.L. Altshuler, Science, **315**, 1252 (2007).



Snellius-Descartes-törvény negatív törésmutatójú anyagokban



Síkkal párhuzamos
(itt a függőleges irányú)
impulzus megmarad:

$$k_{\text{in}} \sin \alpha = -k_{\text{out}} \sin \beta$$

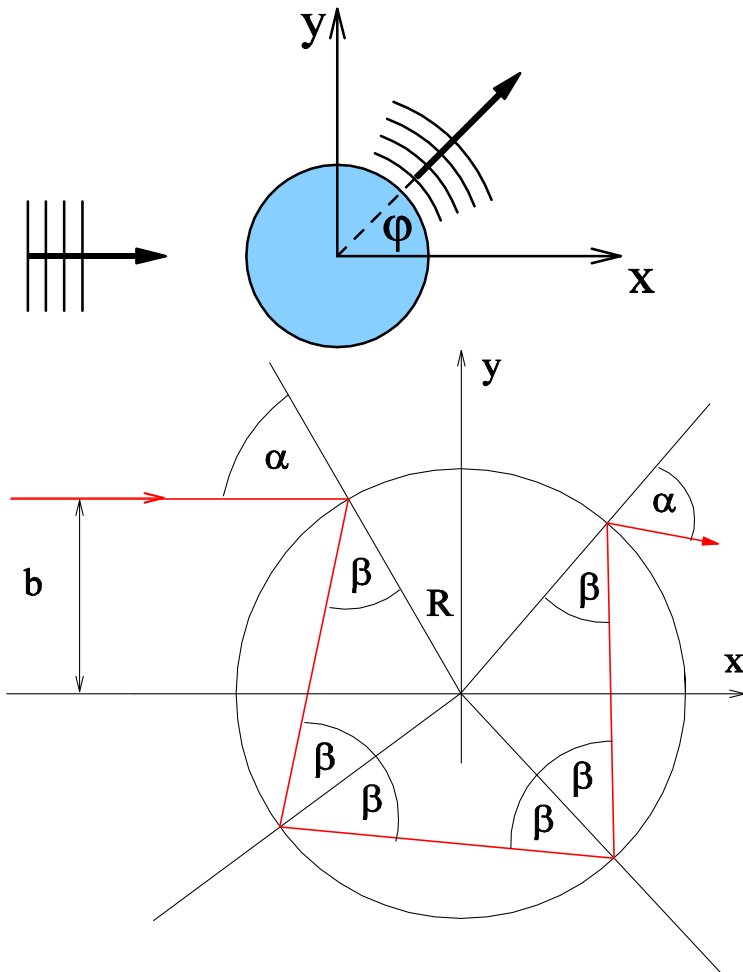


Snellius-Descartes-törvény:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = -\frac{k_{\text{in}}}{k_{\text{out}}}$$

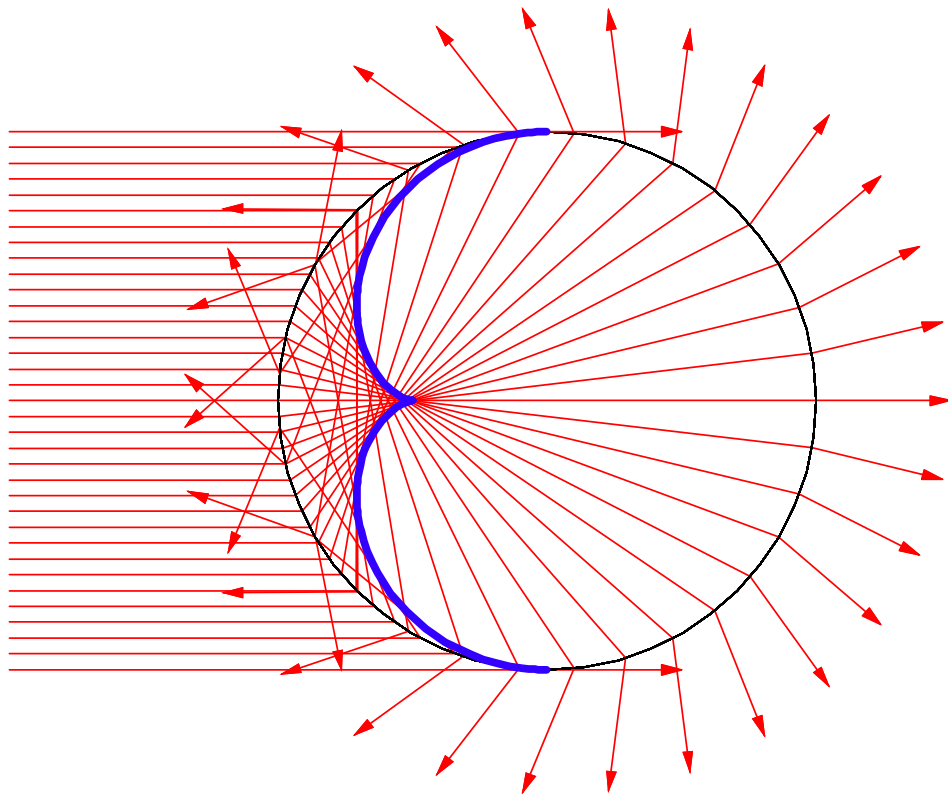
Geometriai optika: kis hullámhossz közelítés

nagy k_{in}



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = -\frac{k_{\text{in}}}{k_{\text{out}}}$$

Kausztikák kör alakú grafénben a geometriai optika alapján



$$\frac{\mathbf{r}_c(p, \alpha)}{R} = (-1)^{p-1} \left[\begin{pmatrix} -\cos \Theta \\ \sin \Theta \end{pmatrix} + \cos \beta \frac{1 + 2(p-1)\beta'}{1 + (2p-1)\beta'} \begin{pmatrix} \cos(\Theta + \beta) \\ -\sin(\Theta + \beta) \end{pmatrix} \right]$$

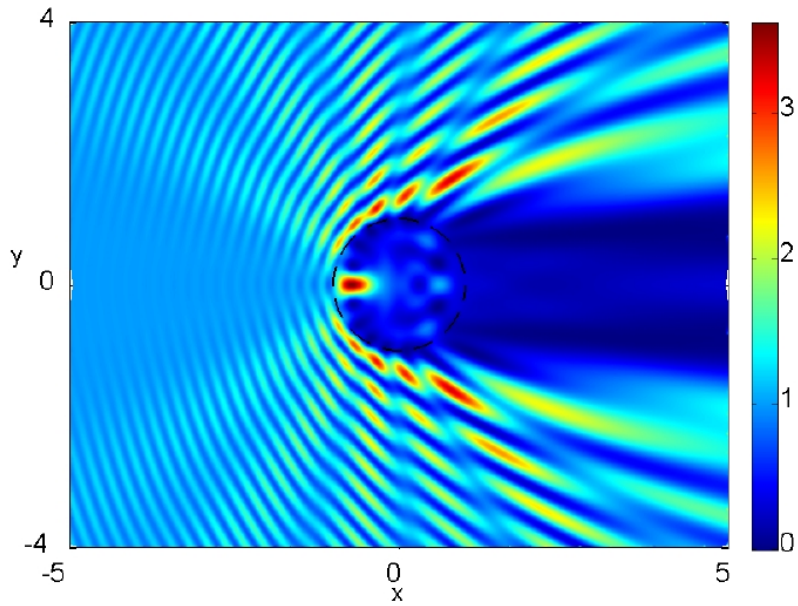
$$\Theta(p, \alpha) = \alpha + 2(p-1)\beta,$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{|n|},$$

$$\beta' = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

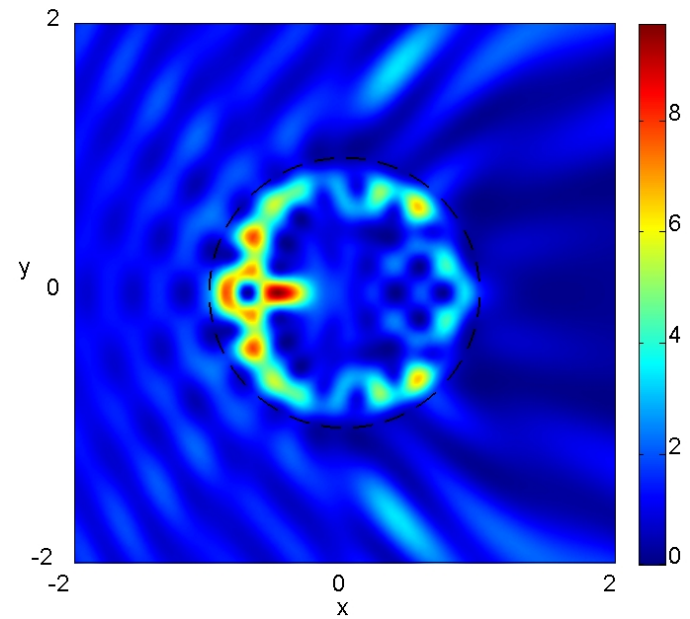
Hullámfüggvény kör alakú grafénben

$|\Psi|^2$ $k_{out}=15$ $k_{in}=10$ $n=-0.7$



$n = -0.7$

$|\Psi|^2$ $k_{out}=10$ $k_{in}=15$ $n=-1.5$



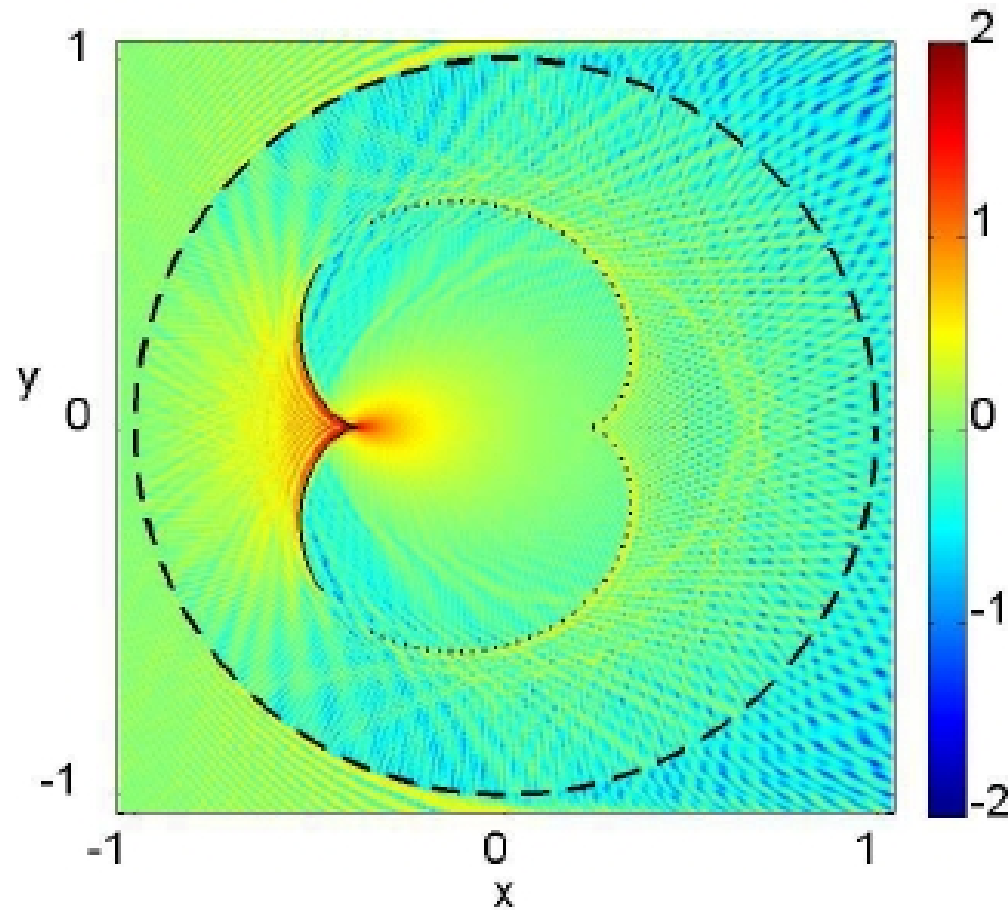
$n = -1.5$

Kausztika és az egzakt hullámfüggvény összehasonlítása

$k_{\text{in}} R = 300$

$n = -1.5$

$k_{\text{out}} R = 200$



Még több kausztika

$$k_{\text{in}} R = 300$$

$$n = -1.$$

$$k_{\text{out}} R = 300$$

$\text{Log}_{10}(|\Psi|^2)$ $k_{\text{out}}=300$ $k_{\text{in}}=300$ $n=-1.0$

