

Bevezetés a modern optikába

II. BSc fizikus hallgatóknak

9.

Optikai eszközök és
műveletek (Fourier-optika)



Optikai eszközök

- Vetítőgép
- Fényképezőgép (mélységélesség, fényerő)
- Lupe, szemüveg
- Mikroszkóp és felbontása (diffrakció)
- Távcső, mint **konfokális** rendszer; szögnagyítás, távcső felbontása
- Csillagászati interferometria (Michelson, Hanbury-Brown-Twiss)

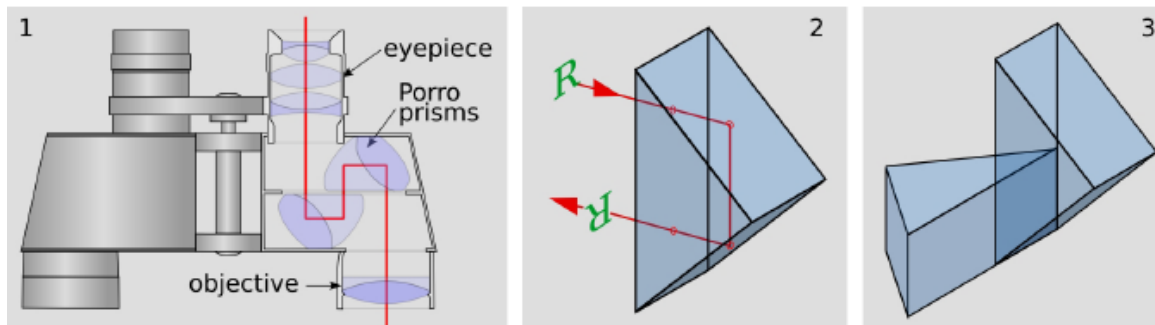
Vetítőgép: kis tárgyról nagyított, távoli kép

Fényképezőgép: távoli tárgyról kicsinyített, valódi kép

Fényerő: begyűjtött fényenergia hányada, $\left(\frac{D}{f}\right)^2$, ahol D a lencse mérete, a blendenyílás

Mélységélesség: a képtávolság függ a tárgytávolságtól, tehát nem lehet nagy különbség a tárgyak távolsága között.

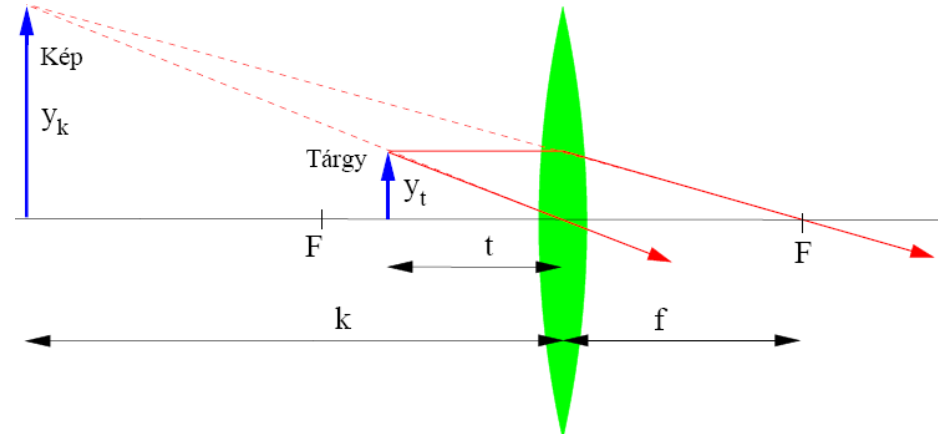
Javul, ha csökkentjük D -t (kisebb blende), de ekkor csökken a fényerő is.



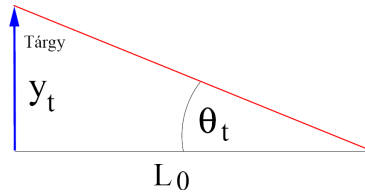
Nagyítólencse (lupe): nagyított, virtuális ($k < 0$) kép a fókusz távolságnál közelebbi tárgyról.

Laterális nagyítás = képméret/tárgyméret:

$$N = \frac{y_k}{y_t} = \frac{-k}{t} = \frac{f}{f - t}$$

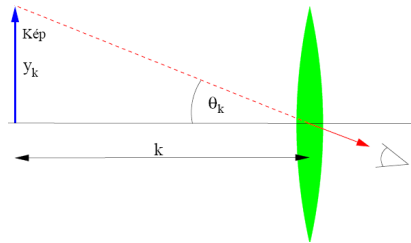


szabadszemmel:



$L_0 \sim 25$ cm a tisztánlátás távolsága (kicsit szubjektív)

lupével:



Szögnagyítás:
$$N_{\text{szög}} = \frac{\Theta_k}{\Theta_t} \approx \frac{\text{tg } \Theta_k}{\text{tg } \Theta_t} = \frac{y_k / (-k)}{y_t / L_0} = \frac{-k}{t} \frac{L_0}{(-k)} = \frac{L_0}{t} \approx \frac{L_0}{f}$$

$k > L_0 \gg f \longrightarrow t \approx f$

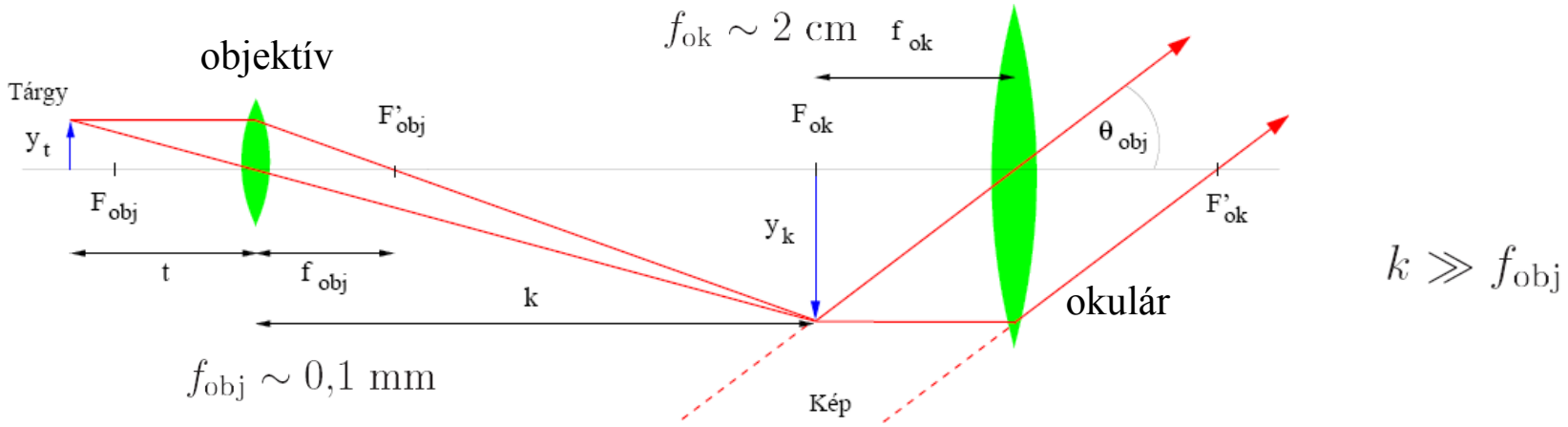
Szemüveg: korrekciós lencse a szemlencse elé (a szemlencse kb. 60-64 dioptriás)

rövidlátás: túl erős fénytörés, a kép a retina előtt van, **szórólencse** kell, $D < 0$

távollátás: túl gyenge fénytörés, a kép a retina mögött van, **gyűjtőlencse** kell, $D > 0$

Mikroszkóp: a lupe problémája, hogy nem tudjuk elég közel helyezni a szemünket...

Megoldás: két lencsét használunk: egyik kicsi „vetítőgép”(objektív), a másik egy lupe (okulár)



Objektív laterális nagyítása:
$$N_{obj} = \frac{y_k}{y_t} = \frac{k}{t} = \frac{k - f_{obj}}{f_{obj}} = \frac{\Delta}{f_{obj}}$$
 $\overline{F'_1 F_2} = \Delta$
„**tubushossz**” ~ 10 cm

Mikroszkóp szögnagyítása:
$$N_{szög} = \frac{\Theta_{obj}}{\Theta_t} \approx \frac{\text{tg } \Theta_{obj}}{\text{tg } \Theta_t} = \frac{y_k / f_{ok}}{y_t / L_0} = \frac{y_k}{y_t} \frac{L_0}{f_{ok}} = \frac{\Delta}{f_{obj}} \frac{L_0}{f_{ok}}$$

Tipikus nagyítás: nagyságrendileg $1000 * 10$

Optika eszközök felbontóképessége

A hullámoptika közelíthetősége határolja be. Tökéletes leképezést feltételezve a Fermat-elv szerint az optikai úthosszak egyenlők a képképzésben résztvevő fénysugarakra.

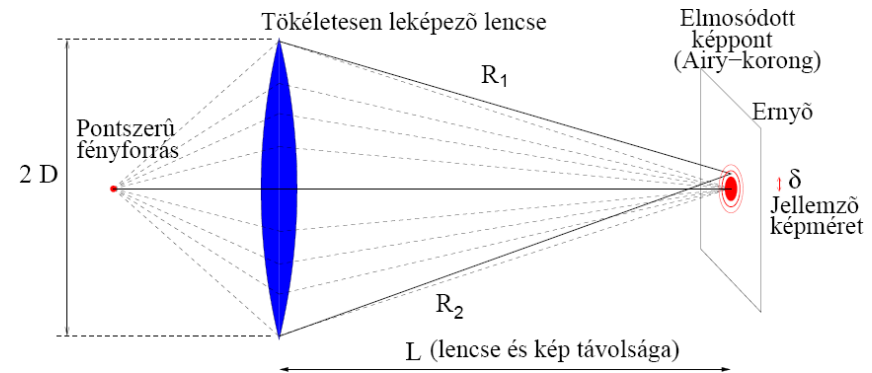
A hullámoptika szerint mindenféle pályán haladhat a fény, és ott lesz nagy az amplitúdó, ahol közel azonos fázisban érkeznek a hullámok.

$$U(P) = \int e^{ikR} d^2\mathbf{r}$$

$$R_{1,2} = \sqrt{\left(\delta \pm \frac{D}{2}\right)^2 + L^2} = L \sqrt{1 + \left(\frac{\delta \pm \frac{D}{2}}{L}\right)^2} \approx L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \pm \frac{D}{2}}{L}\right)^2 \right]$$



$$R_2 - R_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\left(d + \frac{D}{2}\right)^2}{L} - \frac{\left(\delta - \frac{D}{2}\right)^2}{L} \right] = D \frac{\delta}{L}$$



kitevő ne változzon sokat: $k(R_2 - R_1) < 2\pi$ ➔ szögfelbontás:

$$\frac{\delta}{L} < \frac{\lambda}{D}$$

Minden lencse megfelel egy „résnek”, ami egy $\frac{\lambda}{D}$ szögfelbontású diffrakciót okoz.

Ez azt jelenti, hogy a mikroszkóp maximális felbontása: $f \frac{\lambda}{D}$

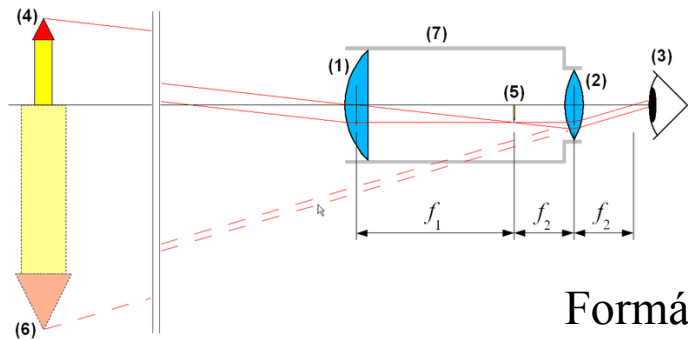
A lencsére jellemző **numerikus apertúra** = D/f

(más definíció: N.A. = $n \sin \alpha$, ahol $\operatorname{tg} \alpha = \frac{D}{f}$)

$D/f \sim 0,3$ normál esetben (immerziós mikroszkópnál 1-nél nagyobb is lehet)

Ugyanakkor az elérhető **maximális felbontóképesség a hullámhossz nagyságrendjébe esik.**

Távcsövek: konfokális (egybeeső fókuszpontok) összetett lencserendszerek,
 a tárgy a végtelenben van, a kép is a végtelen távoli pontban keletkezik.
 Nincs értelme laterális nagyításról beszélni, csak **szögnagyításról!**



Mátrixoptika nyelvén:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ \frac{d}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix}$$

Formálisan a fókusztávolság
 végtelen, ha $d = f_1 + f_2$

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{f_1}{f_2} & f_1 + f_2 \\ 0 & -\frac{f_2}{f_1} \end{pmatrix}$$

Kepler távcső (csillagászati távcső): két gyűjtőlencse és $d = f_{obj} + f_{ok}$

Galilei távcső (színházi távcső): objektív gyűjtőlencse, az okulár szórólencse és $d = f_{obj} - f_{ok}$

Szögnagyítás: $|M_{22}| = \frac{f_2}{f_1}$

Távcső felbontása: $\frac{\lambda}{D}$, ahol D a távcső objektívjének átmérője

(nagy csillagászati távcsövekre, $D = 10$ m nagyságrendű)

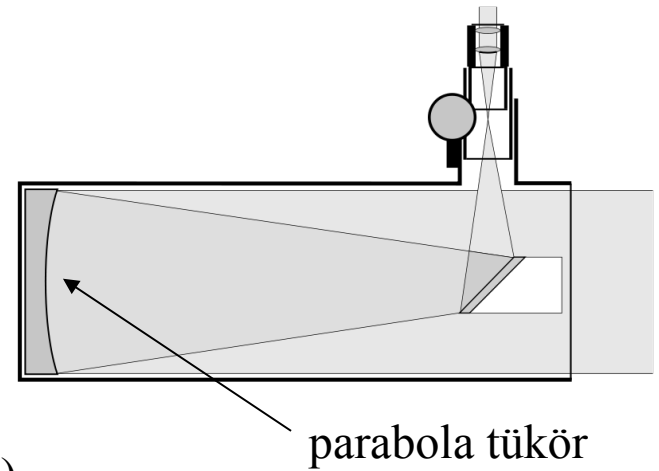
Tükrös teleszkópok

Hasonló elvi elrendezés, csak most gömbtükrökkel:

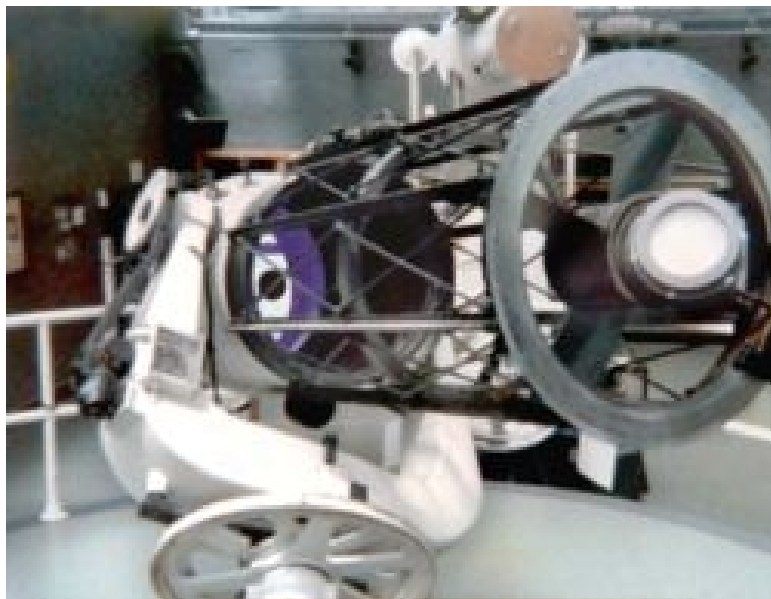
Newton-távcső

Egy modern verzió: [Hubble-űrteleszkóp](#)

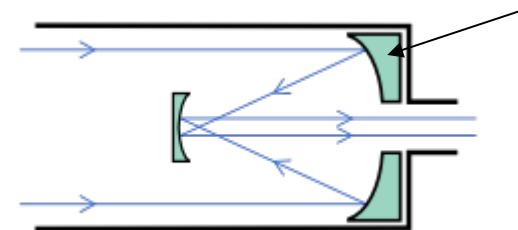
(légköri mozgások, légkör áteresztőképessége nem zavarja)



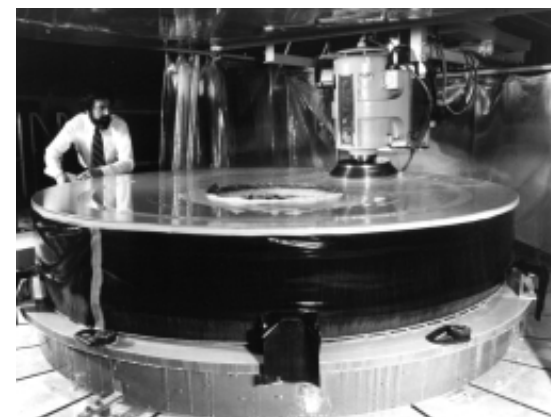
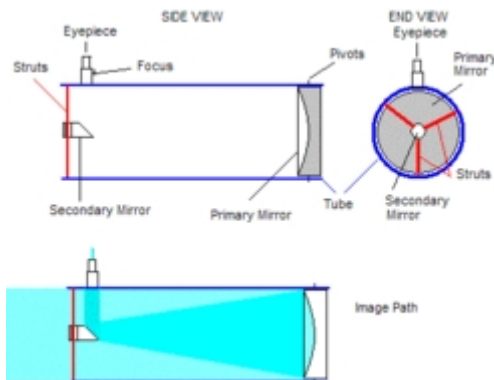
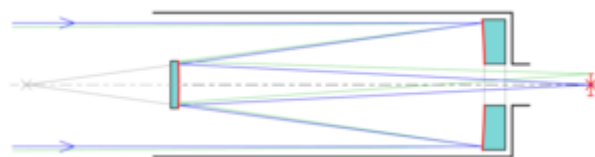
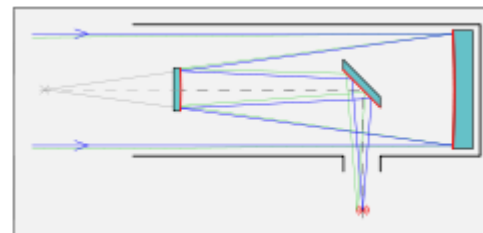
Tükrös teleszkópok



Cassegrain távcső



parabola
tükör



tükör csiszolása

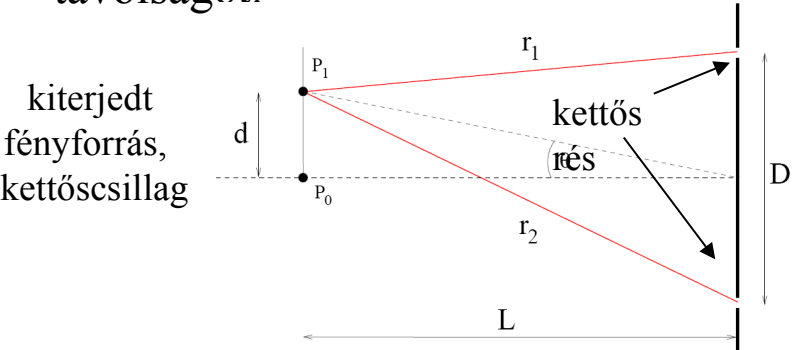
Csillagászati interferometria

Cél: a csillagok „felbonthatatlan” átmérőjének (látószög) mérése.

Fresnel elemzése a Young-féle interferenciakísérletről:

Fényforrás pontszerű: interferenciacsíkok jelennek meg,

Fényforrás véges méretű: interferenciacsíkok elmosódnak, ha változtatjuk a két rés közti D távolságot.

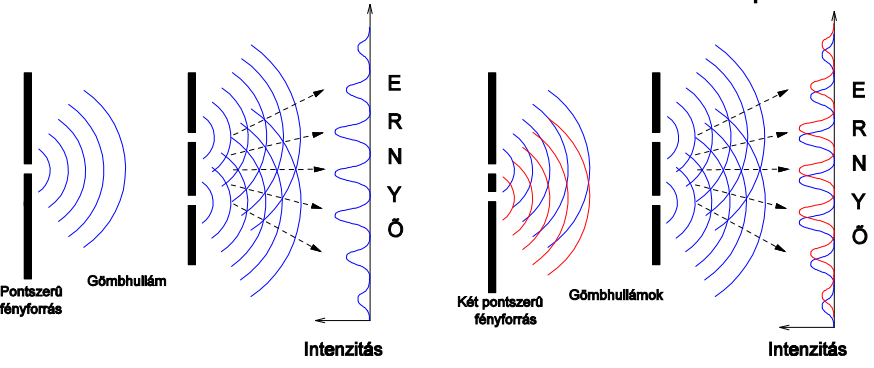


$$r_{1,2} = \sqrt{\left(d \pm \frac{D}{2}\right)^2 + L^2} = L \sqrt{1 + \left(\frac{d \pm \frac{D}{2}}{L}\right)^2} \approx L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d \pm \frac{D}{2}}{L}\right)^2\right]$$

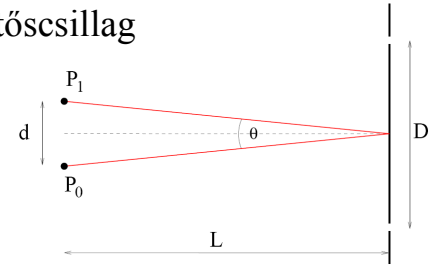
útkülönbség:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\left(d + \frac{D}{2}\right)^2}{L} - \frac{\left(d - \frac{D}{2}\right)^2}{L} \right] = D \frac{d}{L} \approx D \Theta$$

kettőscsillag látószöge



kettőscsillag



fáziskülönbség:

$$\Delta \varphi = k \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} D \Theta = \pi$$

elmosódik az interferencia

változtatva D -t, interferencia

$$D^* = \frac{\lambda}{2\Theta}$$

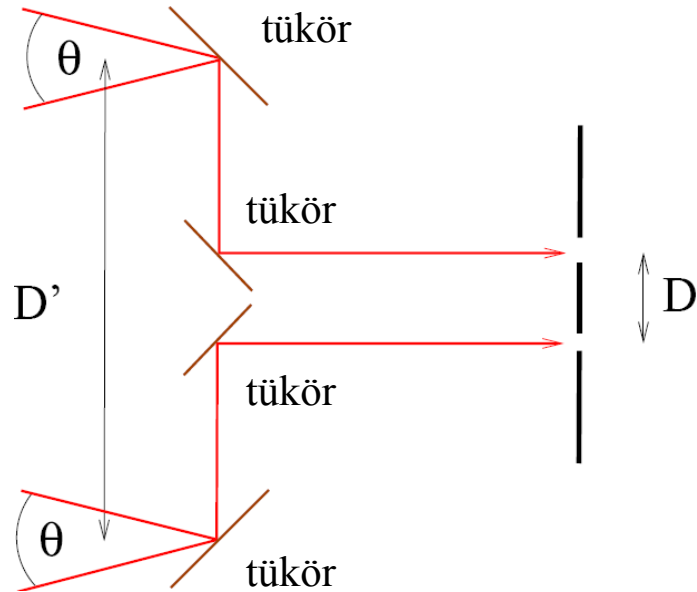
értéknél elmosódik az interferencia

A szín itt csak a különböző hullámokat jelzi, de a hullámhossz azonos.

Michleson trükkje a csillagászati interferometriában

Kis Θ –hoz (távoli csillagok) nagy D kellene, de az objektív mérete véges.

Növeljük a távcső effektív méretét! Két távcső, a kapott fénynyalábot interferáltassuk!



1920: a Betelgeuse (közele óriáscsillag) szögátmérőjének mérése

Nehéz stabilizálni

Rádió-teleszkópok



Nagyon nagy teleszkóp (Very Large Telescope, VLT)

ESO: European South Observatory

Négy nagy távcső (külön-külön is nagyok) interferenciába hozva őket.
A szögfelbontás akkora, mint a két legtávolabbinak megfelelő átmérőjű távcső.



The VLT Array on the Paranal Mountain

ESO PR Photo 14a-00 (24 May 2000)

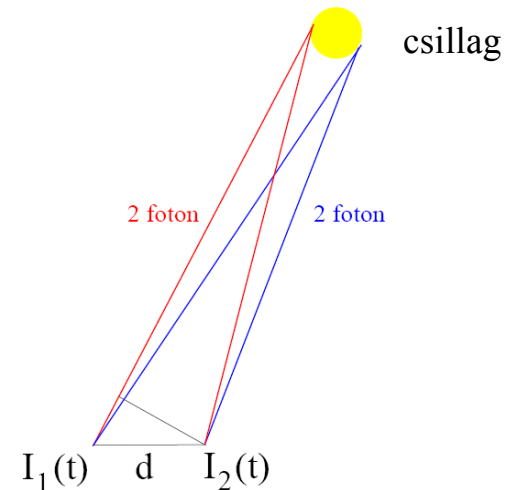
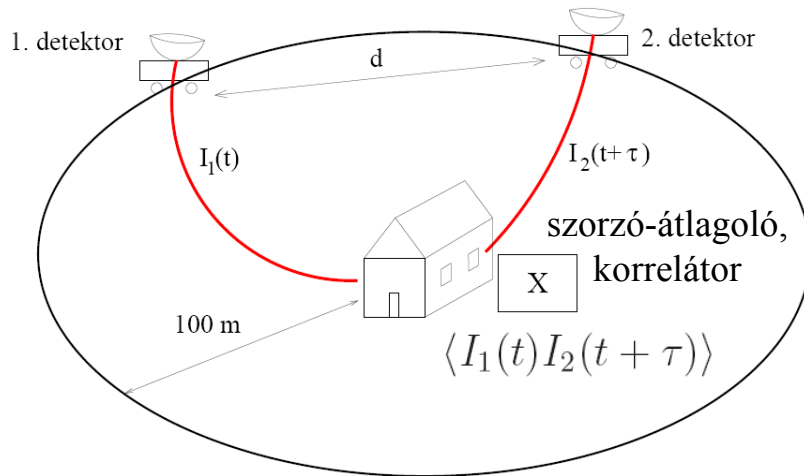
© European Southern Observatory



Nagy távolságban lévő távcsöveket nehéz stabilizálni, rezgésmentessé tenni.

Hanbury Brown-Twiss interferométer

A detektált fény **intenzitásának időbeli korrelációját** (koherenciáját) vizsgáljuk.
2 foton megfigyeléséhez 2 detektor kell, meg egy koincidenca – számláló áramkör



Az interferenciacsíkok elmosódnak d változtatásával, ami a két detektor jele között egy τ időkésettetés jelent.

Sirius: 8,6 fényévnnyire,
 $\varnothing = 2,5$ millió km (3 cm / 1000 km)

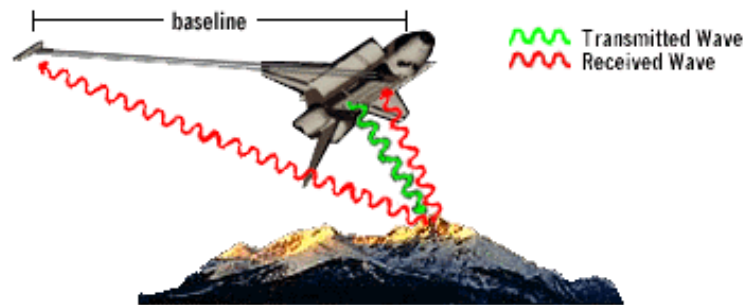
Fontos elvi különbség:

- HB-T: két foton nézünk, amelyek „tudnak” egymásról (QM effektus)
- Michelson: egyetlen foton választunk kétfelé, és önmagával interferáltatjuk

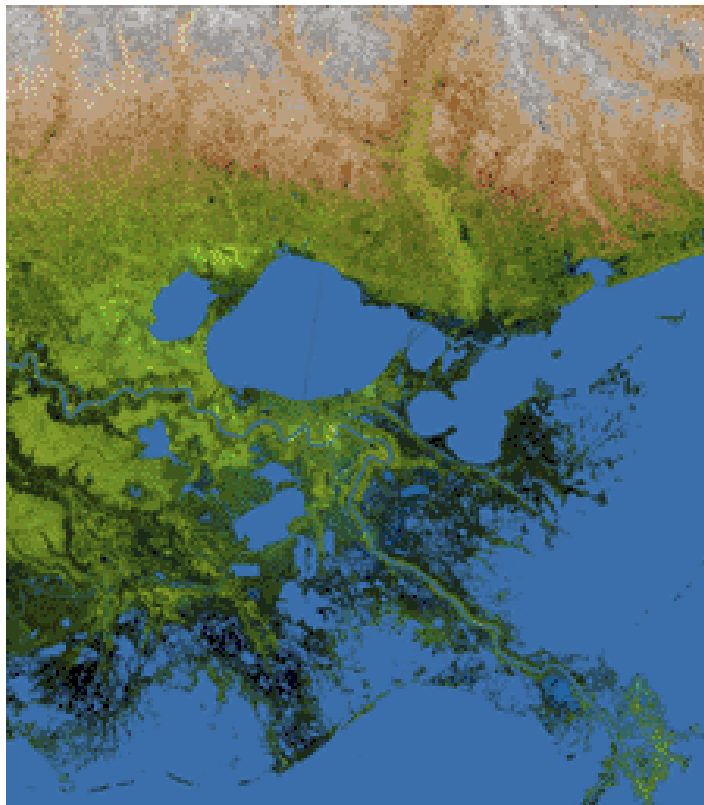


Geszti Tamás: Szép és hasznos kvantummechanika, **Az atomoktól a csillagokig**, 2007. november 22.

Radar-interferometria

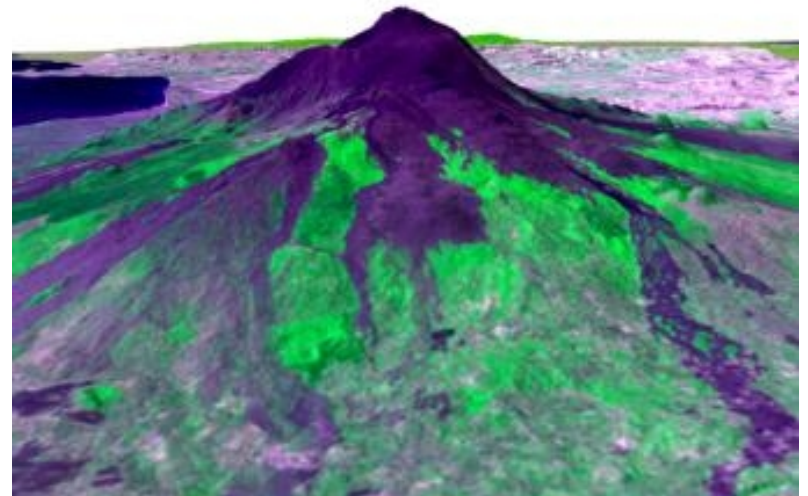


Radar signals being transmitted and received in the SRTM mission (image not to scale).

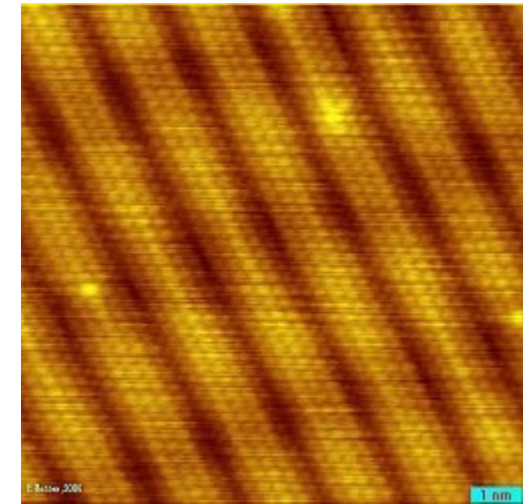
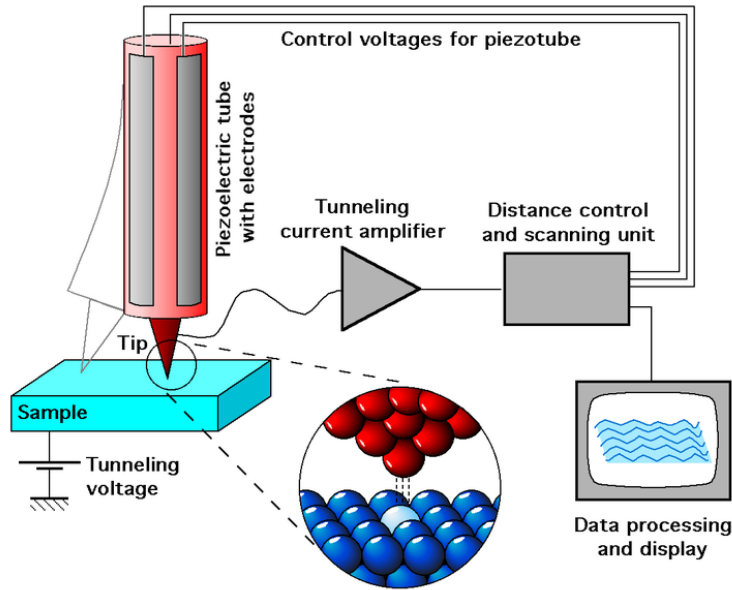


New Orleans space shuttle radar interferometriával

Etna



Pásztázó alagút mikroszkóp (Scanning Tunneling Microscope, STM)



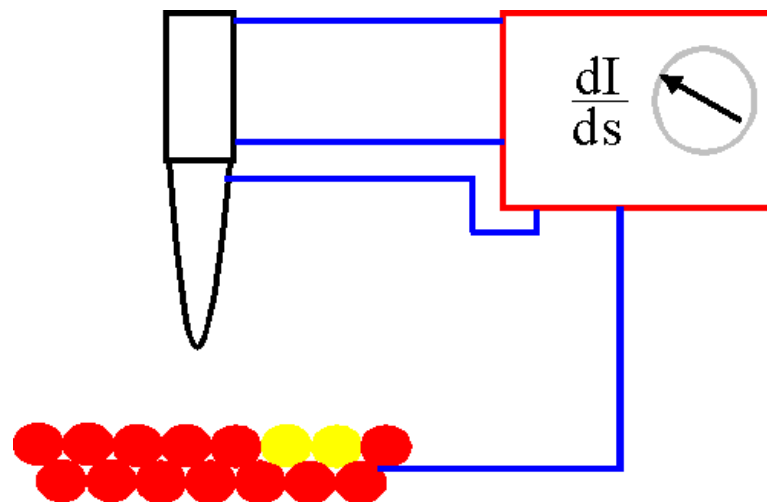
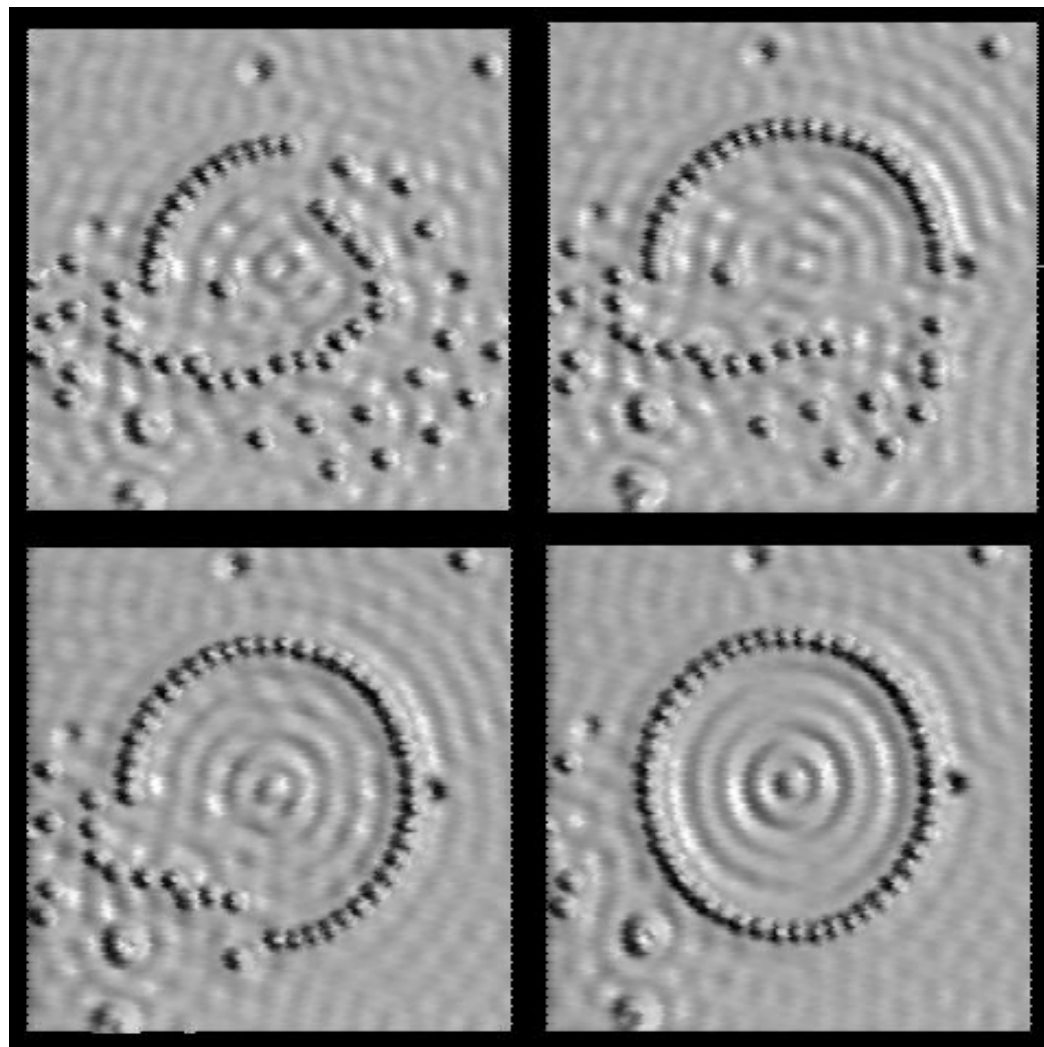
arany (100) felülete

Gerd Binnig és Heinrich Rohrer, 1981, Nobel díj 1986.

felbontás: nanométer tört része

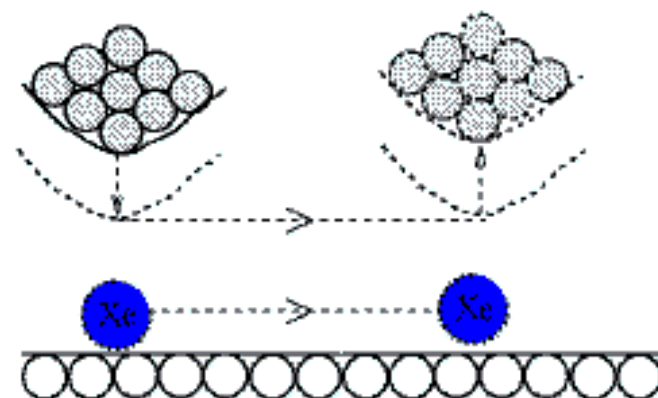
egyedi atomoknak és molekuláknak egy rács felületén való elhelyezkedése vizsgálható és alkalmas egyes atomok mozgatására a felületen.

Pásztázó alagútmikroszkóp



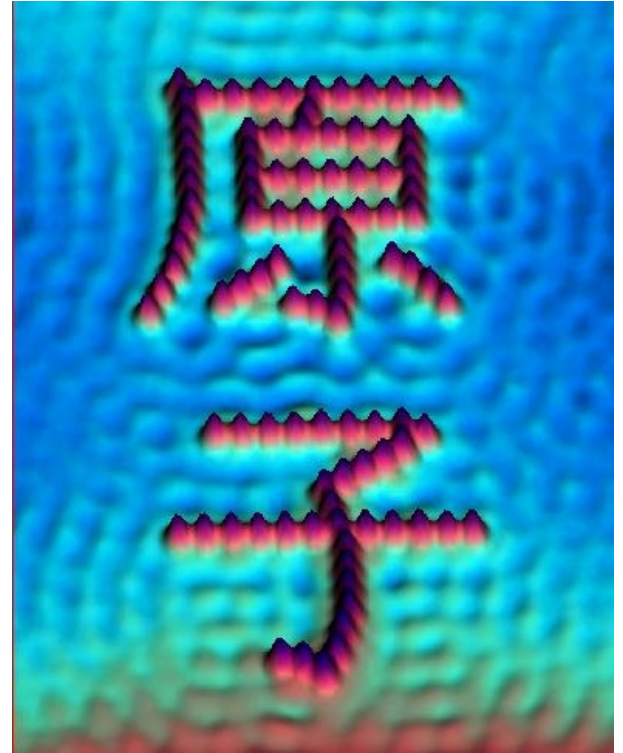
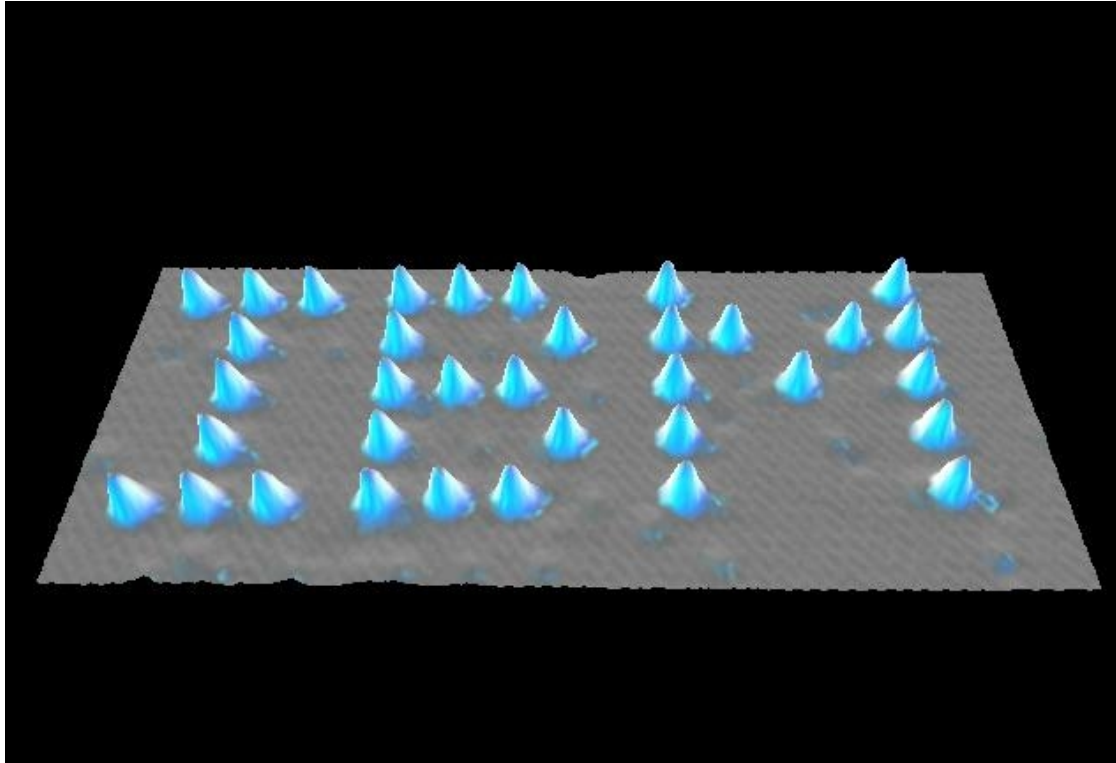
Positioning Atoms with an STM

D.M. Eigler & E.K. Schweizer Nature 344 524 (1990)



The STM tip is brought down near the atom, until the attraction is enough to hold it as the atom is dragged across the surface to a new position.

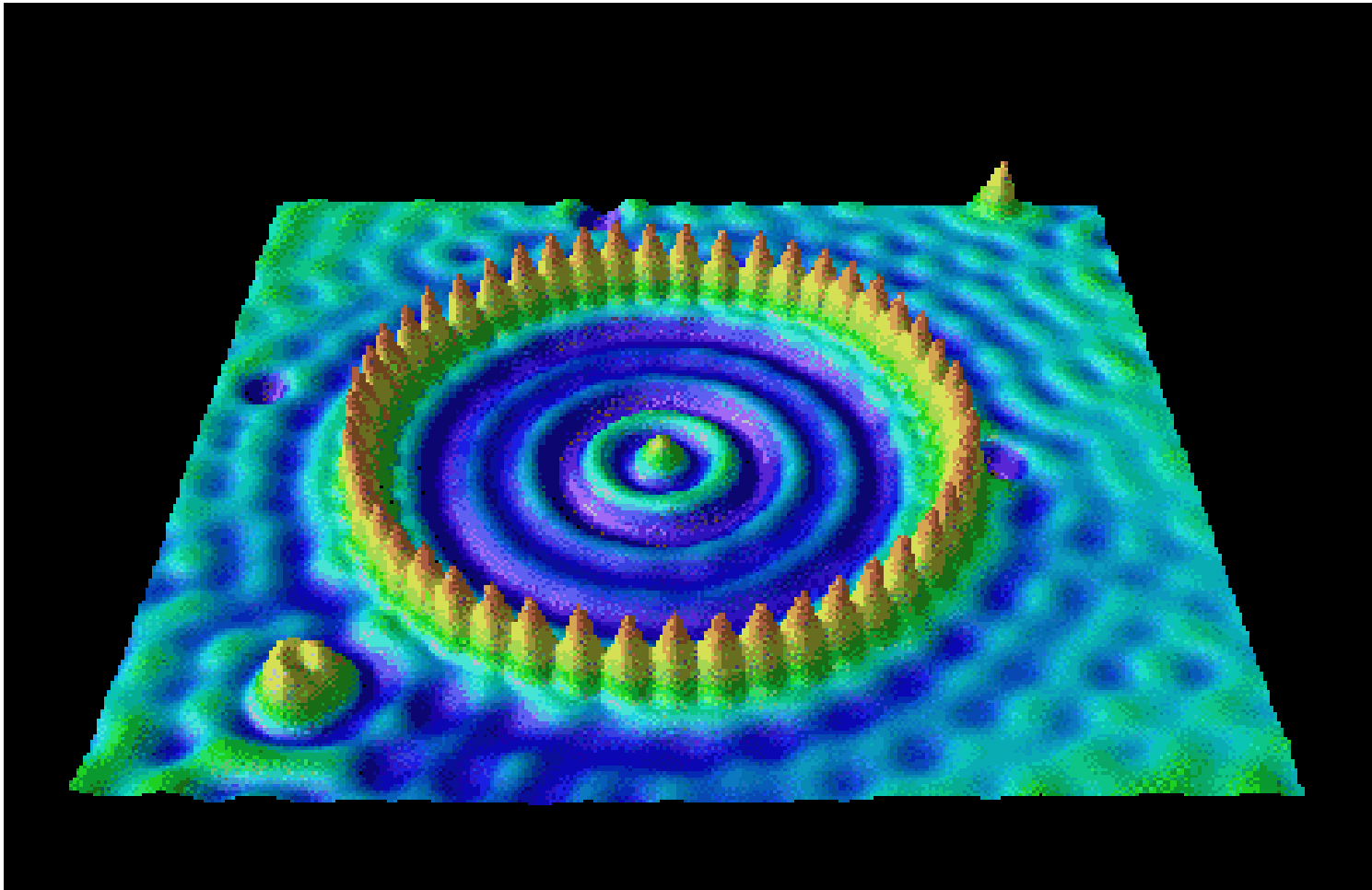
Atomok elhelyezése egy felületen



35 Xenon atom Nickel felületen,
He hőmérsékleten, IBM Zürich Research Laboratory 1990

Kvantum karám

Cu lapon elhelyezett 48 Fe atom egy $R=71,8 \text{ \AA}$ sugarú kör mentén
elektron-állóhullámok

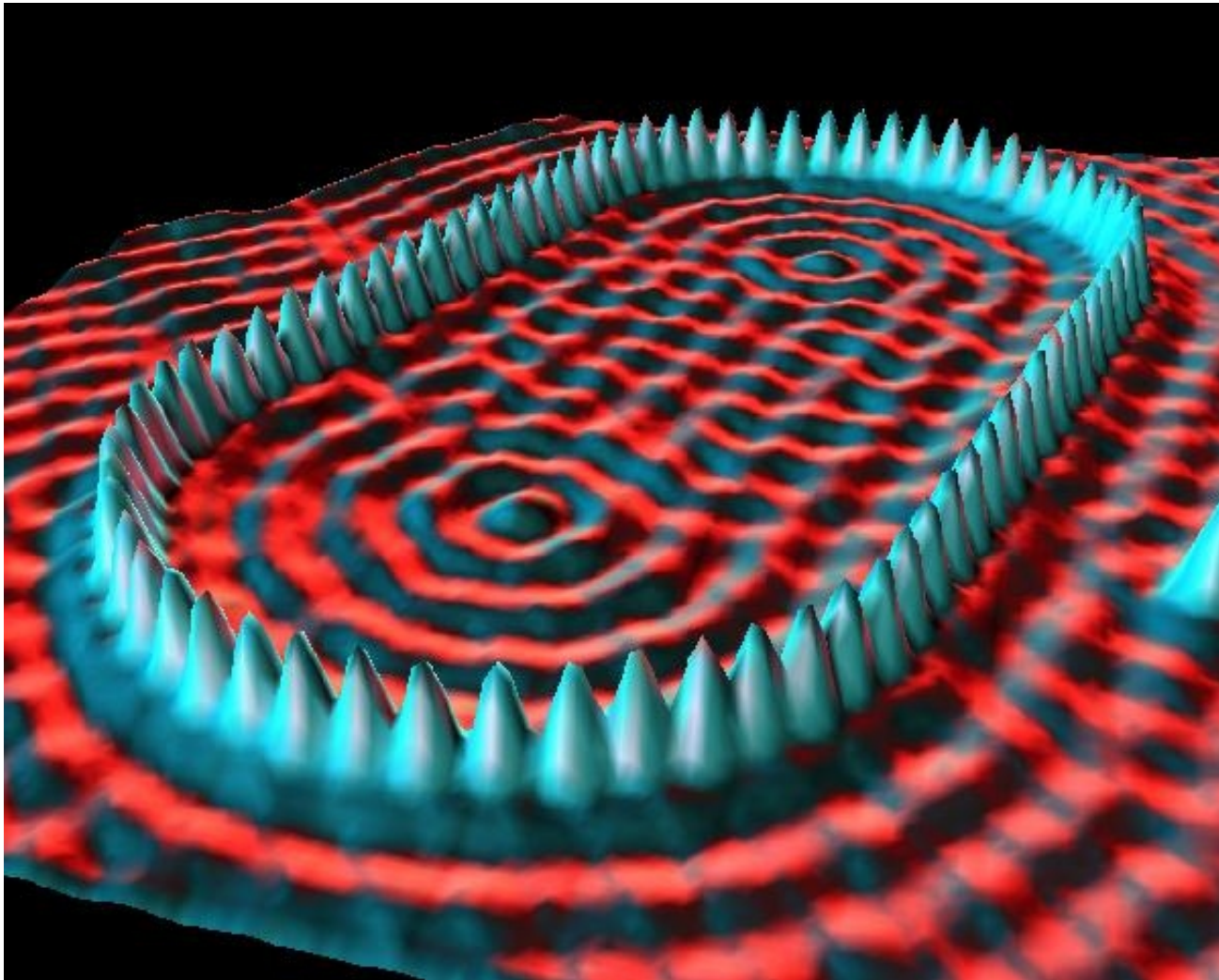


$|\Psi|^2$:

mérése

Kvantum stadion

1995



M.F. Crommie, C.P. Lutz, D.M. Eigler, E.J. Heller. Waves on a metal surface and quantum corrals.

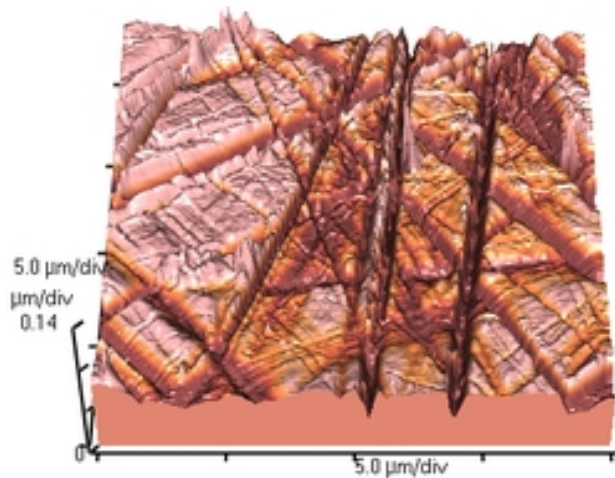
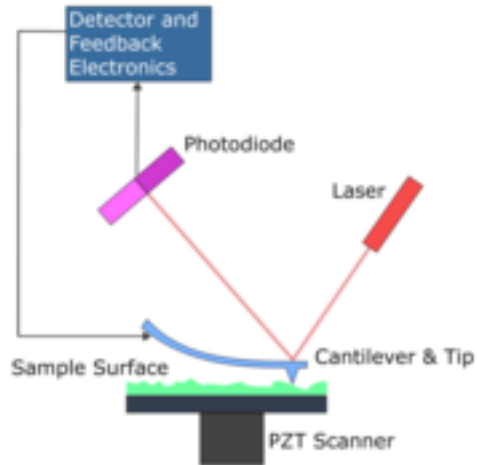
Surface Review and Letters 2 (1), 127-137 (1995).

Cs. J.: KÖMAL 2004. április szám

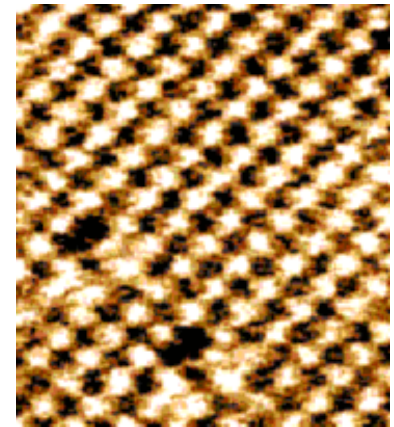
Atomi erőmikroszkóp (Atomic Force Microscope, AFM)

Binnig, Quate, Gerber, 1986

felbontás: a nanométer tört része,
1000-szer jobb felbontású, mint az optikai felbontás határa

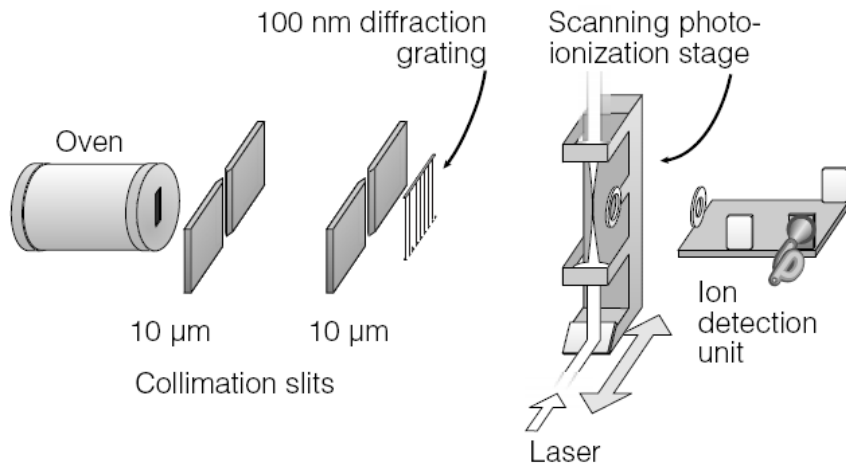
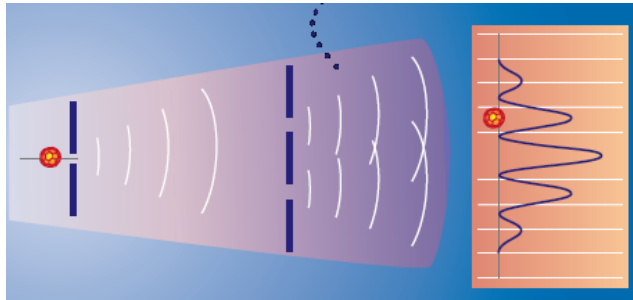


üveg felülete



NaCl kristály atomjai

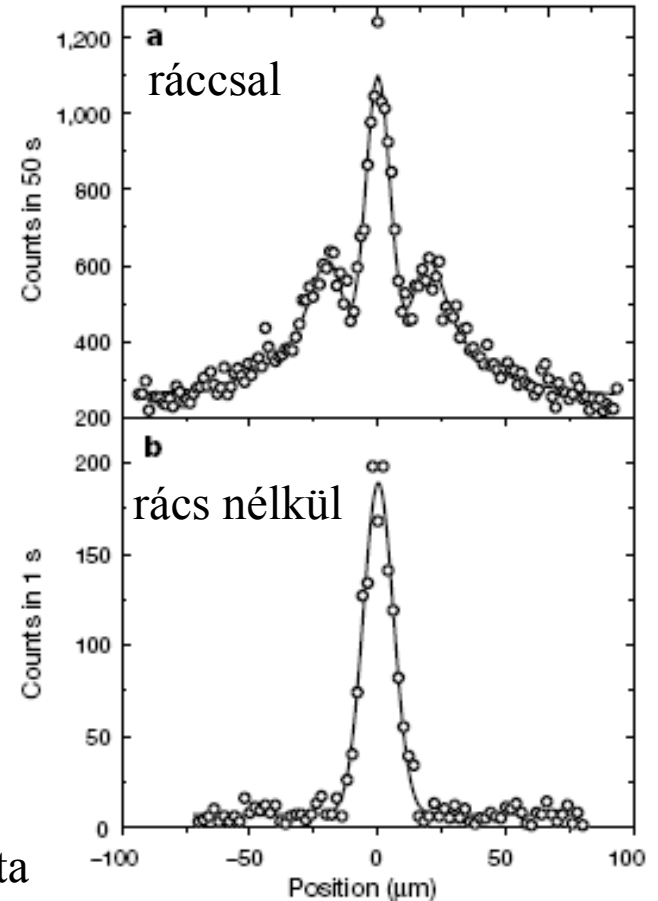
Hullám-részecske dualitás fullerene molekulákkal (Wave-particle duality of C₆₀ molecules (fullerene))



interferencia minta

folytonos vonal:

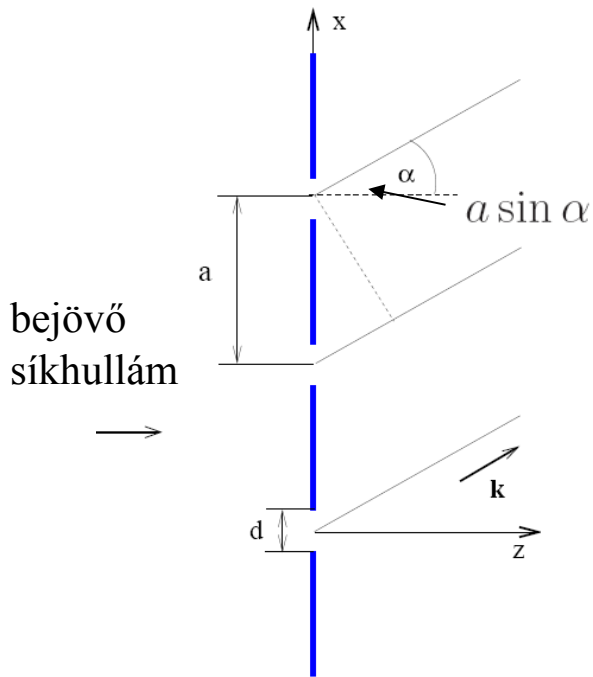
Kirchhoff diffrakciós elmélet



Fourier-optika

Ismétlés: (3. fejezet, 17. és 18. oldal)

Optikai rács (N db rész): Periodikus áteresztés: $T(x) = T(x + a)$



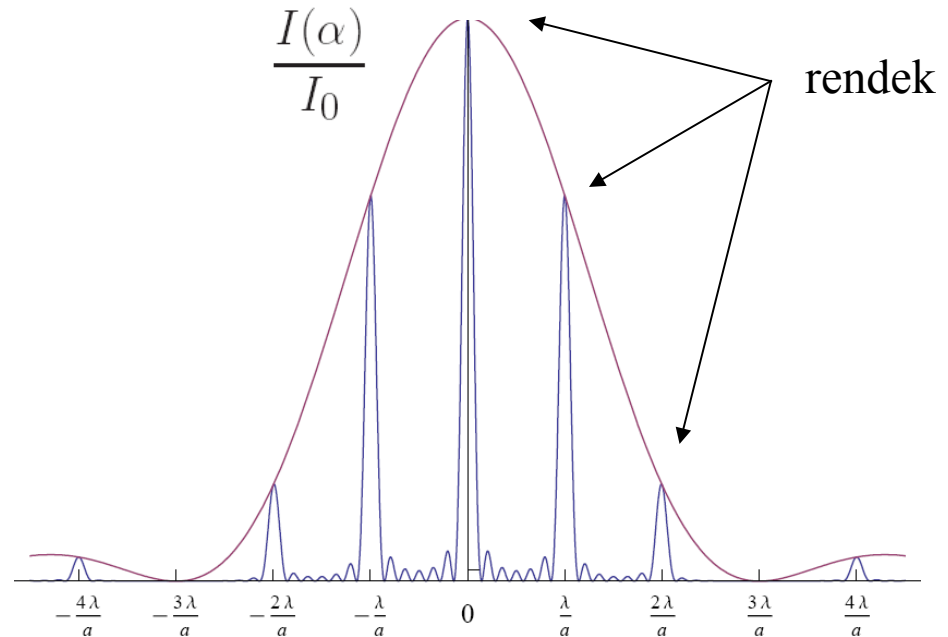
erősítések iránya:

$$a \sin \alpha = m \lambda$$

$$I(\alpha) = |U(\alpha)|^2 = I_0 \frac{\sin^2(\pi u N)}{\sin^2(\pi u)} |U_{1 \text{ rész}}(\alpha)|^2$$

Szerkezeti tényező
(structure factor)

Alaktényező
(form factor)



$\sin \alpha$

A főmaximumok a reciprokrács pontjaiban vannak.

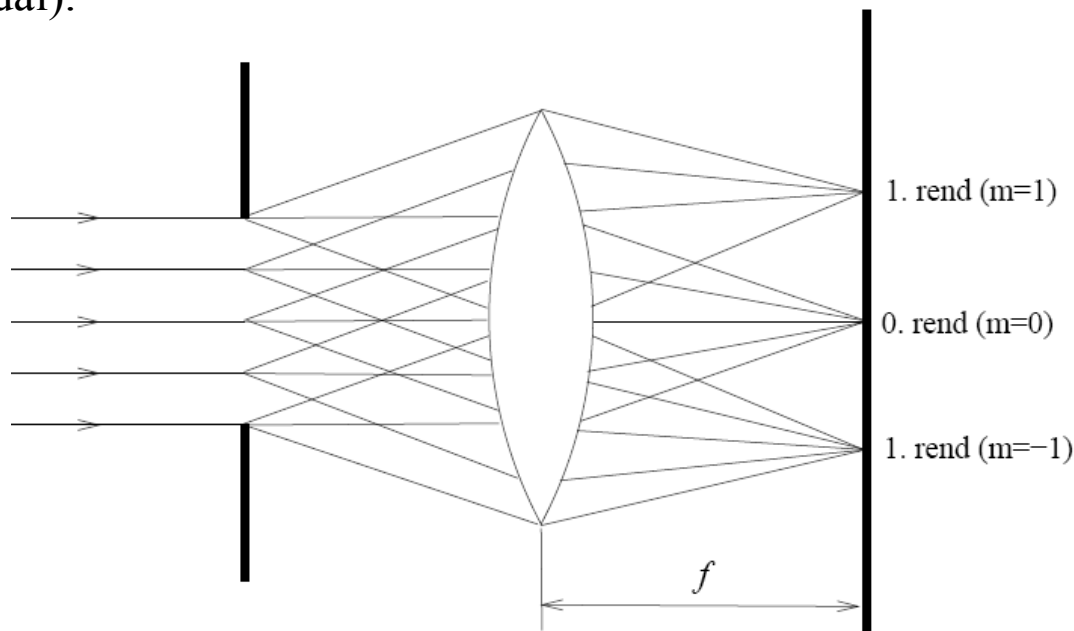
Fraunhofer-diffrakció kísérleti megvalósítása

A Fourier-optika alapja

Fourier-transzformáció:
(3. fejezet, 6. oldal)

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

Végtelen távoli megfigyelési pont könnyen megvalósítható egy gyűjtőlencsével.
Egy diffrakciós irány egy pont a lencse fókusz-síkjába helyezett ernyőn
(3. fejezet, 26. oldal).



fókusz távolság

Fourier-transzformáció lencsével

(2f elrendezés)

Fourier-transzformáció egydimenzióban:

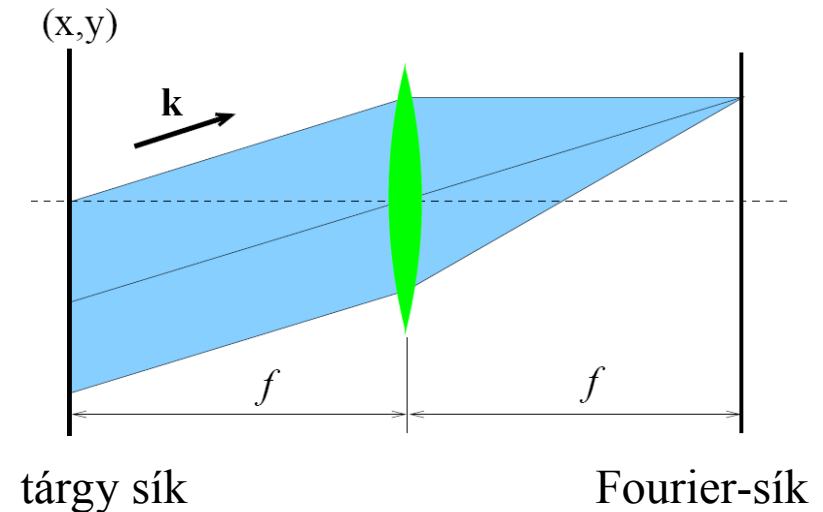
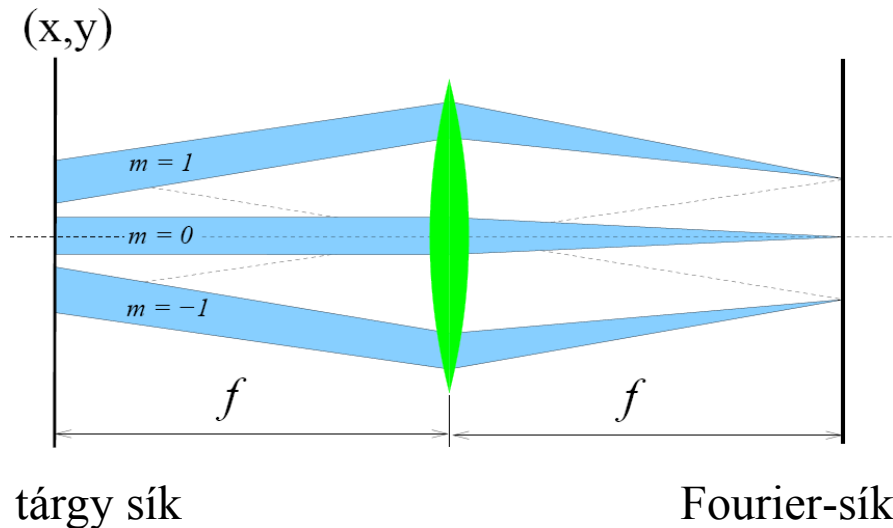
$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} := \mathcal{F}\{f(x)\}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k) e^{ikx} := \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}$$

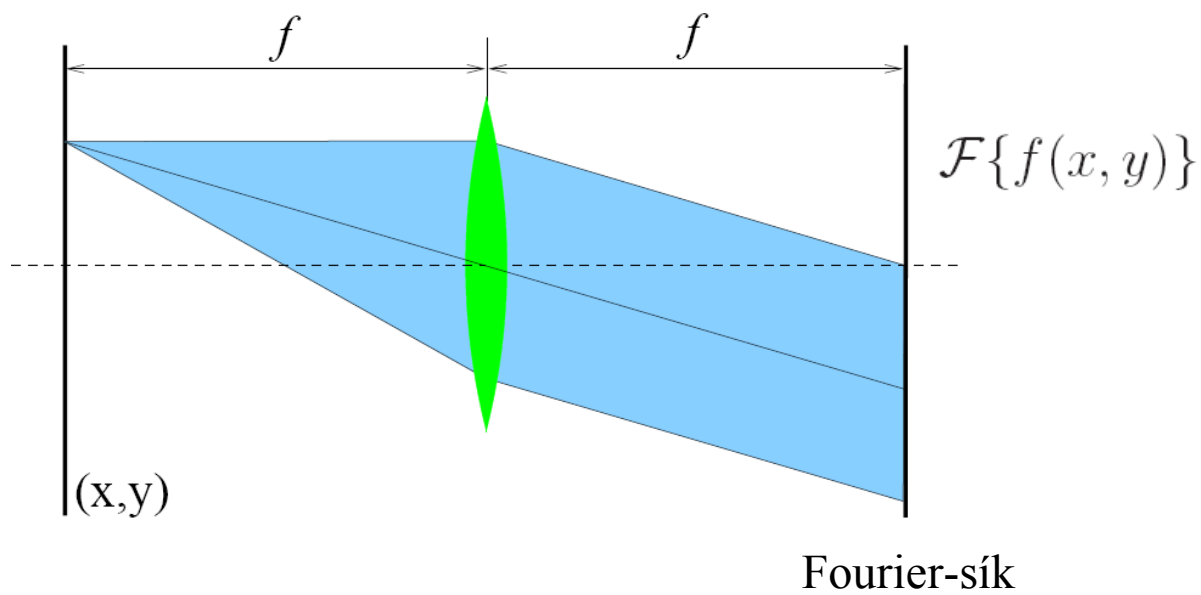
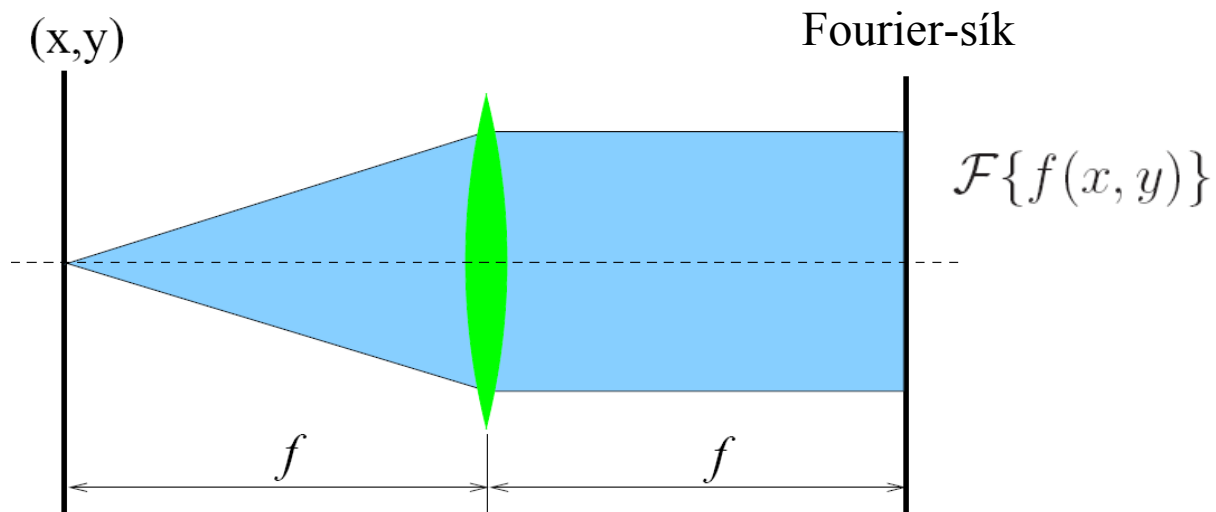
Fourier-transzformáció kétdimenzióban:

$$F(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy f(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} := \mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\}$$

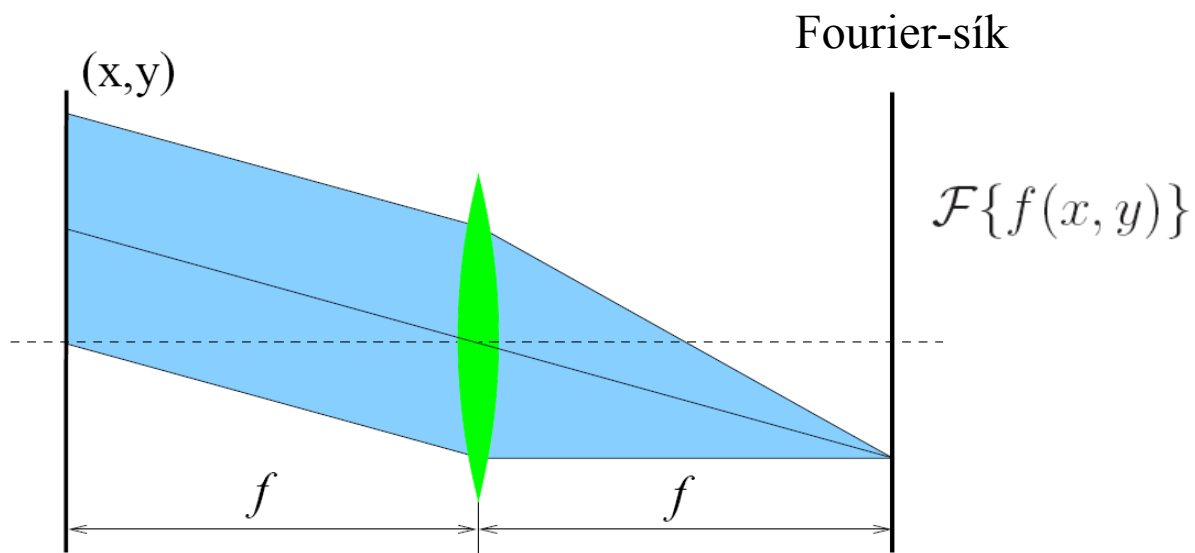
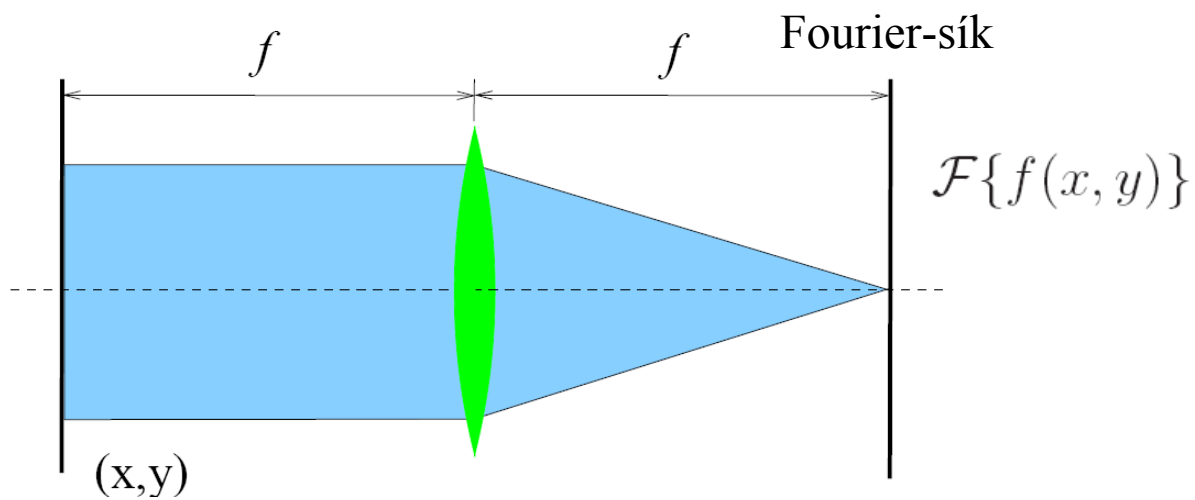
$$U(\mathbf{k}) \sim \int d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} := \mathcal{F}\{U(\mathbf{r})\}$$



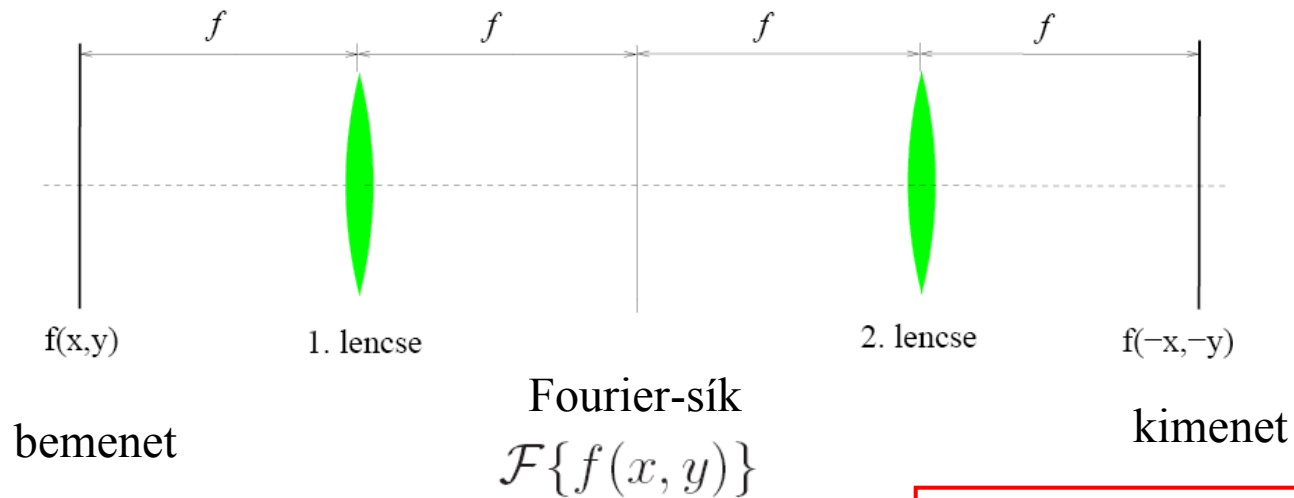
Pontforrás képe síkhullám:



Síkhullám képe pont:



Az eredeti kép rekonstrukciója ($4f$ elrendezés, „optikai computer”)



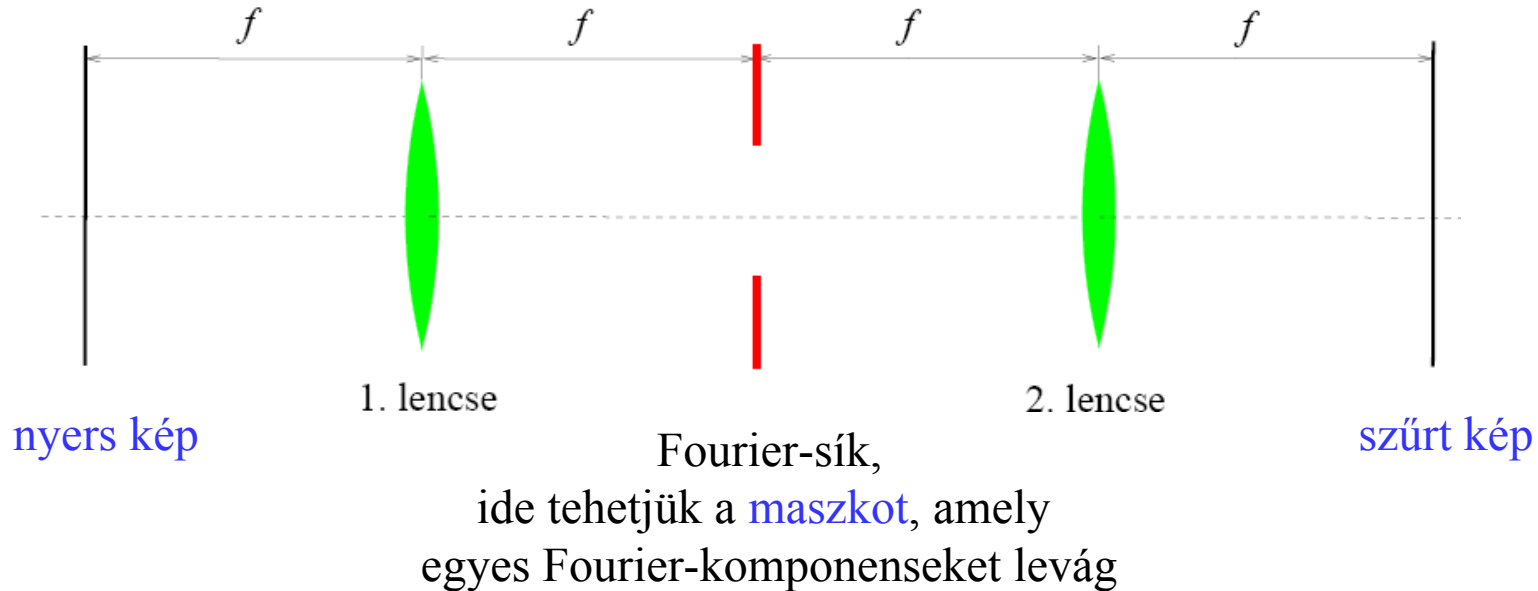
$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x,y)\}\} = f(-x,-y)$$

fordított állású kép

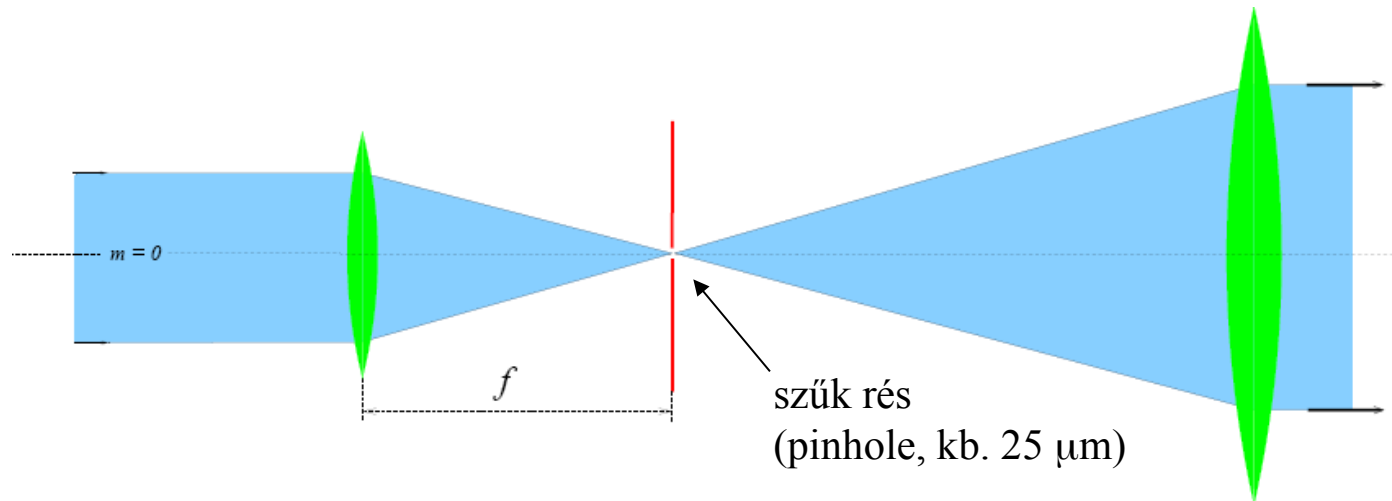
A magasrendű Fourier-komponensek a tárgy éles változásiból származnak, ahol a tárgy világos és sötét részei rövid távolságon belül változnak.

Maszkolás (filtering): képfeldolgozás térbeli szűréssel

A Fourier-síkban végrehajtott műveletekkel a végső képalkotást céljainknak megfelelően módosíthatjuk (kontrasztnövelés, zajszűrés, stb.).



Alacsonyrendű Fourier-komponensek átengedése (Low-Pass Filtering)



Csak az $m = 0$ rendű Fourier-komponens jut keresztül a maszkon.

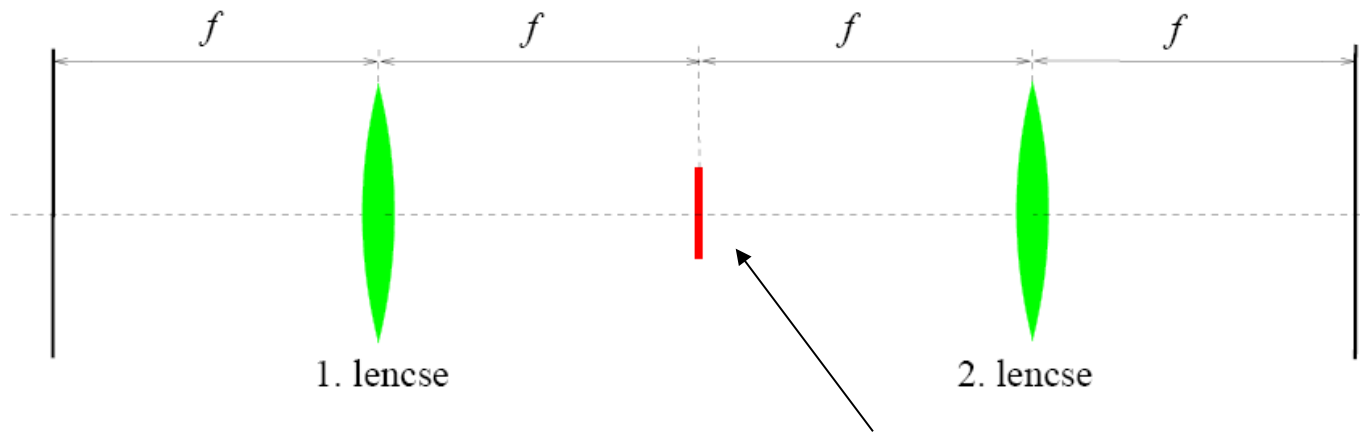
A 2. lencse a pontforrást síkhullámmá transzformálja, függetlenül a forrás terétől.

Így kiszűrhetők azok rendek, amelyek például egy lencsén lévő zavaró foltok (piszok) miatt keletkeznek. A bemenő hullámfront torzítása kiszűrhető.

A 2. lencse (kollimáló lencse) egyben [nyalábtágítóként](#) is működik.

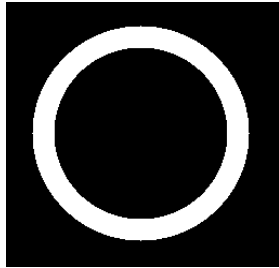
Magasrendű Fourier-komponensek átengedése (High-Pass Filtering)

Az alacsony rendű (tipikusan az $m = 0$) Fourier-komponenseket kiszűrjük, csak a magasrendű Fourier-komponensek juthatnak keresztül a maszkon.

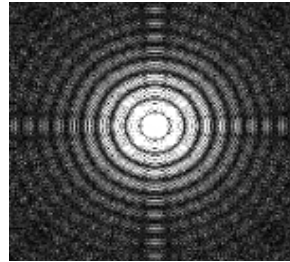


Maszk (filter),
ami az $m = 0$ rendű
Fourier-komponenst szűri ki.

- Magasrendű Fourier-komponensek levágása lágyítja a képet, tompítja a kontrasztot.



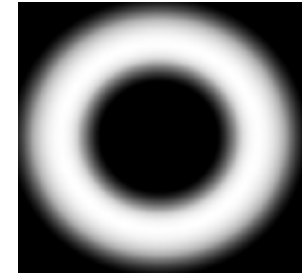
eredeti tárgy



$$\mathcal{F}\{f(x, y)\}$$



low pass filter

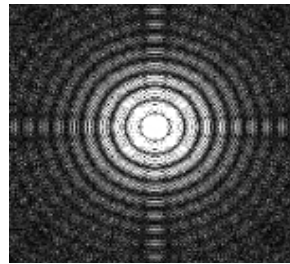


kép

- Alacsonyrendű (tengelyközeli) Fourier-komponensek kiszűrése élénkíti a képet, élesíti a kontrasztot.



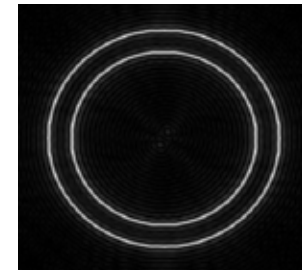
eredeti tárgy



$$\mathcal{F}\{f(x, y)\}$$

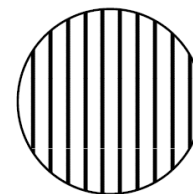
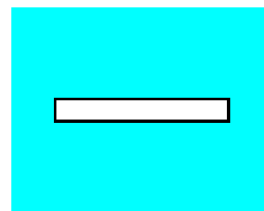
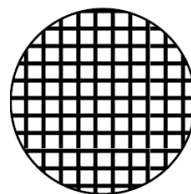


high pass filter



kép

- Vízszintes rés levágja a tárgy vízszintes vonalait, kiemeli a függőleges (esetleg rejtett) szerkezetet (ha van).



Fáziskontraszt-mikroszkóp

(phase filtering) Fritz Zernike (1888-1966), 1953-ban Nobel díj

A „fázistárgy” olyan átlátszó tárgy, amelynek részletei csak törésmutatóban különböznek egymástól (pl. egy baktérium belseje). Ilyen részletek közönséges mikroszkópban nem láthatók.

$$U(x, y) \sim ae^{i\varphi(x, y)} \quad \longrightarrow \quad I \sim |U(x, y)|^2 = 1 \quad \text{Az eredeti tárgy intenzitásában nem láthatók a tárgy fázisának részletei.}$$

$$U(x, y) \sim ae^{i\varphi(x, y)} \approx a(1 + i\varphi(x, y)) \quad \longleftarrow \quad |\varphi(x, y)| \ll 2\pi$$

$$\mathcal{F}\{U(x, y)\} = a(\mathcal{F}\{1\} + i\mathcal{F}\{\varphi(x, y)\})$$

Az $m = 0$ rendhez egy $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ fázistolást adunk egy $\lambda/4$ lemezzel.

$$\mathcal{F}_{\text{filter}}\{U(x, y)\} = ai(\mathcal{F}\{1\} + \mathcal{F}\{\varphi(x, y)\})$$

$$\text{A 2. lencse hatása: } \mathcal{F}\{\mathcal{F}_{\text{filter}}\{U(x, y)\}\} = ai(1 + \varphi(-x, -y))$$

$$\text{Intenzitás: } I_{\text{filter}} = a^2(1 + 2\varphi(-x, -y) + \varphi^2(-x, -y)) \approx a^2(1 + 2\varphi(-x, -y))$$

A fázis részletei megjelennek az intenzitásban!

Fáziskontraszt-mikroszkóp gyakorlati megvalósítása



Living Cells in Brightfield and Phase Contrast

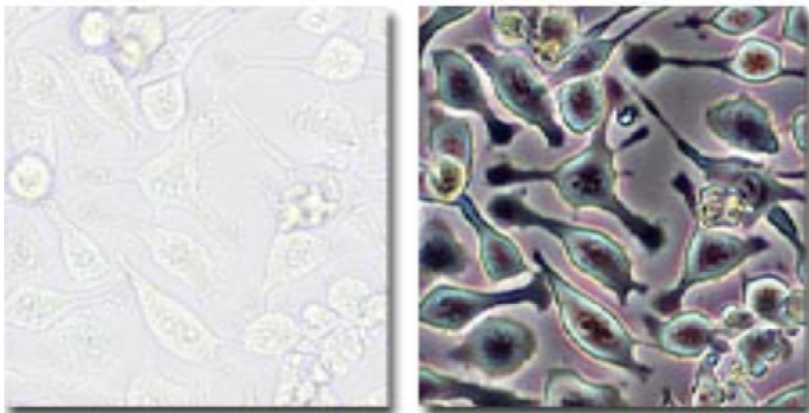
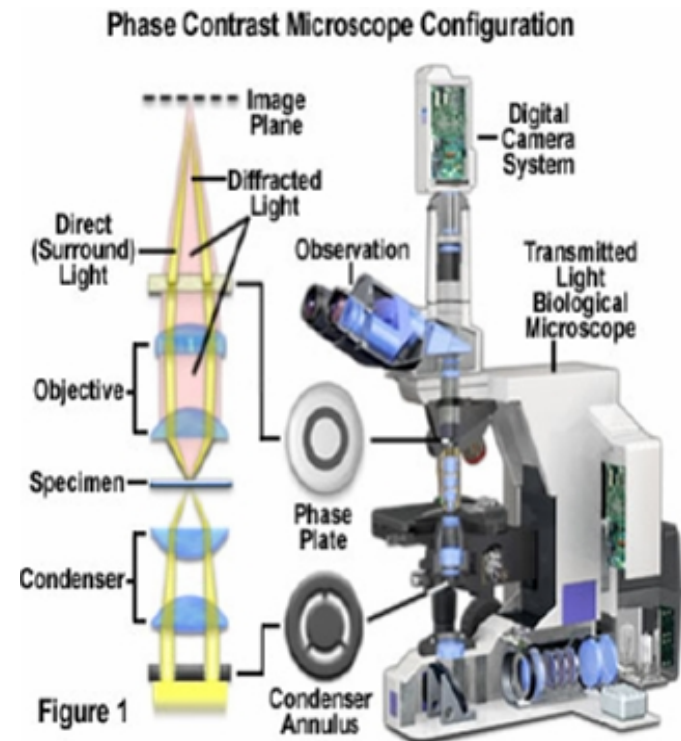


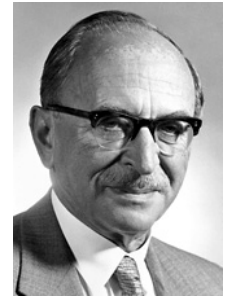
Figure 2



Holográfia

(Gábor Dénes, 1947 – Nobel díj 1971,

Faigel Gyula - Tegze Miklós: röntgen-holográfia kristálybeli atomokról)



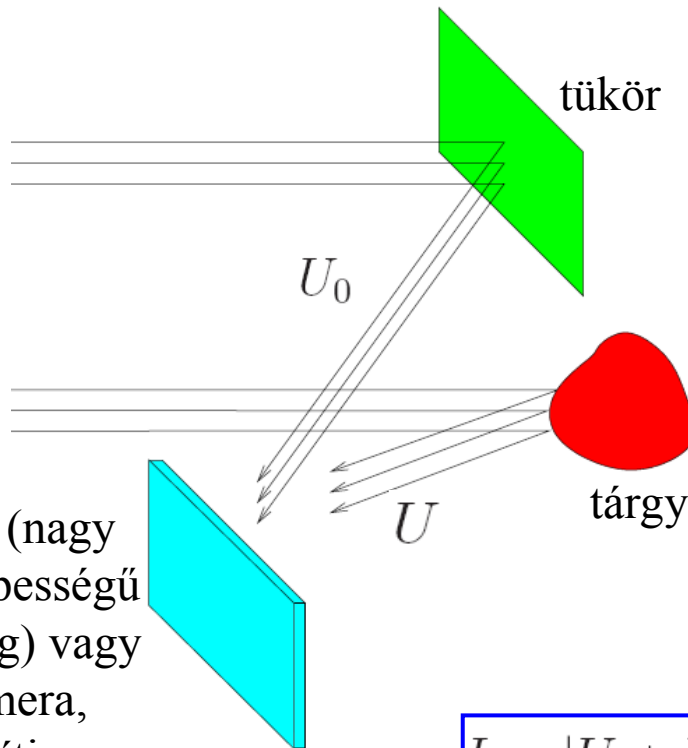
holo+gráfia = egész + rajz

A kétdimenziós fénykép csak az intenzitásokat rögzíti, pedig a hullám fázisában benne lenne az információ a tárgy háromdimenziós alakjáról.

Megoldás: **interferencia egy referencia-nyalábbal**

Rögzítés:

referencia
nyaláb (lézer)



Fotópapír (nagy
felbontóképességű
rögzítőanyag) vagy
CCD kamera,
ami rögzíti az
interferenciaképet.

Ez a hologram.

Az elrendezés **rezgésmentes** alapon van.

A tárgyról szóródott hullám
komplex amplitúdója:

$$U \sim Ae^{i\varphi}$$

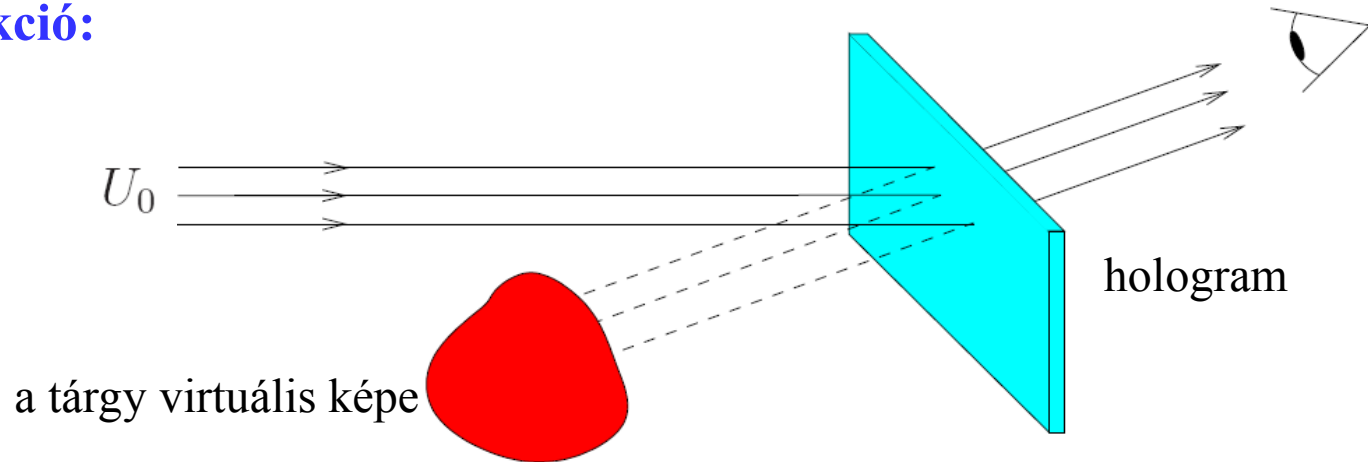
A referencia nyaláb:

$$U_0 \sim A_0e^{i\varphi_0}$$

A filmre eső intenzitás:

$$I = |U + U_0|^2 = UU^* + U_0U_0^* + UU_0^* + U^*U_0$$

Rekonstrukció:



Az exponált film áteresztése (a film feketedése az I intenzitással arányos):

$$t = t_0 - bI$$

Rekonstrukció (optikai szorzás): U_0t

$$U_0t = U_0t_0 - b \left(\underbrace{U_0UU^*}_{I_{\text{tárgy}}} + \underbrace{U_0U_0U_0^*}_{I_0} + \color{red}{UU_0U_0^*}_{I_0} + U^*U_0U_0 \right)$$

itt a kép!

oszcillál

Alkalmazások:

- 1) Látványholográfia: cél a rekonstrukció
- 2) Bonyolult optikai rácsok hologramként való elkészítése (térbeli szűrő, vonalkód olvasó, szkener...)