

# A MAGNETOOPTIKAI FARADAY-EFFEKTUS

Tichy Géza emlékére, aki évekig tanította egyik kedvenc tárgyát, az anizotrop fizikát

Cserti József

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Michael Faraday először 1845-ben figyelte meg kísérleteiben, hogy a fény polarizációs síkja a mágneses térbe helyezett anyagon áthaladva elfordul. A következő évben kétrészes cikkben publikálta az eredményeit [1]. Ezeket a kísérleti tapasztalatokat tekintjük az optika és az elektromágnesség közti kapcsolat első közvetlen kísérleti bizonyítékának, és a jelenséget *Faraday-effektusnak* nevezik, gyakran magnetooptikai jelzővel kiegészítve. A polarizációs sík elfordulásának  $\vartheta$  szöge arányos a külső  $B$  mágneses indukció nagyságával és azzal a  $d$  távolsággal, amit a fény az anyagban megtesz (1. ábra):

$$\vartheta = VBd, \quad (1)$$

ahol a  $V$  arányossági tényezőt *Verdet-állandónak* nevezik. Ötven évvel később Becquerel<sup>1</sup> a kvantummechanika kidolgozása előtt, az akkoriban felfedezett elektron klasszikus mozgásának leírásával mikroszkopikus szinten értelmezte a Faraday-effektust [2].

A jelenség fenomenologikus leírása arra épül, hogy bizonyos, úgynevezett *girotrop* anyagok törésmutatója függ a mágneses tértől. Ha állandó mágneses térbe helyezzük a girotrop anyagot, akkor a jobbra, illetve balra cirkulárisan polarizált elektromágneses hullámra különböző lesz az anyag törésmutatója. Az eltérés arányos a mágneses tér nagyságával. Ugyanakkor az arányossági tényezőt csak mikroszkopikus szinten lehet meghatározni. Ezért a jelenséget végső soron csak kvantummechanikai leírással lehet megérteni. Az olvasónak több magyar és angol nyelvű könyvet ajánlhatunk a témával kapcsolatban: [3–8].

A polarizációs sík elfordulását máshol is megfigyelhetjük. Nevezetesen optikailag aktív, királis anyagok-

ban, mégpedig mágneses tér alkalmazása nélkül, de annak mikroszkopikus háttere egészen más. Ott valóban az anyag valamilyen térbeli szimmetriájának hiánya van a háttérben. Az alkotó molekulák jobbkezesek vagy balkezesek, és ezért más irányban forgatják el a polarizáció síkját. Ezt jelenséget *természetes optikai aktivitásnak* nevezik [3–8]. A Faraday-forgatást viszont nem a szerkezet, hanem a mágneses tér jelenléte okozza.

Ezt a munkát egyetemi oktatási anyagnak szánjuk, ezért nem kívánunk részletes áttekintést adni a témáról. Elsődleges célunk, hogy vázoljuk a fenomenologikus leírás alapját, illetve a mikroszkopikus elméletet a klasszikus és a kvantummechanika keretén belül.

Először az anyag dielektromos együtthatójának tulajdonságait vizsgáljuk, majd kiszámoljuk a mágneses térbe helyezett anyag törésmutatóját. Ennek ismeretében fenomenologikus szinten értelmezzük a Faraday-effektust. A következő részben a *Lorentz-modell* alapján klasszikusan, illetve a *Zeeman-effektusból* kiindulva egy egyszerű kvantummechanikai magyarázatot adunk a Faraday-effektusra.

## A Maxwell-elmélet anyagi egyenletei

Közegben az elektromágneses hullámok egyenletét a jól ismert Maxwell-egyenletekből [3, 9, 10]:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2b)$$

a szabad töltések és áramok hiányában (azaz a  $\rho = 0$  és  $\mathbf{j} = 0$  esetben) érvényes alakjából vezethetjük le, az anyagi egyenletek felhasználásával. Az anyagi egyenletek a  $\mathbf{D}$  elektromos eltolásvektor és az  $\mathbf{E}$  elektromos térerősség között, illetve a  $\mathbf{B}$  indukcióvektor és a  $\mathbf{H}$  mágneses térerősség között teremtenek kapcsolatot. Később girotrop anyagra fel is írjuk a hullámegyenletről adódó sajátérték-egyenletet az  $\mathbf{E}$  elektromos térerősségre (lásd a (13) egyenletet).

A továbbiakban mindig hullámterjedési jelenségekre gondolunk, a síkhullámmegoldást komplex alakba írjuk, a komplex amplitúdó tartalmazza a hullám fázisát. Előfordul, hogy a bejövő hullám és a közegben általa létrehozott polarizációs hullám nincs fázisban, amit úgy tudunk leírni, hogy a dielektromos együtthatót komplexnek tekintjük, és ezért a valós és a képzetes részét is meg kell vizsgálni.

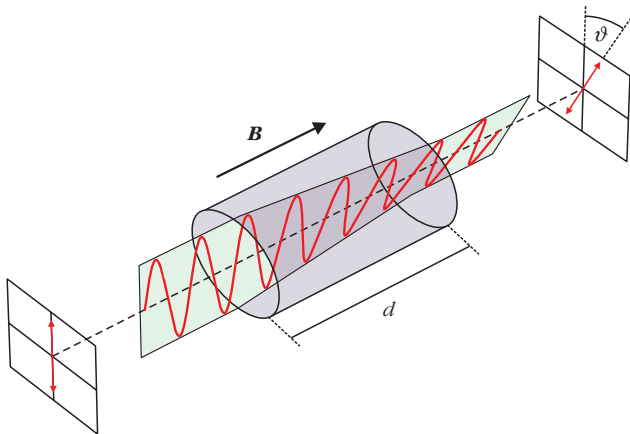
Kiegészítő tananyag az ELTE II. éves BSc fizikus hallgatók számára.

Köszönetemet szeretném kifejezni Bordács Sándornak, Dávid Gyulának, Simon Ferencnek és Súlyom Jenőnek a kézirat olvasása során javasolt hasznos tanácsaikért. Külön köszönet illeti Csősz Gábort az ábrák gondos elkészítéséért.

<sup>1</sup>Henri Becquerel 1903-ban Pierre Curie-vel és Marie Curie-vel megosztva kapta a fizikai Nobel-díjat a radioaktivitás felfedezéséért.



Cserti József 1982-ben végzett az ELTE fizikus szakán, majd az ELTE korábbi Szilárdtestfizika Tanszékén kezdte oktatói munkáját. 2004-ben habilitált, 2010 óta az MTA doktora, 2013-tól az ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszéken professzor. Kutatási területe a nanofizikai rendszerek, normál-szupravezető rendszerek, spintronika, grafén és a topologikus szigetelők. 2005 óta szervezi az ELTE-n az Atomoktól a csillagokig előadás-sorozatot középiskolásoknak.



1. ábra. A Faraday-effektus: a fény (elektromágneses hullám) polarizációsíkja  $\vartheta$  szöggel elfordul.

Dielektrikumokra feltehetjük, hogy a  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  anyagi egyenletben a  $\mu$  mágneses permeabilitás továbbra is skalár mennyiség, és a vákuumbeli értékkel ( $\mu_0$ ) egyezik meg. Az optikai jelenségek magyarázatának kiindulópontja, hogy az anyagok  $\mathbf{P}$  polarizációs vektorát az elektromos és mágneses terekkel, és ezek hely szerinti deriváltjaival hatványsor alakban lehet felírni (lásd például a [4] könyv 331. oldalát):

$$\frac{P_i}{\varepsilon_0} = \chi_{ij}^{(1,a)} E_j + \chi_{ijk}^{(1,b)} \partial_j E_k + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \eta_{ijk} E_j H_k + \dots, \quad (3)$$

ahol az egy tagban kétszer előforduló indexekre automatikusan összegzünk. A képletben előforduló különböző szuszceptibilitási tenzorok komponenseit kísérletileg és/vagy elméletileg lehet meghatározni, de a komponensek között a kristály szimmetriái extra összefüggéseket írhatnak elő (a szimmetriák és az együttthatótenzorok kapcsolatát először Pierre Curie tanulmányozta). A (3) egyenletben az egyes tagok az optika különböző jelenségeit írják le. A legismertebb jelenség a kristályok kettőtörése, amit az első tag ír le. Legtöbb esetben a  $\mathbf{P}$  polarizációs vektor lineárisan függ az elektromos tértől. Az optikai közegek egy igen fontos osztályát alkotják azok a kristályos anyagok, amelyek leírásában az  $\mathbf{E}$ -ben magasabb rendű tagok is szerepet játszanak ( a (3) egyenletben a harmadik és negyedik tag). Ezekkel a jelenségekkel itt most nem foglalkozunk, ezeket a nemlineáris optika keretében tárgyalja az irodalom: [3–8].

## A dielektromos függvény szimmetriái

A Faraday-effektus fenomenologikus elméletének megértéséhez fontos áttekinteni a dielektromos tenzor szimmetriáit. A (3) egyenlettel összhangban az eltolásvektor és az elektromos térerősség közti kapcsolat:

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) E_j, \quad (4)$$

ahol az  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  mennyiséget dimenziótlán relatív permittivitásnak, vagy a frekvenciától való függése miatt dielektromos függvénynek nevezik (továbbiakban mi ez utóbbit fogjuk használni). Ez a mennyiség anizotrop közegben, például kristályban egy komplex komponensekből álló  $3 \times 3$ -as tenzor. Ha az anyagban nincs disszipáció, akkor a dielektromos függvény hermitikus mátrix:

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}^*, \quad (5)$$

ahol  $*$  a komplex konjugálást jelenti. E szimmetria igazolását a Landau VIII. kötet [3] 80. és 96. fejezete alapján a *Függelékben* ismertetjük. Termodinamikai megfontolások alapján Onsager 1931-ben tanulmányozta a kinetikus együttthatók szimmetriáit [11], eredményeit azóta *Onsager-relációknak* nevezik az irodalomban (magyarul lásd még a Landau V. kötet [12] 125. fejezetét). Az Onsager-relációkat felhasználva a dielektromos függvény szimmetriatulajdonságairól a Landau VIII. kötetben olvashat az érdeklődő olvasó [3]. Mágneses tér nélkül vagy mágneses szerkezet hiányában a dielektromos függvény szimmetrikus tenzor:

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}. \quad (6)$$

E fontos szimmetriatulajdonság bizonyítása a termodinamikai egyensúlyban lévő állapotban, azaz sztatikus elektromos térben például a Landau VIII. kötet [3] 13. fejezetében, míg nemegyensúlyi rendszerekben érvényes Onsager-relációkat az elektromágneses tér esetére alkalmazva ugyanezen könyv 96. fejezetében található. Ha nincs disszipáció az anyagban, akkor az (5) és a (6) összefüggésekből következik, hogy

$$\varepsilon_{kj}^* = \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj},$$

azaz az  $\varepsilon$  dielektromos függvény mátrixelemei valós számok.

Mágneses tér jelenlétében az Onsager-relációkban a rendszer időtükrözési szimmetriája sérül, ugyanis időtükrözés esetén a mágneses tér előjelet vált. Az Onsager-relációkat felhasználva megmutatható, hogy a (6) egyenletben a mátrix transzponálásakor a mágneses tér irányát az ellenkezőjére kell változtatni:

$$\varepsilon_{jk}(\mathbf{H}) = \varepsilon_{kj}(-\mathbf{H}). \quad (7)$$

Az állandó  $\mathbf{H}$  külső mágneses térhez képest az anyagban terjedő elektromágneses hullám mágneses térerőssége jóval kisebb, nem játszik szerepet az Onsager-relációban.

Végül itt említjük meg, hogy a  $\sigma$  elektromos vezetőképeség-tenzorra is alkalmazhatók az Onsager-relációk, és például a *Hall-effektussal* kapcsolatban hasonló szimmetriarelációk vezethetők le (lásd a Landau VIII. kötet [3] 21–22. fejezeteit):

$$\sigma_{jk}(\mathbf{H}) = \sigma_{kj}(-\mathbf{H}). \quad (8)$$

A továbbiakban a *magnetooptikai Faraday-effektust* (amelyet a (3) egyenlet utolsó tagja ír le) ismertetjük részletesebben. Az érdeklődő olvasó a [3–8, 13] helyeken olvashat bővebben a témáról.

## A Faraday-effektus fenomenologikus leírása

A magnetooptikai jelenségek tanulmányázásához a (7) összefüggésből indulunk ki (lásd még a Landau VIII. kötetben [3] a 101. fejezetet). Disszipáció nélkül az (5) egyenletről az következik, hogy a dielektromosfüggvény-tenzorának valós része szimmetrikus, míg képzetes része antiszimmetrikus, azaz  $\text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}\} = \text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{kj}\}$  és  $\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}\} = -\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{kj}\}$ . Figyelembe véve a (7) egyenletet, kapjuk:

$$\text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(\mathbf{H})\} = \text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{kj}(\mathbf{H})\} = \text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(-\mathbf{H})\}, \quad (9a)$$

$$\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(\mathbf{H})\} = -\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{kj}(\mathbf{H})\} = -\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(-\mathbf{H})\}. \quad (9b)$$

A (9a), illetve a (9b) egyenletben az első egyenlőség az (5), míg a második egyenlőség a (7) egyenletről következik. A fenti egyenlőségekből világos, hogy a dielektromos függvény valós része a  $\mathbf{H}$  mágneses tér páros függvénye, míg képzetes része a  $\mathbf{H}$ -nak páratlan függvénye.

Ismeretes, hogy három dimenzióban egy antiszimmetrikus tenzor mindig felírható egy megfelelő axiálvektor segítségével (Hodge-duális):

$$A_{ij} = \varepsilon_{ikj} a_k,$$

ahol  $\varepsilon_{ikj}$  a Levi–Civita-szimbólum. Ennek megfelelően az  $\mathbf{A}$  mátrix hatása egy tetszőleges  $\mathbf{x}$  vektorra:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

A fentiek szerint az  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  dielektromos függvény és ennek megfelelően a  $\mathbf{D}$  elektromos eltolásvektor a legáltalánosabb alakban így írható:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)} + i\mathbf{G}, \quad (10a)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left( \boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)} \mathbf{E} + i\mathbf{g} \times \mathbf{E} \right), \quad (10b)$$

ahol „i” a komplex egységgyök,  $\mathbf{G}$  anyagtól függő antiszimmetrikus tenzor és  $\mathbf{g}$  a hozzá tartozó axiálvektor, míg  $\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)}$  szimmetrikus tenzor a közeg dielektromos függvénye mágneses tér nélkül (a dielektromos függvény szimmetrikus részének  $\mathbf{H}$ -ban másodrendű függését kis mágneses tér esetén elhanyagoljuk). A  $\mathbf{g}$  vektort *girációs vektornak*, és az ilyen dielektromos függvényvel rendelkező anyagokat *giotrop* közegeknek nevezik. A (9b) egyenlet szerint a  $\mathbf{g}$  vektor  $\mathbf{H}$ -ban legalacsonyabb rendben arányos a külső mágneses térrel:

$$\mathbf{g} = \gamma \mathbf{H}, \quad (11)$$

ahol  $\gamma$  a mágneses tértől független, de anyagtól függő valós szám (izotrop anyagra skalár mennyiség, általá-

nosan azonban lehet tenzor is). E mennyiség meghatározását a mikroszkopikus elmélet alapján a következő fejezetben ismertetjük. Itt jegyezzük meg, hogy a polarizációs vektor (3) képletében az utolsó tagban szereplő  $\eta_{ijk}$  tenzor is kifejezhető a  $\gamma$  mennyiséggel az

$$\eta_{ijk} = i\gamma \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} \varepsilon_{ijk}$$

összefüggésen keresztül.

Megmutatható, hogy anizotrop giotrop anyagban az optikai tengelytől eltérő irányban az elektromágneses hullám elliptikusan polarizált, de erősen elfajult, azaz közel lineárisan polarizáltnak tekinthető (az elliptikusan polarizált hullám terjedésének részletes leírása megtalálható a [3] könyvben). Ez azzal magyarázható, hogy a polarizációs ellipszis tengelyeinek aránya  $1/|\mathbf{g}|$ -vel arányos, és a giotrop anyagokban a  $\mathbf{g}$  girációs vektor nagysága kicsi (sokkal kisebb, mint a mágneses tér nélküli dielektromos függvény).

Más lesz a helyzet, ha a dielektromos függvény sajátértékei közül kettőnek vagy mind a háromnak az értéke azonos (egytengelyű kristály, illetve izotrop dielektrikum). Ilyenkor a közeg szimmetriájának megváltozása miatt alapvetően más magnetooptikai viselkedés tapasztalható. A Faraday-effektus akkor figyelhető meg, ha a fény terjedésének iránya párhuzamos a  $\mathbf{g}$  girációs vektorral, azaz a külső mágneses térrel, egytengelyű kristály esetén ezen felül ez az irány egybeesik az optikai tengellyel (ebben az irányban az ordinárius és extraordinárius hullámnak megfelelő törésmutató megegyezik). A továbbiakban az egytengelyű kristály általánosabb esetével foglalkozunk (az izotrop eset innen már könnyen adódik).

Ha az egytengelyű kristályban a  $z$  tengelyt az optikai tengely irányában választjuk, akkor a dielektromos tenzor alakja:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)} = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

ahol  $n_o$  a törésmutató értéke az optikai tengely irányában,  $n_e$  pedig az arra merőleges irányban. Izotrop anyagra  $n_e = n_o$ . Vizsgáljuk meg az egytengelyű giotrop kristályban a fény terjedését, figyelembe véve a közeg  $\mathbf{g}$  girációs vektorát! A  $\mathbf{k}$  irányban terjedő  $\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  síkhullámra a (2) Maxwell-egyenleteket felhasználva a következő sajátérték-egyenletet kapjuk az  $\omega$  sajátfrekvenciára és az  $\mathbf{E}_0$  sajátvektorra:

$$(\mathbf{k} \circ \mathbf{k} - \mathbf{I}k^2) \mathbf{E}_0 = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \boldsymbol{\varepsilon}_r \mathbf{E}_0, \quad (13)$$

ahol  $c_0 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$  a fénysebesség vákuumban,  $\mathbf{I}$  a  $3 \times 3$ -as egységmátrix, és  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  a közeg dielektromosfüggvény-tenzora. Itt  $\mathbf{k} \circ \mathbf{k}$  a diadikus szorzatot jelöli (általában az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok diadikus szorzata egy mät-

rix, amelynek mátrixelemei:  $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$ ). Ez az egyenlet egy homogén egyenletrendszer ad az  $\mathbf{E}_0$  vektor három komponensére. Egy homogén egyenlet nem triviális megoldásának az a feltétele, hogy az egyenletrendszer együtthatóiból képzett mátrix determinánsa zérus legyen. Ez a feltétel adja az  $\omega(\mathbf{k})$  disperziós relációt. Végül a közeg

$$n = \frac{c_0}{c}$$

törésmutatóját az

$$\omega = c |\mathbf{k}| = \frac{c_0}{n} |\mathbf{k}|$$

összefüggésből kapjuk, ahol  $c$  a fény terjedési sebessége a közegben. Felhasználva a (10a) és (11) egyenleteket, a (13) sajátérték-egyenlet így írható:

$$(\hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}} - \mathbf{I} \hat{\mathbf{k}}^2) \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{n^2} (\boldsymbol{\epsilon}_r^{(0)} \mathbf{E}_0 + i \gamma \mathbf{H} \times \mathbf{E}_0), \quad (14)$$

ahol  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} / |\mathbf{k}|$  a  $\mathbf{k}$  irányú egységvektor. A Faraday-effektus fellépése esetén (amikor a fentiek szerint a magnetooptikai jelenség számottevő) a  $\mathbf{k}$  vektor iránya megegyezik a  $\mathbf{H}$  külső mágneses térrel ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ ), azaz a  $\mathbf{g}$  girációs vektor irányával ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{g}$ ). Válasszuk a koordináta-rendszer  $z$  tengelyét a  $\mathbf{k}$  vektor irányába! Ebben az esetben használhatjuk az  $\boldsymbol{\epsilon}_r^{(0)}$  dielektromosfüggvény-tenzor (12) alakját. Írjuk fel a (13) sajátérték-egyenletet komponensenként:

$$\begin{pmatrix} n_o^2 & -i \gamma H \\ i \gamma H & n_o^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = n^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (15)$$

ahol  $(E_x, E_y)$  az  $\mathbf{E}_0$  vektor  $\mathbf{k}$ -ra merőleges,  $x$  és  $y$  irányú komponensei. Könnyen belátható, hogy ezen egyenlet sajátértékei (itt  $n^2$ ) és a megfelelő sajátvektorok:

$$n_{\pm} = \sqrt{n_o^2 \pm \gamma H} \quad \text{és} \quad \mathbf{E}_0 \sim (1, \pm i, 0)^T, \quad (16)$$

ahol  $T$  a transzponálást jelenti. A (15) sajátérték-egyenletnek ez a két megoldása a cirkulárisan jobbra, illetve balra polarizált hullámnak felel meg. A leveztésből világos, hogy a törésmutató mágneses tértől való függésében a  $\mathbf{H}$  térnek csak a  $\mathbf{k}$  irányú vetülete számít, ezért a fény terjedésének irányára merőleges mágneses térben nem lép fel Faraday-effektus.

Fontos megjegyezni, hogy a kapott polarizáció anyagtól függetlenül mindig cirkulárisan polarizált, nem elliptikusan polarizált. Látszik, hogy a jobbra és balra cirkulárisan polarizált hullámra a törésmutató különböző, és így más a két hullám terjedési sebessége is. Ennek az a következménye, hogy egy lineárisan polarizált fénysugár polarizációs síkja a terjedés során elfordul. Ahhoz, hogy ezt belássuk, tekintsünk egy lineárisan polarizált hullámot, amit mindig fel-

bonthatunk egy jobbra és balra cirkulárisan polarizált hullám szuperpozíciójára:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right]. \quad (17)$$

A kétféle polarizációjú síkhullám hullámszáma különböző lesz:  $k_+ = n_+ k_0$  és  $k_- = n_- k_0$ , ahol  $k_0 = \omega / c_0 \equiv 2\pi / \lambda_0$ , a vákuumban terjedő  $\omega$  frekvenciájú és  $\lambda_0$  hullámhosszú elektromágneses hullám hullámszáma,  $c_0$  pedig a fény terjedési sebessége vákuumban. Ha a hullám egy  $d$  vastagságú rétegen halad át, akkor a kétféle polarizációjú hullám fázisa a  $d$  távolság megtétele után különböző lesz:  $\varphi_+ = k_+ d = n_+ k_0 d$  és  $\varphi_- = k_- d = n_- k_0 d$ , és a lineárisan polarizált hullám így módosul:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\varphi_-} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\varphi_+} \right] = e^{i\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (18a)$$

ahol

$$\vartheta = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} = \frac{n_+ - n_-}{2} k_0 d = (n_+ - n_-) \frac{\pi d}{\lambda_0}. \quad (18b)$$

Egy lényegtelen közös fázistól eltekintve a kezdetben lineárisan polarizált hullám ismét lineárisan polarizált lesz, csak a polarizáció iránya  $\vartheta$  szöggel elfordul. Ezt nevezik Faraday-effektusnak. A (16) egyenletben kapott két polarizációnak megfelelő törésmutatókat felhasználva a polarizáció irányának elfordulása:

$$\vartheta = \left( \sqrt{n_o^2 + \gamma H} - \sqrt{n_o^2 - \gamma H} \right) \frac{\pi d}{\lambda_0} \approx \frac{\gamma H \pi d}{n_o \lambda_0}, \quad (19)$$

ahol közelítésnél kihasználtuk, hogy a tipikus anyagokban  $\gamma H \ll n_o^2$ . Innen leolvashatjuk az (1) egyenlet alapján definiált  $V$  Verdet-állandót:

$$V = \frac{\pi \gamma}{\mu_0 \lambda_0 n_o}. \quad (20)$$

A fenomenologikus elmélet alapján sikerült értelmezni a Faraday-effektust. Azonban a Verdet-állandóban szereplő, anyagtól függő  $\gamma$  mennyiséget csak a jelenség fizikai magyarázatát is adó mikroszkopikus modellel tudjuk meghatározni, amit a következő fejezetben fogunk ismertetni.

Néhány anyagra a Verdet-állandó (sárga fényre, azaz 589 nm hullámhosszra): víz: 3,8 rad/(Tm), kora-naüveg: 4,7 rad/(Tm), NaCl: 10,4 rad/(Tm), kvarc: 4,8 rad/(Tm). Hogy képet kapjunk arról, tipikusan mekkora szöggel fordulhat el a polarizációs sík, becsüljük meg e szöget például vízre! Ha az anyagban megtett távolság  $d = 1$  cm és a mágneses indukció  $B = 1$  T =  $10^4$  gauss (megjegyezzük, hogy a Föld mágneses indukciója nagyságrendileg 0,5 Gauss), akkor a szögelfordulásra  $\vartheta = 2,18^\circ$ -ot kapunk.

A leveztésből világos, hogy a  $\vartheta$  polarizációs szög, és így  $V$  előjele is függ a  $\mathbf{H}$  mágneses tér irányától. A tér irá-

nyát ellenkezőre változtatva a két helicitásállapot szerepe felcserélődik. Itt jegyezzük meg, hogy külső (nem a fény terjedéséhez rögzített) koordináta-rendszerből nézve, a jobbra (vagy balra) forgó terekhez, Faraday-effektus esetén – a terjedési iránytól függetlenül – azonos törésmutató tartozik. Ezzel szemben a helicitás (jobb és balkezes polarizáció) megfordul a  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$  cseréjére. Itt most nem térünk ki arra kérdésre, de érdekes lehet megnézni, hogy miként transzformálódnak az adott irányba terjedő, adott cirkuláris polarizációval rendelkező sugárzás terei időtükrözés és inverzió hatására. Erről *Bordács Sándor* doktori dolgozatában olvashat bővebben az olvasó [14].

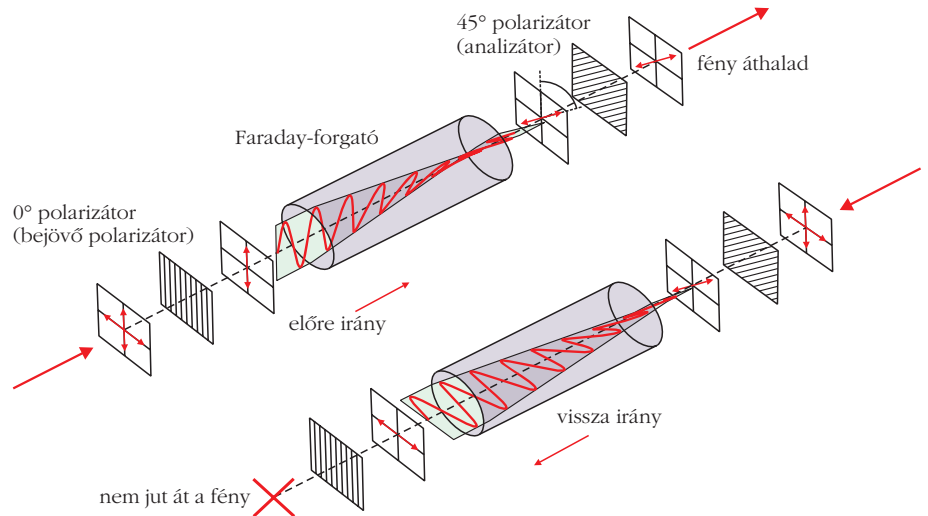
A tér irányát ellenkezőjére változtatva a jobbra cirkuláris fény balra cirkuláris lesz. Ezért, ha egy anyagban áthaladó fénysugár polarizációs síkja  $\vartheta$  szöggel elfordul, és ezután egy tükörrel visszafordítjuk a fénysugarat, akkor visszafelé ugyanazt az utat megtéve a fény polarizációs síkja  $2\vartheta$  szöggel fordul el. Itt jegyezzük meg, hogy a természetes optikai aktivitásnál a forgás iránya ellentétes lesz, ha a fény terjedésének iránya megfordul, a polarizáció síkja a tükrözés után visszatér az eredeti helyzetbe [3–8, 13].

A Faraday-effektus legfontosabb alkalmazása a *Faraday-izolátor*, ami a fenti polarizációforgató tulajdonságon alapul és célja, hogy a fényútból ne verődjön vissza fény a forrásba, amely annak instabilitásához vezethetne. A lézernyaláb egy polarizátoron áthaladva belép a Faraday-izolátorba, amelyben a mágneses tér úgy van beállítva, hogy a fény polarizációs síkja  $45^\circ$ -kal elfordul (2. ábra, felső rész). Ezután a lézerezonátor végén lévő tükörről visszaverődik a nyaláb, és visszafelé ismét áthaladva a Faraday-izolátoron, a polarizáció síkja újabb  $45^\circ$ -kal fordul el és ekkor már a polarizátor nem engedi át a nyalábot (2. ábra, alsó rész).

A továbbiakban bemutatjuk a Faraday-effektus mikroszkopikus értelmezését. Természetesen ebben a munkában nem tudjuk áttekinteni az összes kísérleti és elméleti eredményt. Itt csak az a célunk, hogy képet adjunk a jelenségről mikroszkopikus szinten is, ami egyben kiindulásként is szolgálhat az olvasó számára egy elmélyültebb vizsgálathoz.

## A Faraday-effektus mikroszkopikus leírása

A Faraday-effektust mikroszkopikus szinten az anyagban lévő elektron dinamikája alapján lehet megérteni. Az anyagban terjedő fény leírásához a maghoz kötött elektronok elektromágneses térben való mozgását kell vizsgálni. Ezt lehet klasszikusan és kvantummechanika keretében is tanulmányozni.



2. ábra. A Faraday-izolátor.

A legegyszerűbb klasszikus leírás kiinduló pontja az úgynevezett *Lorentz-modell*. E modelltől és a jelenség kvantumos tárgyalásáról az érdeklődő olvasó például *Sólyom Jenő* könyve [15] 25. fejezetében olvashat. Azonban e könyvben már nem szerepel a Faraday-effektus, ezért az alábbiakban vázoljuk a Lorentz-modell kiterjesztését erre az esetre. Ezt követően egy egyszerű kvantummechanikai modellt mutatunk be. A *Zeeman-effektus* miatt az atomok elfajult energiaszintjei mágneses térben felhasadnak, és az elektromágneses tér hatására az atomok különböző frekvenciával gerjesztődnek. Ennek következtében az anyag törésmutatója is más lesz az egyes gerjesztésekre, ami végső soron a Faraday-effektushoz vezet, ahogyan ezt korábban láttuk.

## Klasszikus elmélet

Ha az anyagot külső sztatikus mágneses térbe helyezzük, akkor az elektronra a Lorentz-erő is hat. A továbbiakban ezt az erőt figyelembe véve kiterjesztjük a Lorentz-modellt, és így a Faraday-effektust klasszikusan egy mikroszkopikus modell keretében értelmezzük.

A Lorentz-modellben feltételezzük, hogy a kötött elektron a mag körül  $D$  rugóállandóval jellemzett harmonikus rezgést végez. A  $\mathbf{B}$  sztatikus külső mágneses térben az elektronra ható Lorentz-erőt is számításba véve az elektron  $\mathbf{r}$  elmozdulását leíró mozgásegyenlet:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -D\mathbf{r} - e\mathbf{E} - e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}, \quad (21)$$

ahol  $\mathbf{E}$  az anyagban terjedő fény elektromos tere,  $m$  az elektron tömege és  $e$  a töltésének abszolút értéke ( $e > 0$ ). Megjegyezzük, hogy az anyagban terjedő fényhullám mágneses terét elhanyagoljuk a nála sokkal erősebb külső  $\mathbf{B}$  mágneses tér mellett, ezért a következőkben  $\mathbf{B}$  mindig a konstans külső mágneses teret jelenti. Az egyszerűség kedvéért elhanyagoljuk az elektronok szóródási folyamatait is (ezeket a

*Drude-modellben* a relaxációs idővel szokás figyelembe venni [15]). Az anyag törésmutatóját az elektronok elmozdulása miatt kialakuló dipólmomentumok átlagából a  $\mathbf{P} = -\rho_e e \mathbf{r}$  polarizációs vektor ismeretében számíthatjuk ki, ahol  $\rho_e$  a kötött elektronok sűrűsége az anyagban. A polarizációs vektort a  $\chi$  elektromos szuszceptibilitástenzorral kifejezve  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ , az eltolásvektor  $\mathbf{D} = \mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ , és így a dielektromos függvény tenzora  $\varepsilon_r = I + \chi$ . Végül a törésmutatókat a (13) egyenlet sajátértékeiből kaphatjuk meg.

Az  $\omega$  körfrekvenciájú elektromágneses tér időfüggése  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t}$ , ezért a fenti egyenletben az elektron  $\mathbf{r}$  elmozdulását az  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega) e^{-i\omega t}$  alakban kereshetjük. Innen következik, hogy a  $\mathbf{P} = -\rho_e e \mathbf{r}$  polarizációs vektor időfüggése:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\omega) e^{-i\omega t}$ , és  $\mathbf{P}(\omega) = -\rho_e e \mathbf{r}(\omega)$ . Ennek megfelelően a (21) egyenletben az  $\mathbf{r}(\omega)$  vektort kifejezhetjük a  $\mathbf{P}(\omega)$  vektorral:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) \mathbf{P}(\omega) - i \omega \omega_c \hat{\mathbf{B}} \times \mathbf{P}(\omega) &= \\ &= \omega_p^2 \varepsilon_0 \mathbf{E}(\omega), \end{aligned} \quad (22)$$

ahol

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

az elektron harmonikus rezgésének körfrekvenciája,

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

a ciklotronfrekvencia,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\rho_e e^2}{\varepsilon_0 m}}$$

a plazmafrekvencia [15] és

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{B}$$

a mágneses tér irányában mutató egységvektor.

A fenti egyenlet bal oldala ismét kifejezhető egy diagonális mátrix és egy antiszimmetrikus mátrix összegével, és mátrix inverzéből adott  $\mathbf{E}$  elektromos tér mellett kiszámíthatjuk a  $\mathbf{P}$  polarizációs vektort. Ugyan a számolás viszonylag egyszerűen elvégezhető, most mégis egy másik módszert alkalmazunk. Válasszuk a  $z$  tengelyt a mágneses tér irányában, ami egyben a fény terjedési iránya is az anyagban! Ekkor az elektromos térnek csak  $x$  és  $y$  komponense lesz. Írjuk fel a (22) egyenletet komponensenként:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) P_x + i \omega \omega_c P_y = \omega_p^2 \varepsilon_0 E_x, \quad (23a)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) P_y - i \omega \omega_c P_x = \omega_p^2 \varepsilon_0 E_y. \quad (23b)$$

Mivel minden lineárisan polarizált hullám felbontható egy jobbra és egy balra polarizált hullám összegére, tekintünk egy jobbra, illetve balra polarizált

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)^T = E_0 (1, \pm i, 0)^T$$

elektromos teret! Ennek megfelelően keressük a polarizációs vektort is hasonlóan

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, 0)^T = P_0 (1, \pm i, 0)^T$$

alakban! Könnyen beláthatjuk, hogy ebben az esetben a két egyenlet azonos lesz, és  $P_0$ -ra kapjuk:

$$P_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega \omega_c} \varepsilon_0 E_0 \equiv \chi_{\pm} \varepsilon_0 E_0, \quad (24)$$

ahol bevezettük a  $\chi_{\pm}$  szuszceptibilitást. Láthatjuk, hogy a kétféle cirkuláris polarizációra, mint bázisállapotokra áttérve az elektromos szuszceptibilitás-tenzor diagonális mátrix lesz és a két diagonális komponense  $\chi_{\pm}$ . Innen következik, hogy a dielektromos függvény is diagonális mátrix lesz és a diagonális elemei:

$$(\varepsilon_r)_{\pm} = 1 + \chi_{\pm}.$$

Végül a (13) egyenlet sajátértékeiből a kétféle törésmutatóra kapjuk:

$$\begin{aligned} n_{\pm} &= \sqrt{(\varepsilon_r)_{\pm}} = \sqrt{1 + \chi_{\pm}} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega \omega_c}} \approx \\ &\approx \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \pm \frac{\omega \omega_c \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

ahol az utolsó lépésnél feltettük, hogy

$$\frac{\omega \omega_c}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \ll 1,$$

azaz elhanyagoltuk az  $\omega_0$  rezonanciafrekvenciától távoli  $\omega$ -ra a  $B^2$ -tel arányos tagokat. A fenti eredményt összevetve a (14) egyenlet jobb oldalával, ahol  $\varepsilon_r^{(0)}$  a (12) egyenletben adott, leolvashatjuk a mágneses tér nélküli törésmutatót és  $\gamma$  értékét:

$$\begin{aligned} n_o(\omega) &= \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}, \\ \gamma H &= \pm \frac{\omega \omega_c \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \pm \omega_c n_o \frac{dn_o}{d\omega}. \end{aligned} \quad (26)$$

Az utolsó átalakításnál kihasználtuk, hogy a fenti egyenletben a  $\gamma H$ -ra kapott képlet épp a mágneses tér nélküli törésmutató négyzetének deriváltjaként írható fel. Végül a (20) egyenletbe beírva  $\gamma$  fenti érté-

ket, behelyettesítve a plazmafrekvencia és a ciklotronfrekvencia korábban megadott képletét és a

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c_0}{\omega}$$

hullámhosszt a Verdet-állandóra a következő egyszerű összefüggést kapjuk

$$\begin{aligned} V &= \pm \frac{e}{2m c_0} \omega \frac{dn_o}{d\omega} = \\ &= \pm 293,34 \frac{\text{rad}}{\text{T m}} \omega \frac{dn_o}{d\omega}, \end{aligned} \quad (27)$$

ahol a  $\pm$  előjelek a jobbra és balra cirkulárisan polarizált fényre vonatkoznak.

Ezzel megkaptuk a Verdet-állandó alakját a klasszikus mikroszkopikus modell alapján. Ezt az összefüggést először Becquerel vezette le, és az irodalomban *Becquerel-egyenletnek* nevezik [2]. Becquerel a képletet az éppen akkor felfedezett elektron klasszikus mozgásegyenlete alapján vezette le. Egy ilyen egyszerű modell ellenére a számított értékek legtöbb anyagra meglepő módon jól egyeznek a mérési eredményekkel. Látható, hogy  $V$  az *univerzális* fizikai állandóktól eltekintve a fény frekvenciájával és az anyag törésmutatójának diszperziójával, azaz a  $dn_o/d\omega$  mennyiséggel arányos. Világos, hogy  $V$  függ a fény hullámhosszától. Annak ellenére, hogy az  $n_o(\omega)$  törésmutató frekvenciafüggése egyes anyagokra jelentősen eltérhet a (26) képletben felírt alaktól, a Verdet-állandó (27) képlete jól használható a mérésekben. Ennek okára még visszatérünk a jelenség kvantummechanikai leírása során a következő alfejezetben.

A kísérletekben a mágneses tér nem mindig homogén a mintában. Szerencsére a fenti számolás könnyen kiterjeszhető inhomogén mágneses térre is. Ebben az esetben a polarizációs sík elfordulásának szöge:

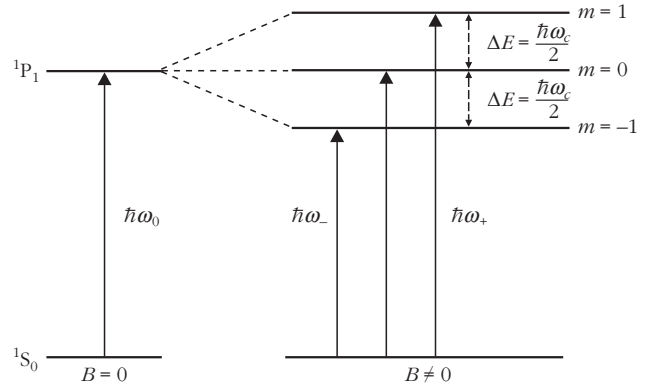
$$\vartheta = \int \mathbf{B} \, ds, \quad (28)$$

ahol a vonalintegrált a fény terjedése mentén kell számolni.

Az itt tárgyalt modell fő előnye, hogy egy egyszerű képpel meg lehet érteni a jelenség mechanizmusát. Ugyanakkor nagy hiányossága, hogy az elmélet klasszikus. Ezért mindenképpen szükség van egy mélyebb, kvantumos leírásra. A következő alfejezetben egy egyszerű modellel szeretnénk bemutatni a Faraday-effektus kvantummechanikai hátterét.

### Kvantummechanikai tárgyalás

A jelenség kvantummechanika leírása meglehetősen összetett kérdés. Az elektromágneses tér és az atomok elektronjai közti kölcsönhatást, az elektronok atomok energiaszintjei közti átmeneteit kell vizsgálni. Az alapvető mikroszkopikus folyamat megértéséhez tekintünk a legegyszerűbb átmenetet, amelyben az



3. ábra. A Zeeman-effektus: az energiaszintek felhasadása mágneses tér hatására.

atom az  $^1S_0$  alapállapotból az  $^1P_1$  gerjesztett állapotba kerül! Elhanyagoljuk a spin és az atommag hatását. Az alapállapotban egy energiaszint van, míg a gerjesztett állapotban az  $L = 1$  mellékvantumszám miatt három energiaszint elfajult, melyeket az  $m = -1, 0, 1$  mágneses kvantumszámok jellemeznek. Mágneses térben ezek az energiaszintek a mágneses kvantumszámoknak megfelelően felhasadnak (lásd a 3. ábrát). Ezt a jelenséget, ahogy korábban említettük, Zeeman-effektusnak nevezik, amelyről bővebben például a [16, 17] könyvekben lehet olvasni. A három azonos energiájú szint eltolódása a Zeeman-effektus miatt:

$$\Delta E = m \mu_B B = 0, \pm \mu_B B,$$

ahol  $B$  a mágneses tér nagysága és

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m}$$

a Bohr-magneton. Mivel a jobbra, illetve balra cirkulárisan polarizált foton impulzuszórája  $\pm \hbar$ , a kiválasztási szabály [16, 17] miatt az elektromágneses tér által történő gerjesztéseknél csak két lehetséges átmenet léphet fel, az  $m = \pm 1$  állapotoknak megfelelő átmenetek. Ezért a kétféle polarizációnak megfelelően a fény két különböző frekvencián gerjeszti az atomot:

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \omega_0 + \frac{\Delta E}{\hbar} = \omega_0 \pm \frac{\mu_B B}{\hbar} = \\ &= \omega_0 \pm \frac{e}{2m} B = \omega_0 \pm \frac{\omega_c}{2}, \end{aligned} \quad (29)$$

ahol  $\hbar\omega_0$  az  $^1S_0$  és az  $^1P_1$  állapotok közti energiakülönbség mágneses tér nélkül,  $\omega_c$  pedig a korábban bevezetett ciklotronfrekvencia. Így a kétféle polarizációra az anyag törésmutatója is más lesz:  $n_{\pm} = n_o(\omega_{\pm})$ . A (18b) egyenlet szerint a polarizációs sík elfordulásának szöge:

$$\begin{aligned} \vartheta &= (n_+ - n_-) \frac{\pi d}{\lambda_0} = \pm \frac{dn_o}{d\omega} \omega_c \frac{\pi d}{\lambda_0} = \\ &= \pm \frac{e}{2m c_0} \omega \frac{dn_o}{d\omega} B d, \end{aligned} \quad (30)$$

ahol az  $n_+ - n_-$  különbséget elsőrendű sorfejtéssel közelítettük, feltételezve, hogy gyenge mágneses tér esetén  $\omega_c \ll \omega_0$ . Innen az (1) egyenlet alapján ebből az egyszerű kvantummechanikai megfontolásból a Verdet-állandóra ugyanazt az eredményt kapjuk, mint amit a (27) egyenletben a klasszikus számolásból vettünk le. Vegyük észre, hogy a levezetésben nem használtuk ki az  $n_o(\omega)$  törésmutató frekvenciafüggésének pontos alakját, ellentétben az előző fejezetben bemutatott klasszikus tárgyalással. Ezzel az egyszerű képpel csak azt szerettük volna megmutatni, hogy a Faraday-effektus mikroszkopikus eredete mögött a Zeeman-effektus áll. Ugyanakkor, igazán meglepő, hogy ez a rendkívül egyszerű modell is visszaadja a klasszikusan számolt eredményt.

Konkrét anyagokra gyakran tapasztalható eltérés a fenti elméleti jóslattól, amelynek számos oka lehet. Itt csak röviden utalnánk arra, hogy egy pontosabb elmélet kidolgozásánál milyen effektusokkal kell számolni. Legtöbb anyagban nem egy energiaszint hasad fel, és így több átmenet is lehetséges. Gyakran figyelembe kell venni a spin-pálya kölcsönhatást, a kristályos anyagokban a szomszédos atomok kristályterét is.

A pontos kvantummechanikai tárgyalásban az úgynevezett *lineárisválasz-elméletből* [16] szokás kiindulni. Az állandó mágneses térbe helyezett anyagban az elektromágneses teret perturbációnak tekintve az általános elmélet alapján ki lehet számolni az anyag optikai vezetőképességét, ami azután kapcsolatba hozható a közeg törésmutatójával. Ilyenkor az állandó mágneses térben kialakuló Landau-szinteket is figyelembe kell venni. Ez a módszer jól használható fémekre és félvezető anyagokra. Napjaink kutatásában ezt az eljárást alkalmazzák többféle, egy vagy néhány atomi réteget tartalmazó kétdimenziós anyagra, mint például a grafénre, vagy az élénken kutatott topologikus szigetelőkre (lásd például [18]). A Faraday-effektus mérési eredményeit összehasonlítva az elméleti számolásokkal az anyag sávszerkezetét lehet tanulmányozni.

## Összegzés

A cikk végén talán érdemes néhány szóban, képletek nélkül összefoglalni a vizsgált jelenség fizikáját. A Faraday-effektust, azaz a fény polarizációs síkjának mágneses térbe helyezett közegen való áthaladásakor fellépő elfordulását az okozza, hogy aszimmetria lép fel a jobbra és balra cirkulárisan polarizált síkhullámok között: a két cirkulárisan polarizált hullám különböző sebességgel terjed az anyagban. Ezt az aszimmetriát nem a közeg belső szerkezete okozza (mint például a kettőtörés jelenségét), hanem alkalmazott külső mágneses tér. Ezért a Faraday-effektus bármilyen átlátszó közegben – gázban, folyadékban, és szilárd, kristálytanilag izotrop vagy anizotrop anyagban is – felléphet. A Becquerel-törvény (30) képlete szerint az effektus felléptének feltétele az, hogy az anyagban kellően erős legyen az optikai disz-

perzió, azaz mágneses tér nélkül az anyag törésmutatójának frekvencia szerinti deriváltja kellően nagy, véges érték legyen. Az anyag girotrop volta csak ennek, a mágneses tér okozta aszimmetriának fenomenológiai megfogalmazását jelenti. Formálisan úgy jelenik meg, hogy a (10a) dielektromos tenzor mágneses tér jelenlétében a külső térrel arányos nemdiagonális elemeket is tartalmaz. Ebből a szempontból a Faraday-effektus rokon a Hall-jelenséggel: külső mágneses tér jelenlétében mindkét esetben megjelenik a válaszjelenségeket leíró tenzorban (a Hall-effektus esetén az elektromos vezetőképesség tenzorában) egy aszimmetrikus nemdiagonális tag, amely arányos az alkalmazott mágneses térrel (a Hall-effektusról lásd a Landau VIII. kötet [3] 21–22. fejezeteit). A Faraday-effektus élesen megkülönböztetendő az anyag molekuláinak, illetve kristályrácsának nem tükörszimmetrikus felépítéséből következő természetes optikai aktivitástól. A két jelenség a tükörrel visszafordított és a közegen ismételtlen áthaladó fény polarizációjának eltérő viselkedése alapján különíthető el (lásd a részletes leírást *A Faraday-effektus fenomenológikus leírása* fejezet végén).

A Faraday-effektus végső oka az atomok és molekulák elektromosan töltött összetevőinek (lényegében az elektronok) kölcsönhatása az elektromágneses hullámok elektromos terével, amely kölcsönhatást a külső mágneses tér befolyásolni tudja. E befolyásolás klasszikus, illetve kvantumos modelljét vizsgáltuk meg a *Klasszikus elmélet*, illetve a *Kvantummechanikai tárgyalás* alfejezetekben.

E munkában csak a Faraday-effektust tárgyaltuk részletesebben. Ez az effektus ma már a szilárdtestfizika alapvető eszközévé vált. A szerző eredeti elképzelése szerint a természetes optikai aktivitás is részletesen ismertetésre került volna, de időközben már a Faraday-effektus tárgyalása is kissé hosszúra nyúlt. Remélhetőleg egy másik cikkben sor kerül rá. Addig is az érdeklődő olvasónak ajánljuk a Landau VIII. kötet 12. fejezetét [3].

Ahogy korábban említettük, a polarizációs vektor (3) alakja számtalan izgalmas, a mai kutatás élvonalába tartozó optikai jelenség értelmezésének a kiindulópontja.

Végül hadd tegyek egy személyes megjegyzést. Nagyon sajnálom, hogy Tichy Géza már nem olvashatja ezt a tanulmányt, hiányozni fog nekem építő kritikája. Biztos vagyok abban, hogy sok hasznos megjegyzést tett volna e munkámhoz.

## Függelék

### A dielektromos függvény hermitikus mátrix

E részben megmutatjuk, hogy a dielektromos függvény általános esetben egy hermitikus mátrixszal adható meg. A bizonyítás izotrop közegre a [3] könyv 80. §-ában, míg anizotrop anyagra ugyanebben a könyvben, a 96. §-ban található. Itt röviden vázoljuk a bizonyítást anizotrop esetre.



A test egységnyi térfogatra eső energia megváltozása időegység alatt:  $\text{div} \mathbf{S}$ , ahol  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  a Poynting-vektor [9]. Forrásmentes térben ( $\mathbf{q} = 0$  és  $\mathbf{j} = 0$ ) esetén a Maxwell-egyenletek segítségével írhatjuk:

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{S} &= \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} = \\ &= -\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \\ &= -E_j \varepsilon_{jk} \frac{\partial E_k}{\partial t} - \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (31)$$

Komplex mennyiségek (amelyek arányosak  $e^{-i\omega t}$ -vel) szorzatának időbeli átlaga:

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{4} (AB^* + A^*B) = \frac{1}{2} \text{Re}\{AB^*\}, \quad (32)$$

ahol  $\langle \dots \rangle$  az időbeli átlagot jelöli<sup>2</sup> (lásd még például [3] könyvben a 6. lábjegyzetet a 308. oldalon). Ezt felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned} \langle \text{div} \mathbf{S} \rangle &= -\frac{1}{4} \left( E_j \varepsilon_{jk}^* \frac{\partial E_k}{\partial t} + E_j^* \varepsilon_{jk} \frac{\partial E_k}{\partial t} \right) - \\ &= -\frac{\mu}{4} \left( H_k \frac{\partial H_k^*}{\partial t} + H_k^* \frac{\partial H_k}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Itt kihasználtuk, hogy dielektrikumra a  $\mu$  mágneses permeabilitás valós és skalár mennyiség (a levezetés könnyen kiterjeszhető anizotrop mágneses permeabilitás esetére). Felhasználva, hogy monokromatikus terekre az időfüggés:  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \sim e^{-i\omega t}$ , illetve a második tagban felcserélve a  $j$  és  $k$  összegzőindexeket, a következőt kapjuk:

$$\langle \text{div} \mathbf{S} \rangle = -\frac{i\omega}{4} E_j E_k^* (\varepsilon_{jk}^* - \varepsilon_{kj}). \quad (34)$$

A  $\mathbf{H}$  mágneses teret tartalmazó tagok kiesnek a (33) egyenletben. Így, ha testben nincs hőfejlődés, más szóval disszipáció, akkor a Poynting-vektor divergenciája zérus, és a dielektromos függvényre az alábbi megszorítás érvényes:

<sup>2</sup>Valóban, a komplex  $A$  és  $B$  mennyiségek szorzatának időbeli átlagát azok valós mennyiségeivel kell számolni, ugyanis az  $e^{2i\omega t}$  tényezőt tartalmazó tagok időbeli átlaga zérus. Így adódik, hogy  $\langle AB \rangle = (1/4)\langle (A+A^*)(B+B^*) \rangle = (1/4)\langle AB^* + A^*B \rangle$ .

$$\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{jk}^* \quad (35)$$

azaz a dielektromos függvény *hermitikus mátrix*. Hasonló összefüggés érvényes az anizotrop  $\mu$  mágneses permeabilitás tenzorára is.

#### Irodalom

1. Michael Faraday: I. Experimental Researches in Electricity: On the magnetization of light and the illumination of magnetic lines of force. II. On new magnetic actions, and on the magnetic condition of all matter. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 136 (1846) 1–20. és 21–40; online <https://doi.org/10.1098/rstl.1846.0001> és <https://doi.org/10.1098/rstl.1846.0003> (Published: 01 January 1846).
2. Henri Becquerel: Sur une interprétation applicable au phénomène de Faraday et au phénomène de Zeeman (Faraday és Zeeman jelenségeire alkalmazható magyarázatról). *Compt. Rend. Acad. Sci.* 125 (1897) 679; letölthető <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00240138/document>
3. L. D. Landau és E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika VIII. (Folytonos közegek elektrodinamikája)*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
4. A. Nussbaum, R. A. Phillips: *Modern optika mérnököknek és kutatóknak*. Műszaki Könyvkiadó, 1982.
5. E. Hecht: *Optics*. 4th ed., Addison-Wesley, Reading, 2002. (Az ELTE fizikus könyvtárában a nem kölcsönözhető könyvek közt található.)
6. Amnon Yariv, Pochi Yeh: *Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation*. John Wiley & Sons, Inc., 1984, Chapter 4.
7. Grant R. Fowles: *Introduction to modern optics*. 2nd ed., Dover Publications, Inc., 1975, Section 6.7.
8. Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich: *Fundamentals of photonics*. John Wiley & Sons, Inc., 1991, Chapter 6.
9. J. D. Jackson: *Klasszikus elektrodinamika*. TypoTeX, Budapest, 2004.
10. Horváth Zalán, Tél Tamás: *Elméleti fizikai példatár 2*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
11. L. Onsager: Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. *Physical Review*, 37 (1931) 405–426.
12. L. D. Landau, E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika V. (Statistikus Fizika I. rész)*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
13. Hartmann Römer: *Theoretical Optics, an Introduction*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005, Chapter 5.
14. Sándor Bordács: *Exotic magneto-optical effects in solids*. PhD dolgozat, 2. fejezet; letölthető <https://repozitorium.omikk.bme.hu/handle/10890/10668>
15. Sólyom Jenő: *A modern szilárdtestfizika alapjai II., Elektronok a szilárd testekben*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.
16. L. D. Landau, E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika III. (Kvantummechanika, Nemrelativisztikus elmélet)*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
17. Sólyom Jenő: *A modern szilárdtestfizika alapjai I., A szilárd testek szerkezete és dinamikája*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.
18. Gábor Széchenyi, Máté Vigh, Andor Kormányos, József Cserti: Transfer matrix approach for the Kerr and Faraday rotation in layered nanostructures. *Journal of Physics: Condensed Matter*, Volume 28 (2016) 375802; letölthető <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-8984/28/37/375802>

## Az Eötvös Társulat fönt van a **facebook**-on!



<https://www.facebook.com/pages/Eötvös-Loránd-Fizikai-Társulat/434140519998696?fref=ts>