

A munkára fogott véletlen (Monte-Carlo-módszer)

Cserti József
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék,
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A.
(2003. szeptember 7.)

A pécsi Zipernowsky Károly szakközépiskolai tanárom, Balog József tiszteletére.

I. BEVEZETÉS

Mindennapi életünket gyakran befolyásolják a véletlen események. Jól tudjuk, hogy a játékkaszinókban a véletlen alapvető szerepet játszik. Számos véletlen jelenséget figyelhetünk meg a környezetünkben is (például a hegyére állított ceruza dőlési iránya). A természetben is számtalan véletlen jelenséget ismerünk. Egy tartályban lévő gázatomok véletlenszerűen mozognak. Az atommagok bomlása is véletlen folyamat.

A véletlen segítségével közelítőleg meghatározhatjuk a π értékét. Dobjunk rizsszemeket (véletlenszerűen) egy a oldalú négyzetre, amelybe egy a átmérőjű kört is berajzoltunk! Végezzünk N számú kísérletet (csak azokat a dobásokat tekintjük, melyeknél a rizsszemek nem esnek ki a négyzetből), és számoljuk meg hány esik a körbe! Jelöljük ezek számát N_k -val! Ekkor az N_k/N arány nagy számú kísérlet ($N \gg 1$) esetén jó közelítéssel megegyezik a kör és a négyzet területének arányával, azaz $N_k/N = (a/2)^2 \pi/a^2 = \pi/4$. Így a π értéket $\pi \approx 4N_k/N$ alapján számíthatjuk ki. Természetesen ez a módszer nem adja meg teljesen pontosan a π -t. Minél több kísérletet végzünk, annál pontosabb eredményt kaphatunk, feltéve, hogy a rizsszemek valóban véletlenül esnek a négyzetre.

A fenti kísérletet nem szükséges a valóságban elvégezni. A számítógéppel egyszerű programot írhatunk. Szükségünk van egy jó véletlenszám generátorra. Ma már számos program létezik, mely a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásban generál egy véletlen számot. Generáljunk egymás után kettőt, és jelöljük ezeket x -szel ill. y -nal! E két számpárhoz egy pontot rendelhetünk a koordináta-rendszer első negyedében (rizsszem helye a dobás után). Ha a pont távolságára igaz, hogy $x^2 + y^2 < 1$, akkor a pont az egységsugarú körön belül van. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmust N -szer elvégezve N_k számú esetben esik a pont a körön belül. Hasonlóan a rizsszemek esetében most is a $4N_k/N$ arány közelíti π értékét.

Az alábbi táblázatban egyre növekvő számú kísérlet során kapott π értéket és a hibát tüntettük fel (a pontos érték 9 tizedesjegyre $\pi = 3.141592654$).

N	π	relatív hiba %-ban
10	3.6	14.6
10^2	3.16	0.6
10^3	3.108	1.1
10^4	3.127	0.5
10^5	3.135	0.2
10^6	3.141	0.02
10^7	3.14155	0.001

Látható, hogy N növelésével egyre pontosabb értéket kapunk π -re. Már néhány százezer kísérlet is elég π -nek két tizedesjegy pontos kiszámítására. A mai számítógépekkel akár 10^7 számú kísérlet is egy percen belül elvégezhető. Érdemes kipróbálni!

Teljesen véletlen jelenséget felhasználva egy jól meghatározott mennyiség értékét sikerült közelíteni. A fenti módszert tovább lehet fejleszteni és így rendkívül bonyolult feladatok megoldására használhatjuk a véletlent. Az eljárást a Monte-Carloban található nevezetes kaszinókra utalva, Monte-Carlo-módszernek hívják, és kiterjedten alkalmazzák mind a matematikában, mind a fizikában. A Monte-Carlo elnevezést Metropolis és Ulam használták először egy 1949-es cikkükben arra utalva, hogy a módszerhez szükséges véletlen számokat akár egy játékkaszinó játékeredményeiből is vehetnénk. A gyakorlatban viszont a véletlen számokat a számítógépek maguk állítják elő. A módszert már a század elején is használta néhány statisztikus, de a Monte-Carlo-módszer csak akkor indult igazán fejlődésnek, amikor Neumann, Ulam és Fermi atommagreakciókra vonatkozó bonyolult matematikai problémák számítógéppel történő közelítő megoldására használták.

Sok esetben a feladatokat csak közelítések alkalmazásával lehet megoldani. Szerencsére legtöbbször nincs is szükségünk nagyon pontos értékekre. Ilyenkor gyakran igen hatékonynak bizonyul a Monte-Carlo-módszer. A továbbiakban néhány példát szeretnénk bemutatni a módszer alkalmazására a matematikában és a fizikában. Igyekeztünk olyan problémákat választani, melyeket a mai számítógépes lehetőségek mellett középiskolai szinten vizsgálhatunk.

II. MATEMATIKAI ALKALMAZÁS

Gyakori feladat egy görbe alatti terület meghatározása. Az 1. ábrán látható $f(x)$ függvénynek az $[a, b]$ intervallumon a görbe alatti A területét úgy határozhatjuk meg, hogy az $[a, b]$ szakaszt felosztjuk N egyenlő $\Delta x = (b - a)/N$ intervallumra és a területet az ún. téglányösszeggel közelítjük: $A \approx \sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x$, ahol x_i az i -edik intervallum közepe. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a függvény pozitív az $[a, b]$ szakaszon, és legyen a függvény legnagyobb értéke M ezen a szakaszon.

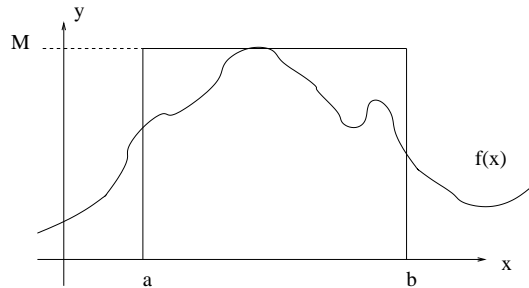


FIG. 1. Egy $f(x)$ függvénynek a görbe alatti területe az $[a, b]$ intervallumon.

A téglányösszeg annál pontosabb, minél nagyobb N . Ez az egyik legismertebb (és legyszerűbb) módszer egy függvény görbe alatti területének meghatározására. A 2. ábrán látható $f(x) = \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ függvény azonban nagyon gyorsan oszcillál az origó körül, és így a terület kielégítő pontosságú kiszámításához nagyon nagyra kellene választani N értékét.

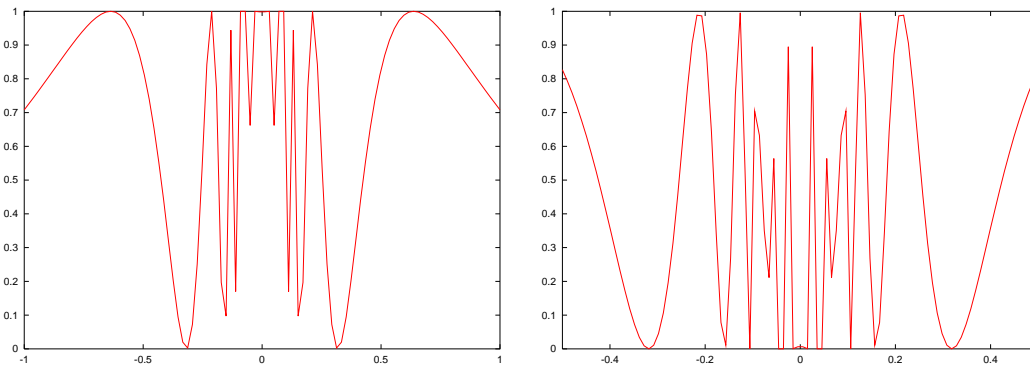


FIG. 2. Az $f(x) = \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ függvény a $[-1, 1]$ (bal oldali ábra) ill. a $[-0.5, 0.5]$ intervallumon (jobb oldali ábra).

A gyorsan változó függvények görbe alatti területét a Monte-Carlo-módszer segítségével hatékonyabban becsülhetjük meg. Ismét 'rizsszemek' dobálását alkalmazzuk. Generáljunk egy x véletlen számot (általában az egyes programnyelvekben található olyan véletlenszám generátor, mely a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásban ad egy véletlen számot)! Ekkor az $x \rightarrow a + x(b - a)$ transzformációval a kapott véletlen szám az $[a, b]$ intervallumba kerül. Generáljunk egy másik y véletlen számot! Az $y \rightarrow yM$ transzformáció után az y véletlen szám az $[0, M]$ intervallumba esik. Tekintsük a két számot egy pont (x, y) koordinátáinak! Ez a pont az 1. ábrán látható $(b - a)$ és M hosszúságú téglalapon belül található. Ha viszont a pont (x, y) koordinátáira teljesül az $y < f(x)$ egyenlőtlenség, akkor a pont (rizsszem) az $f(x)$ görbe alá esik.

Ismételjük meg a fenti algoritmust $N_{\text{össz}}$ alkalommal és számoljuk meg hányszor esik az adott pont a görbe alá. Jelöljük ezeket az eseményeknek a számát N_{be} -vel! Elegendően sok kísérlet után azt várjuk, hogy a függvénynek a görbe alatti A területének és az $M(b - a)$ területű téglalapnak az aránya jó közelítéssel megegyezik az $N_{\text{be}}/N_{\text{össz}}$ aránnyal és így

$$A \approx M(b-a) \frac{N_{\text{be}}}{N_{\text{össz}}}$$

Alkalmazzuk a fenti Monte-Carlo-módszert a 2. ábrán látható függvényre! Kiszámítottuk a görbe alatti területet az $[a, b] = [0, 1]$ intervallumon úgy, hogy b értékét 0 és 1 között változtatjuk. A különböző számú kísérlet során kapott eredmények a 3. ábrán láthatók. A görbék területét általában felsőbb matematikai módszerrel, az ún. integrálszámítással lehet kiszámítani. Ezt a módszert tekinthetjük az egzakt, azaz pontos számításnak. Az ábrákon berajzoltuk az így kapott eredményeket is a Monte-Carlo-módszer hatékonyságának illusztrálása érdekében.

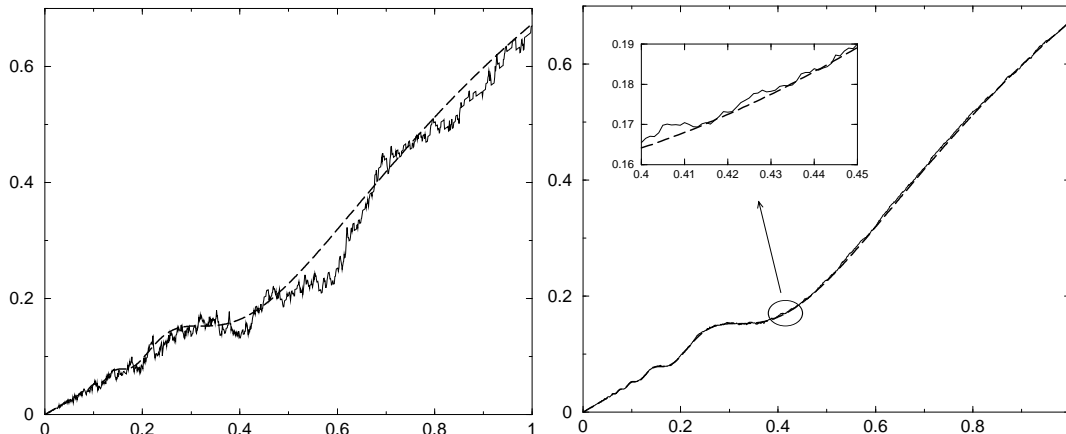


FIG. 3. Az $f(x) = \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ függvénynek a görbe alatti területe $N_{\text{össz}} = 100$ (bal oldali ábra) és $N_{\text{össz}} = 10000$ (jobb oldali ábra) kísérlet során. Az egzakt eredményt a szaggatott görbe mutatja.

Látható, hogy $N_{\text{össz}} = 100$ kísérlet esetén a Monte-Carlo-módszer még elég nagy hibával közelíti a pontos eredményt. Ugyanakkor $N_{\text{össz}} = 10000$ kísérlet során már nagyon jó egyezést kapunk az integrálszámításból nyert pontos eredménnyel.

A továbbiakban szükségünk lesz a 4. ábrán látható

$$f(x) = \sin^2(\sin(x))$$

'kalapszerű' függvénynek a görbe alatti területére a $[0, \pi]$ intervallumon.

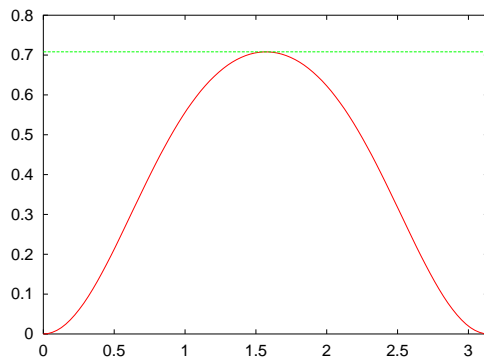


FIG. 4. 'A kalapfüggvény'. A $[0, \pi]$ intervallumon a függvény maximuma: $M = \sin^2(1) = 0.7081$.

Ez a terület a Monte-Carlo-módszer alapján $A \approx 1.2194$, melyet

$$N_{\text{össz}} = 2^{22} = 4194304$$

számú kísérlet elvégzése után kaptunk, három tizedesjegy pontosan egyezik az integrálszámítással kapott $A = 1.2191$ pontos eredménnyel.

A Monte-Carlo-módszert rendkívül sokféle területen használják a fizikusok is. Cikkünk II. részében a véletlenül alapuló számítási módszerek fizikai alkalmazásaiából mutatunk be néhányat.

III. FIZIKAI ALKALMAZÁSOK

Cikkünk első részében bemutattuk a Monte-Carlo-módszer alapjait és néhány egyszerű matematikai alkalmazását. Ezt az eljárást – többek között – a fizikusok is nagyon sok területen használják. A számos fizikai alkalmazás közül a továbbiakban két példát fogunk bemutatni.

A. Súlypont meghatározása

A középiskolás függvénytáblázatban megtalálható a súlypont meghatározásának módja, és néhány speciális alakzatra zárt alakban megadható képleteket is felírhatunk. (Például egy r sugarú, homogén tömegeloszlású félkör alakú lap súlypontja a középponttól $4r/(3\pi)$ távol van.) Bonyolultabb alakzatokra már igen nehéz kiszámítani a súlypont helyét, az általában csak integrálszámítással határozható meg.

Tekintsük például az I. rész 4. ábráján látható, kalapfüggvénynek nevezett alakzat. Az egyszerűség kedvéért most csak olyan síkbeli alakzatokat vizsgálunk, amelyeknek van szimmetriatengelye. A kalapfüggvény szimmetriatengelye az $[a, b] = [0, \pi]$ intervallumon az $x = \pi/2$ függőleges egyenes, így nyilvánvaló, hogy a súlypont vízszintes koordinátája $\pi/2$. Azonban a függőleges koordinátát azonban már nem lehet elemi úton kiszámítani.

Az általános módszer szerint felosztjuk az alakzatot sok kicsi részre, melyek tömege m_i , és elegendően finom felosztás esetén a súlypont függőleges helyét a következő képlettel számíthatjuk ki

$$y_s = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i}.$$

A nevező arányos az alakzat területével. Cikkünk I. részében Monte-Carlo-módszer segítségével már kiszámítottuk a kalapfüggvény területét: $A \approx 1,219$. A fenti képlet számlálóját is kiszámíthatjuk a Monte-Carlo-módszerrel. Generáljunk egy x és egy y véletlen számot a $[0, 1]$ intervallumban. Az $x \rightarrow x(b-a) = x\pi$ és $y \rightarrow My$ transzformációval az (x, y) koordinátájú pont a π és M oldalhosszúságú téglalapba fog esni (M a kalapfüggvény maximuma: $M = \sin^2(1) = 0,7081$). Ekkor a következő igen egyszerű algoritmussal számíthatjuk ki a fenti képlet számlálóját:

```
if (y < f(x) ) then
    S = S + y
    N_be = N_be + 1
endif
```

Az algoritmust $N_{\text{össz}}$ alkalommal végrehajtva a fenti képlet számlálóját az $SM(b-a)/N_{\text{össz}}$ értékkel közelíthetjük. Itt N_{be} azoknak az (x, y) pontoknak a számát jelöli, amelyek az $f(x)$ alá esnek. Cikkünk I. részében láttuk, hogy a görbe alatti területet közelítőleg az $A = M(b-a)N_{\text{be}}/N_{\text{össz}}$ kifejezés alapján határozhatjuk meg. Így a súlypont függőleges koordinátáját az

$$y_s = \frac{S}{N_{\text{be}}}$$

képletből számíthatjuk ki. Ne felejtjük el az S és N_{be} változókat nullázni a ciklus elején! Természetesen a fenti programrészletet a használt programnyelv szabályai szerint esetleg át kell írni. Érdemes megjegyezni, hogy a súlypontnak a Monte-Carlo-módszerrel történő kiszámításához nem volt szükség a görbe alatti területre.

Integrálszámítással a súlypontra a pontosnak mondható $y_s = 0,274975$ értéket kapjuk. Az 4. a súlypontnak különböző számú kísérletekből kapott értékeit ábrázoltuk, és feltüntettük az egzakt értéket is (szaggatott vonal).

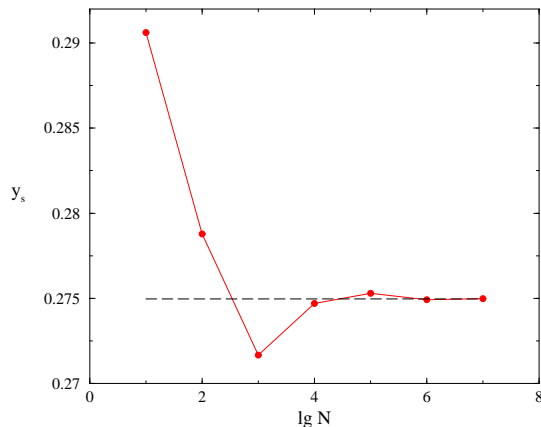


FIG. 5. A kalapfüggvény súlypontja Monte-Carlo-módszer alapján. A szaggatott vonal az egzakt értéket jelzi.

Látható, hogy $N_{\text{össz}} = 10^6$ kísérlet esetén már nagyon jól egyezik a 'mérésünk' a pontos értékkel (0,02%-os az eltérés).

B. Ising-modell

Egyes anyagok mágneses tulajdonságokkal rendelkeznek. Már az ókori görögök ismerték azokat a Magnesia környékén található 'köveket', melyek vonzzák a vasat. Egészen a XX. századig, a kvantummechanika törvényeinek felismeréséig nem sikerült kielégítően magyarázni az anyagok mágneses viselkedését. Az Ising által kidolgozott modell fontos előrelépést jelentett ebben a kutatásban. Ezen egyszerűsített modell szerint az anyagban lévő kis mágnesek (mai ismereteink szerint az atomok spinjei) két állapot valamelyikében lehetnek: vagy azonos, vagy ellentétes irányban állnak a külső mágneses térhez képest.

Képzeljük el, hogy a kis mágnesek egy négyzetrács pontjaiban helyezkednek el. Feltesszük, hogy a négyzetrács i -edik rácspontjában egy kis mágnes (spin) van, melynek értéke $S_i = \pm 1$, attól függően, hogy a spin azonos vagy ellentétes irányú a külső H térrel:

$$S_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } \uparrow \\ -1, & \text{ha } \downarrow. \end{cases}$$

A spinek egyik lehetséges beállása látható a 6. ábrán.

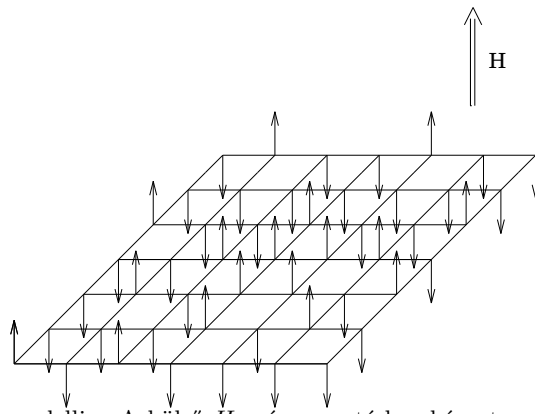


FIG. 6. A spinrendszerek Ising-modellje. A külső H mágneses térhez képest a spinek vagy azonos, vagy ellentétes irányban állnak.

Az egyes spinek kölcsönhatnak egymással. A modellben csak a közvetlen szomszédok (ún. elsőszomszédok) közti kölcsönhatást vesszük figyelembe, a távolabbi mágnesek egymásra hatásait elhanyagoljuk. Így minden rácspontban a spin a 4 elsőszomszédjával hat csak kölcsön. A külső H mágneses tér igyekszik a spineket a tér irányába állítani. A fenti kölcsönhatások alapján a rendszer teljes E energiáját a következő alakban írhatjuk:

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i,$$

ahol J a szomszédos spinek közti kölcsönhatás erősségére jellemző szám, melyet csatolási állandónak szoktak nevezni. Az első tagban az összegzést csak az elsőszomszédokra vesszük, erre utal a \langle, \rangle jelölés.

A rendszer M mágnesezettsége az összes spinváltozó összege (vagy ezzel az összeggel arányos):

$$M = \sum_i S_i.$$

Hűtsük le a rendszert (gondolatban) abszolút zérus fokra, és fokozatosan kapcsoljuk ki a külső mágneses teret is! Ekkor a rendszer alapállapotba (a legalacsonyabb energiájú, másszóval energetikailag 'legkedvezőbb' állapotba) kerül. Ha a J csatolási állandó pozitív, akkor energetikailag az a kedvező állapot, ha minden spin azonos irányba áll (hiszen ebben az esetben a szomszédos spinek szorzata $+1$), tehát egy rendezett állapot alakul ki. Alapállapotban és $J > 0$ esetén a rendszer mágnesezettsége maximális. Ezt az anyag erősen mágneses, *ferromágneses* állapotának nevezik.

A hőmérséklet növelésével egyes spinek 'átbillenek' az ellentétes irányú állapotba, és így lecsökken a rendszer mágnesezettsége. Egy bizonyos T_c hőmérsékletérték után – külső mágneses tér nélkül – átlagosan a spinek fele felfelé, másik fele lefelé áll: a rendszer M mágnesezettsége zérus lesz. Ezt a hőmérsékletet kritikus hőmérsékletnek nevezik, és *Pierre Curie* francia fizikus kutatásai nyomán Curie-hőmérsékletnek is hívják. A hőmérséklet teljesen 'szétzilálja' a rendezett állapotot még zérus H tér mellett is. T_c alatt a rendszer mágnesezettsége véges értékű, míg T_c fölött zérus. Ez a jelenség (a sok tekintetben hasonló halmazállapotváltozásokkal együtt) a fázisátalakulások családjához tartozik. Ezen egyszerű modell alapján is megérthetjük fizikailag, hogy miért vesztí el egy mágnes a mágnességét, ha tűzbe dobjuk. A mágnesezettség hőmérsékletfüggését (vázlatosan) a 7. ábra mutatja.

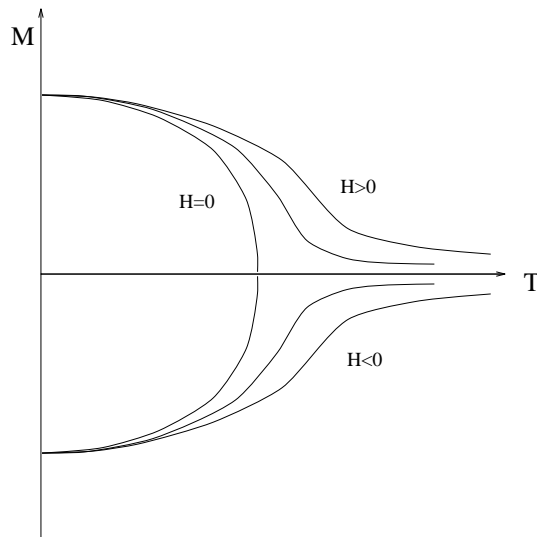


FIG. 7. Ising-modell mágnesezettségének hőmérséklettől való függése különböző külső mágneses terek esetén.

Érdeemes megjegyezni, hogy ha a J csatolási állandó negatív, akkor alapállapotban és $H = 0$ esetén a szomszédos spinek ellentétes irányban állnak (ekkor két szomszédos spin szorzata -1), más szóval egy 'sakkáblaszzerű' állapot alakul ki. Az ilyen (a természetben is megfigyelhető) rendszereket *antiferromágneseknek* nevezik.

Továbbiakban egy a Monte-Carlo-módszeren alapuló algoritmust mutatunk be, mellyel meghatározhatjuk a 7. ábrán látható mágnesezettségnek hőmérséklettől és a külső mágneses tértől való függését. Az algoritmust először *N. Metropolis* görög származású amerikai matematikus alkalmazta spinrendszerekre a múlt század közepén, és azóta Metropolis-algoritmusként is nevezik¹. A spineket gondolatban egy négyzetrácsra helyezzük a 6. ábrának megfelelően, és periódikus határfeltételt alkalmazunk. Ez azt jelenti, hogy a teljes négyzetrácsot gondolatban megismételjük a négyzet oldaléleinek irányában, vagy ami ezzel egyenértékű: a négyzetrácsot egy tóruszra (autógumi alakú felületre) rajzoljuk. Ezzel a 'trükkkel' azt érjük el, hogy az eredeti négyzet szélein lévő spineknek is négy elsőszomszédja legyen, tehát egyenértékűek legyenek a rács belsejében található társaikkal.

Induljunk ki a spinek valamilyen kezdeti elrendeződéséből (konfigurációjából). Választhatjuk pl. a zérus hőmérsékletnek megfelelő rendezett állapotot, az alapállapotot kiindulási konfigurációként. Ezután a következő lépéseket ismételjük:

1. Véletlenszerűen kiválasztunk egy spint. Kiszámítjuk, hogy az átfordításával mennyit változna meg a rendszer energiája. Legyen ez az energiaváltozás ΔE .

2. Kiszámoljuk annak valószínűségét, hogy T hőmérsékleten a kiválasztott spin átfordul az ellentétes irányú állapotba. Ez a valószínűség (az ún. átmeneti valószínűség) az alábbi képlettel adható meg:

$$W = \begin{cases} 1, & \text{ha } \Delta E < 0 \\ e^{-\frac{\Delta E}{kT}}, & \text{ha } \Delta E > 0, \end{cases}$$

ahol k a Boltzmann-állandót jelöli.

3. Generálunk egy r véletlen számot a $[0,1]$ intervallumon! Ha azt tapasztaljuk, hogy $r < W$, akkor megfordítjuk a kiszemelt spint, különben nem változtatunk az állásán.
4. Visszatérünk a 1. ponthoz.

Belátható, hogy a fenti algoritmussal elegendő számú ciklus után a mágnesezettség beáll valamekkora $\langle M \rangle$ egyensúlyi értékre, melyet a T hőmérséklet és a külső H mágneses tér határoz meg. Bizonyos számú iterációra (időre) mindig szükség van, hogy elérjük az egyensúlyi állapotot. Ez az állapot T_{rel} idő (az ún. relaxációs idő) után áll be. Az időt Monte-Carlo-lépésekben (MCS) szokták számolni. Egy MCS az az idő, ami alatt átlagosan minden spint egyszer kiválasztunk az iterációk során. A 8. ábrán a mágnesezettség tipikus időbeli változása (a ciklusok számától való függése) látható.

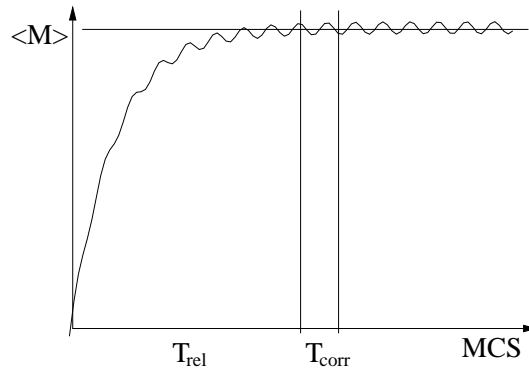


FIG. 8. A mágnesezettség időbeli változása az iterációk során MCS egységekben.

A relaxációs időt tapasztalat útján állapíthatjuk meg. Ha az M mágnesezettség már nem változik jelentősen, csak kissé ingadozik, akkor elértük az egyensúlyi állapotot. Ekkor az átlagos $\langle M \rangle$ mágnesezettséget úgy határozhatjuk meg, hogy bizonyos gyakorisággal kiszámoljuk M értékét, és vesszük ezek átlagát. A hőmérséklet változtatásával vizsgálhatjuk az átlagos mágnesezettség viselkedését, 'méréseinkkel' meghatározhatjuk annak hőmérsékletfüggését.

A fenti kétdimenziós végtelen Ising-modell viselkedését elsőként $L. Onsager^2$ számolta ki analitikusan (közelítésmentesen, zárt alakban) külső mágneses tér nélküli esetben. A rendszer kritikus hőmérséklete $kT_c = 2,27 J$. Az egzakt megoldás ismeretében lehetőség van a Monte-Carlo-módszer pontosságának tanulmányozására. Jelenleg nem ismeretes analitikus megoldás három dimenzióban (vagyis térbeli rácsokra), Monte-Carlo-módszerekkel azonban már alaposan tanulmányozták ezeket a rendszereket is.

A Monte-Carlo-módszer alkalmazásánál figyelni kell a lehetséges hibaforrásokra. Például a rendszer véges mérete miatt a kritikus hőmérséklet síkbeli rácsoknál nem egyezik meg az ismert elméleti értékkel. Ilyenkor vizsgálni kell, hogy hogyan függ a véges méretű mintán kapott kritikus hőmérséklet a minta méretétől, és ebből tudunk következtetni a végtelen rendszerre.

A másik gyakori gond a 'jó' véletlenszámgenerátor. Előfordul, hogy a generátor egymást követő számai nem teljesen függetlenek egymástól; ekkor biztosan hibás eredményeket kapunk. Rendkívül fontos tehát a véletlenszámgenerátor tesztelése.

Végezetül megemlítjük, hogy viszonylag egyszerűen programozható problémák találhatók³ cikkben.

Köszönetemet szeretném kifejezni kollégáimnak, *Kertész Jánosnak* és *Vicsék Tamásnak*, akik megismertettek a Monte-Carlo-módszerrel, *Geszti Tamásnak* és *Pollner Péternek* a hasznos tanácsaikért, valamint egyetemi

hallgatóimnak, *Koltai Jánosnak, Pafka Szilárdnak és Szűcs Józsefnek*, akik segítségemre voltak ebben a munkában.

¹ N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, E. Teller: *J. Chem. Phys.* **21**, 1087 (1953).

² L. Onsager: *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).

³ J. Kertész, J. Cserti, J. Szép: Monte Carlo simulation programs for microcomputer, *Eur. J. Phys.* **6**, 232 (1985).