Optika és Relativitáselmélet

II. BsC fizikus hallgatóknak

11.

Bevezetés a speciális relativitáselméletbe

I.

Tér, Idő, Téridő

Cserti József, jegyzet, ELTE, 2007 (Dávid Gyula jegyzete alapján).

Maxwell-egyenletek (vákuumban) $\longrightarrow$ hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi \qquad \boxed{c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

síkhullám-megoldás: $\Phi(\mathbf{r},t) = A\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = A\, e^{i\frac{\omega}{c}(\mathbf{nr}-ct)}$

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} \qquad |\mathbf{n}| = 1$$

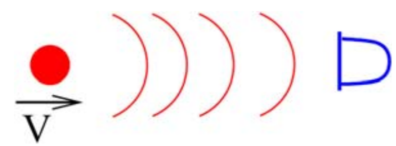
c sebességgel terjed -- de **mihez képest**?

Analóg mechanikai hullámjelenség: hangterjedés

ugyanaz a hullámegyenlet, de a c a hang sebessége a közeghez képest.

Kimutatás: **Doppler-effektus(ok)**

a) mozgó forrás – álló detektor $\qquad \omega' = \dfrac{\omega_0}{1-\frac{V}{c}}$



$\left(\dfrac{V}{c}\right)^2$ -rendű tagokban különböznek

b) álló forrás – mozgó detektor $\qquad \omega' = \omega_0 \left(1+\dfrac{V}{c}\right)$

c) HF.: mindkettő mozog

Mi hordozza az elektromágneses hullámot?

„**az éter**”

- mindent betölt
- a szilárd testek (pl. bolygók) áthatolnak rajta
- szilárd (transzverzális hullámok terjednek benne)

A Maxwell-egyenletek csak egyetlen, kitüntetett, az éterhez rögzített inerciarendszerben érvényesek.

Ez ellentmond a Galilei-féle (mechanikai) relativitáselvnek!

Szimmetriaelvek a klasszikus mechanikában:

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ gyorsuló koordinátarendszerben (KR): $\mathbf{r}' = \mathbf{R}(t) + \mathbf{M}(t)\mathbf{r}$

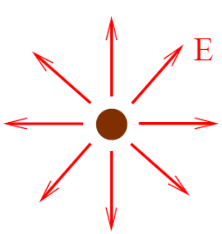
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} + \underbrace{m\mathbf{A} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}}_{\text{inerciaerők}}$$

Mitől függnek? $\mathbf{A}, \boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ $\quad \boldsymbol{\omega} \sim \dot{\mathbf{M}}$ $\quad \dot{\boldsymbol{\omega}} \sim \ddot{\mathbf{M}}$ $\quad \mathbf{A} = \ddot{\mathbf{R}}$

t_0	az időszámítás kezdete	időeltolás	energia
$\mathbf{r}_0$	a KR kezdőpontja	térbeli eltolás	impulzus
$\mathbf{M}$	koordinátatengelyek iránya	térbeli elforgatás	impulzusmomentum, perdület
$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$	relatív sebesség	Galilei-transzformáció	? (tömegközéppont)
	nem releváns adat $\longrightarrow$	**szimmetria** $\longrightarrow$	**megmaradási tétel**

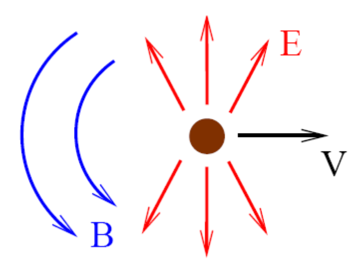
Mindez az $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenlet alakjából olvasható le!

DE: Elektrodinamika: a Maxwell-egyenletek **NEM** Galilei-invariánsak:

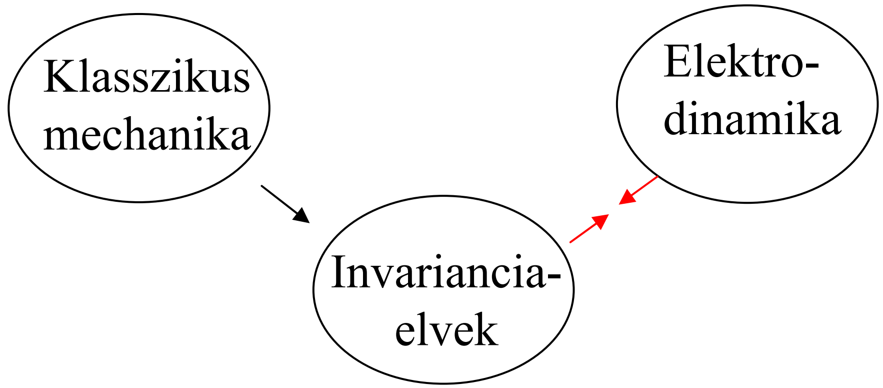


álló ponttöltés $\longleftrightarrow$ mozgó ponttöltés

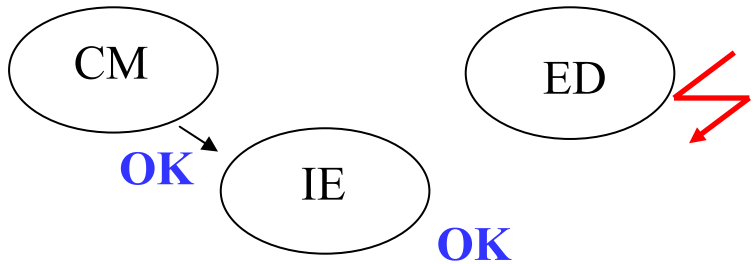
nem ekvivalens



Ellentmondások és feloldásuk

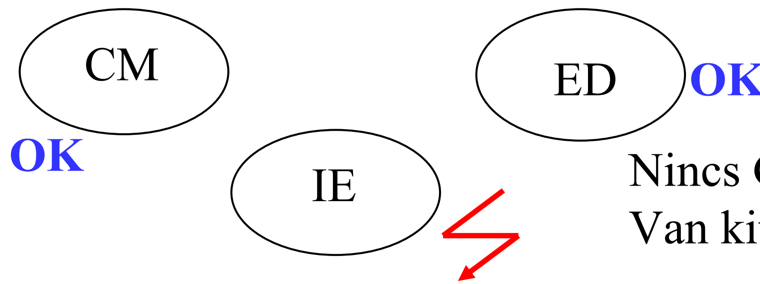


a) Triviális feloldás:



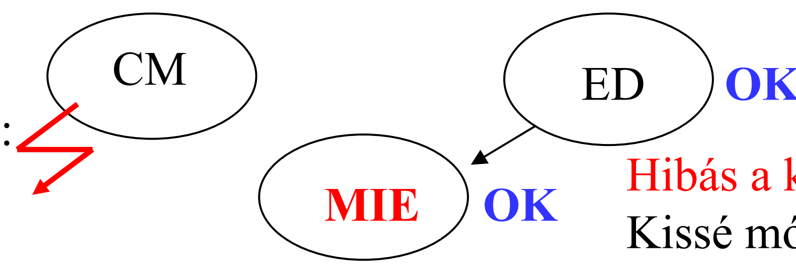
hibás
(új kiforratlan elmélet)

b) Szokásos megoldás:



Nincs Galilei-invariancia.
Van kitüntetett KR: **ÉTER**

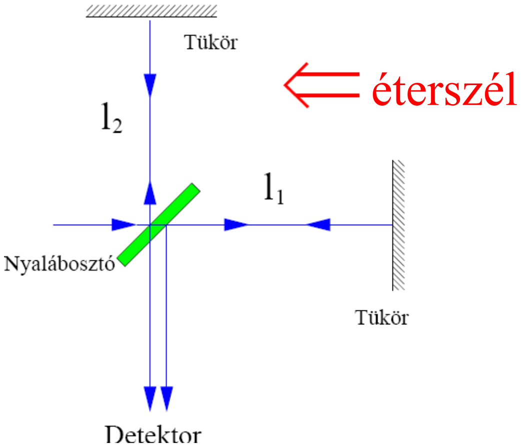
c) Meglepő, új megoldás:

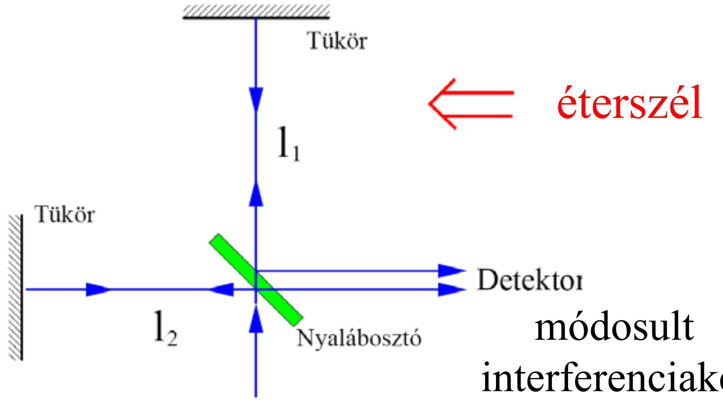


Hibás a klasszikus mechanika!
Kissé módosított invarianciaelvek:
Galilei helyett Lorentz

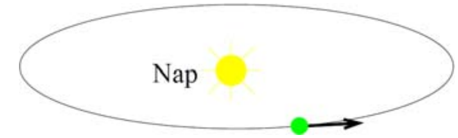
Kompatibilitás az ELDIN-nel
A Maxwell-egyenletek már Einstein születése előtt relativisztikusan invariánsak voltak!

Kísérlet az éter kimutatására: Michelson-Morley, 1883





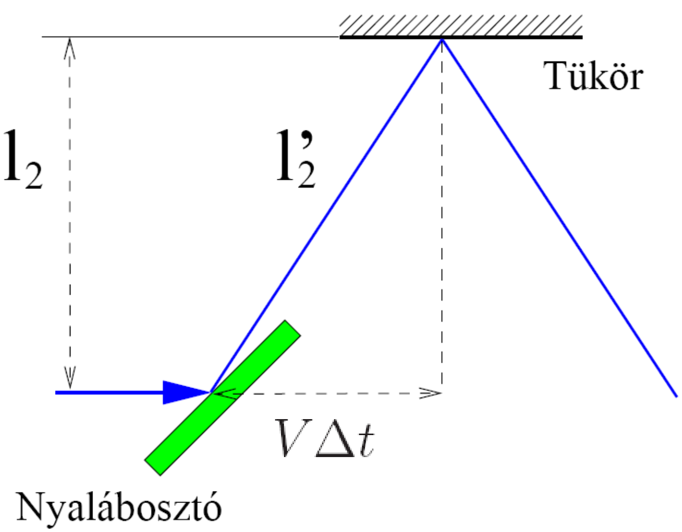
módosult
interferenciakép



$V \sim 30$ km/s

A mérés kb. 10 m/s pontosságú volt. Effektus: NULLA

Nézzük az éterből!

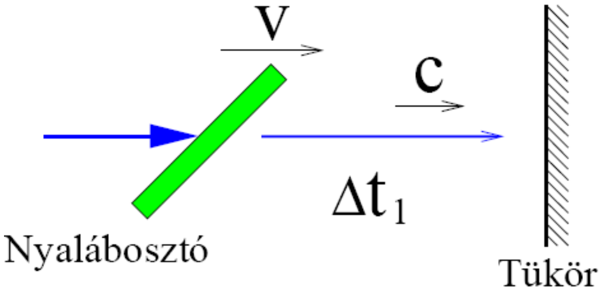


$$l_2' = \sqrt{l_2^2 + (V\Delta t)^2} \qquad \Delta t = \frac{l_2'}{c}$$

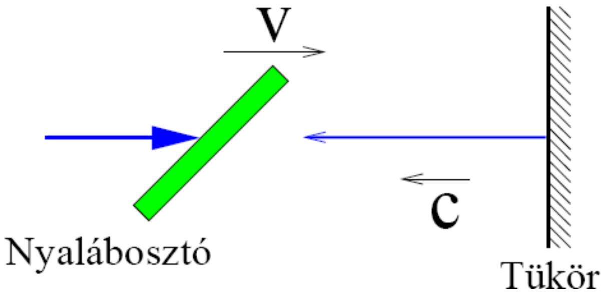
$$l_2^{2\prime} = l_2^2 + V^2 \frac{l_2^{2\prime}}{c^2}$$

$$l_2' = \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > l_2$$

teljes fényút: $2l_2'$



$$c\Delta t_1 = l_1 + V\Delta t_1 \qquad \Delta t_1 = \frac{l_1}{c - V}$$



$$c\Delta t_2 = l_1 - V\Delta t_2 \qquad \Delta t_2 = \frac{l_1}{c + V}$$

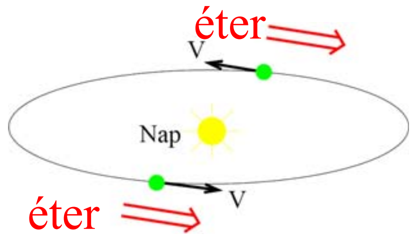
fényút: $c\left(\Delta t_1 + \Delta t_2\right) = l_1 c \left(\frac{1}{c - V} + \frac{1}{c + V}\right) = \frac{2 l_1 c^2}{c^2 - V^2} = \frac{2 l_1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$

útkülönbség: $\boxed{\frac{2 l_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{2 l_1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \neq \frac{2 l_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{2 l_2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

elforgatás előtt

elforgatás után

Mentőötletek:



- most épp együtt mozgunk az éterrel. DE fél év múlva $\Delta V = 60$ km/s
- a bolygók magukkal sodorják az étert. DE örvények, sodorvonalak: optikailag észlelhető lenne.
- Lorentz-Fitzgerald kontrakció:

  az éterszél összenyomja a szilárd testeket $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ arányban

Hendrik Antoon **Lorentz** (1853-1928)

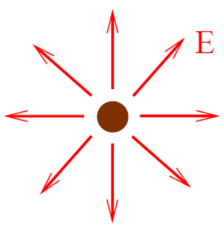
fényút: $$\frac{2\left(l_1\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)}{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{2\,l_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2\,l_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{2\left(l_2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$ nincs effektus

elforgatás előtt — elforgatás után

HF.: ferde éterszél esete

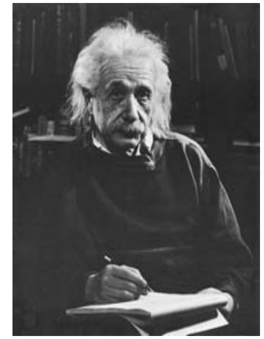
Fizikai alapja az elektromágneses anyagmodell (avagy a ló túlsó oldala)

az anyag elektromágneses erők által összetartott ponttöltésekből áll
SŐT: a töltések is csak a mező sűrűsödései
gyorsulás: átrendeződés



Miért nem jó ez? „összeesküvés" jellegű: nagyon különböző anyagok egyformán húzódnak össze.
Emlékeztető: a függvénytáblázat rugalmas, optikai, elektromos, mágneses „anyagi állandói" a különböző atomi szerkezet következményei.

Einstein, 1905



Albert **Einstein**
(1879-1955)

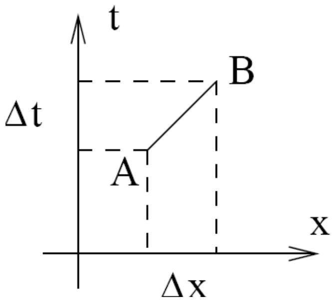
Egységes, „geometriai” jellegű magyarázat
(1908-ban Minkowski geometrizálta)

Alapelvek:

- MINDEN inerciarendszer egyenértékű
  (nemcsak a mechanikában, hanem az elektrodinamikában, SŐT: a fizika majdan felfedezett területein is)
- A fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanaz
  (a józan észnek kissé ellentmond)

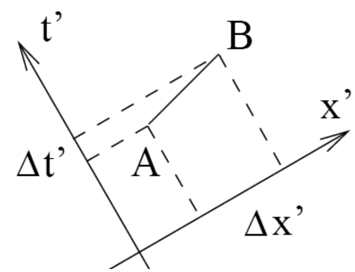
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Két esemény a téridőben fényjellel összekötve:



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$$

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$$



$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = c$$

$$c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 0$$

$$\boxed{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \text{invariáns}}$$

$(x, t) \to (x', t')$ transzformáció invariánsan hagyja ezt a kifejezést

Van ilyen?

$$\begin{pmatrix} c\,t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & \mathrm{sh}\chi \\ \mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\,t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

$\chi \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter
rapiditás

hiperbolikus elforgatás a téridőben

az origó eltolása

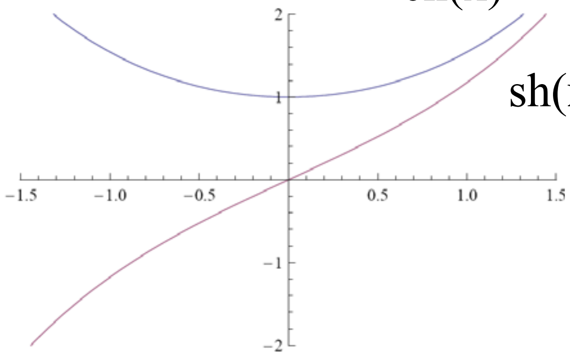
Lorentz-Poincaré-transzformáció

Emlékeztető: hiperbolikus függvények

$$\mathrm{ch}\,x = (\cosh x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,x = (\sinh x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{th}\,x = (\tanh x) = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$\mathrm{ch}\,x\,' = \mathrm{sh}\,x \qquad \mathrm{sh}\,x\,' = \mathrm{ch}\,x \qquad \mathrm{th}\,x\,' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$$

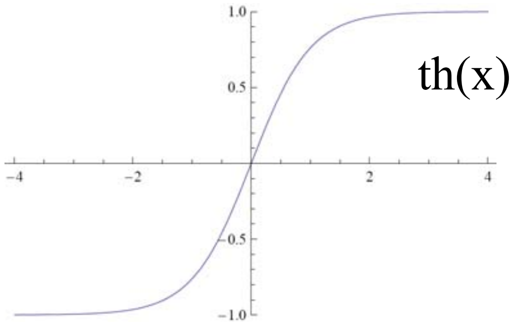
$$\mathrm{ch}\,x = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2 x}} \qquad \mathrm{sh}\,x = \frac{\mathrm{th}\,x}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2 x}}$$

$$\boxed{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1}$$

$$\mathrm{ch}(\alpha + \beta) = \mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$$

$$\mathrm{sh}(\alpha + \beta) = \mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$$

$$\mathrm{th}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{th}\,\alpha + \mathrm{th}\,\beta}{1 + \mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{th}\,\beta}$$



$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\alpha & -\mathrm{sh}\,\alpha \\ -\mathrm{sh}\,\alpha & \mathrm{ch}\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\beta & -\mathrm{sh}\,\beta \\ -\mathrm{sh}\,\beta & \mathrm{ch}\,\beta \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha+\beta) & -\mathrm{sh}(\alpha+\beta) \\ -\mathrm{sh}(\alpha+\beta) & \mathrm{ch}(\alpha+\beta) \end{pmatrix}}$$

Lorentz-transzformáció 1+1 dimenzióban:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & -\mathrm{sh}\chi \\ -\mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \mathbf{L}(\chi) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$\chi \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter

rapiditás

inverze: $$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & \mathrm{sh}\chi \\ \mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \mathbf{L}(-\chi) \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

invariáns:

$$c^2t'^2 - x'^2 = (\mathrm{ch}\chi\, ct - \mathrm{sh}\chi\, x)^2 - (-\mathrm{sh}\chi\, ct + \mathrm{ch}\chi\, x)^2 = c^2t^2\left(\mathrm{ch}^2\chi - \mathrm{sh}^2\chi\right) + x^2\left(\mathrm{sh}^2\chi - \mathrm{ch}^2\chi\right) = c^2t^2 - x^2$$

Egymás utáni Lorentz-transzformációk:

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi_2 & -\mathrm{sh}\chi_2 \\ -\mathrm{sh}\chi_2 & \mathrm{ch}\chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi_2 & -\mathrm{sh}\chi_2 \\ -\mathrm{sh}\chi_2 & \mathrm{ch}\chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi_1 & -\mathrm{sh}\chi_1 \\ -\mathrm{sh}\chi_1 & \mathrm{ch}\chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\chi_1+\chi_2) & -\mathrm{sh}(\chi_1+\chi_2) \\ -\mathrm{sh}(\chi_1+\chi_2) & \mathrm{ch}(\chi_1+\chi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\mathbf{L}(\chi_1)\mathbf{L}(\chi_2) = \mathbf{L}(\chi_1+\chi_2)}$$

A rapiditás paraméter ADDITIV

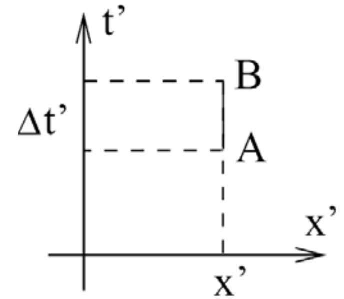
A Lorentz-transzformációk csoportot alkotnak:

$$\mathbf{L}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{L}(\chi)\mathbf{L}(-\chi) = \mathbf{L}(0) = \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{L}^{-1}(\chi) = \mathbf{L}(-\chi)$$

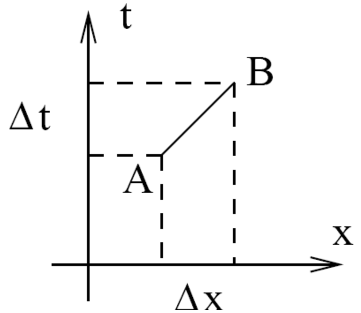
Emlékeztető: forgásmátrixok $$\mathbf{F}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{F}(\alpha)\mathbf{F}(\beta) = \mathbf{F}(\alpha+\beta)$$

Speciális eset: $\Delta x' = 0$ két esemény K' szerint **ugyanott**, de **nem ugyanakkor**

$$\begin{pmatrix} c\,\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & \mathrm{sh}\chi \\ \mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,\Delta t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi\, c\,\Delta t' \\ \mathrm{sh}\chi\, c\,\Delta t' \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} \Delta t &= \mathrm{ch}\chi \Delta t' \\ \Delta x &= c\,\mathrm{sh}\chi \Delta t' \end{aligned}$$



$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c\,\frac{\mathrm{sh}\chi}{\mathrm{ch}\chi} = c\,\mathrm{th}\chi$$

$$\boxed{V = c\,\mathrm{th}\chi}$$

$$|V| = c\,|\mathrm{th}\chi| < c$$

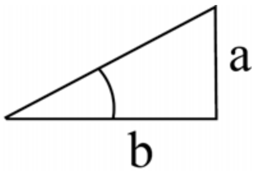
Az inerciarendszerek relatív sebessége kisebb *c*-nél

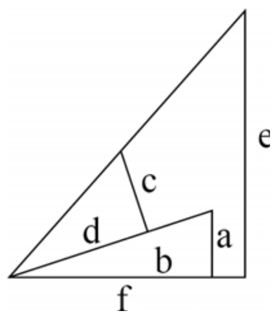
Sebességek összeadása: $V_1 = c\,\mathrm{th}\chi_1$ $V_2 = c\,\mathrm{th}\chi_2 \Rightarrow V_3 = c\,\mathrm{th}(\chi_1+\chi_2)$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{c} = \mathrm{th}(\chi_1+\chi_2) = \frac{\mathrm{th}\chi_1 + \mathrm{th}\chi_2}{1+\mathrm{th}\chi_1\,\mathrm{th}\chi_2} = \frac{\frac{V_1}{c}+\frac{V_2}{c}}{1+\frac{V_1}{c}\frac{V_2}{c}} \Rightarrow \boxed{V_3 = \frac{V_1+V_2}{1+\frac{V_1 V_2}{c^2}}}$$

Einstein-féle sebesség-összeadás

Mese a görögök nélküli geometriáról:
A „szög” fogalma helyett jellemezzük az egyeneseket az *a/b* aránnyal.





$$\frac{e}{f} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{1-\frac{a}{b}\frac{c}{d}}$$

(mi tudjuk: $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$)

Egyszerűbb a leírás az additív paraméterrel, a szöggel, illetve a rapiditással.
Ajánlott könyv (amely bevezeti a rapiditást): Taylor-Wheeler: Téridő-fizika

Kis sebességek: $\left|\frac{V}{c}\right| \ll 1$ $V_3 = \dfrac{V_1+V_2}{1+\frac{V_1 V_2}{c^2}} \approx V_1 + V_2$ Galilei-féle sebességösszeadás

Nemrelativisztikus közelítés: $|\chi| \ll 1$ $\mathrm{th}\chi \approx \chi$

Mihez képest kis sebességek? A *c* univerzális határsebességhez képest!
c-nek csak másodlagos funkciója, hogy éppen a fény sebessége!

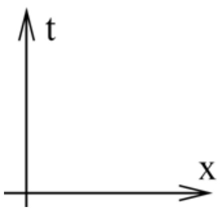
Paradoxonok, furcsaságok:

Alapparadoxon: az egyidejűség relativitása: minden más „paradoxon” ebből következik.

$$\Delta t = 0 \Longrightarrow \Delta t' \neq 0 \qquad \begin{pmatrix} c\,\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & -\mathrm{sh}\chi \\ -\mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sh}\chi\,\Delta x \\ \mathrm{ch}\chi\,\Delta x \end{pmatrix}$$

Mostantól legyen $c = 1$

Koordinátarendszerek:

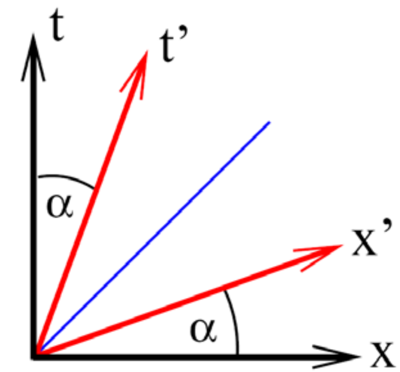


t' tengely: az $x' = 0$ pontok mértani helye

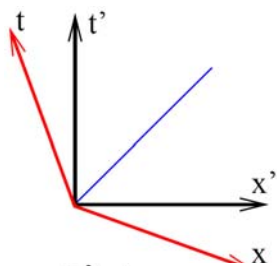
$$x' = -\mathrm{sh}\chi\, t + \mathrm{ch}\chi\, x = 0 \Longrightarrow \frac{t}{x} = \mathrm{cth}\chi$$

x' tengely: az $t' = 0$ pontok mértani helye

$$t' = \mathrm{ch}\chi\, t - \mathrm{sh}\chi\, x = 0 \Longrightarrow \frac{t}{x} = \mathrm{th}\chi$$



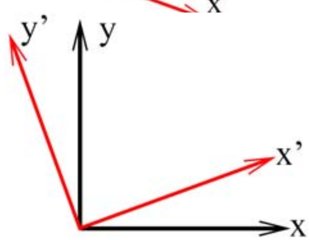
K’ rendszerből nézve:

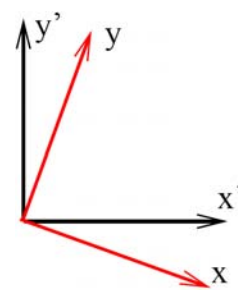


$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{th}\chi$$

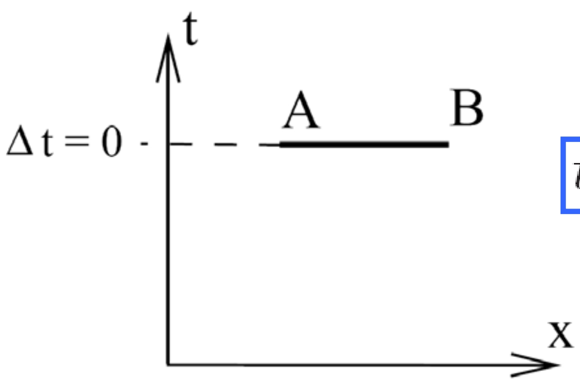
Az α szög csak az ábrán létezik!

Emlékeztető: forgatás

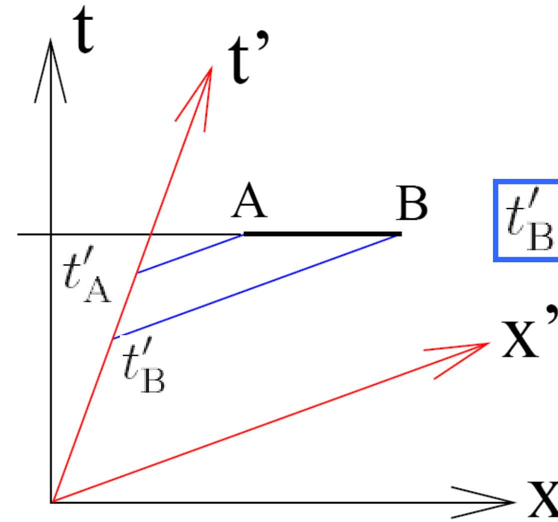




Egyidejű események:

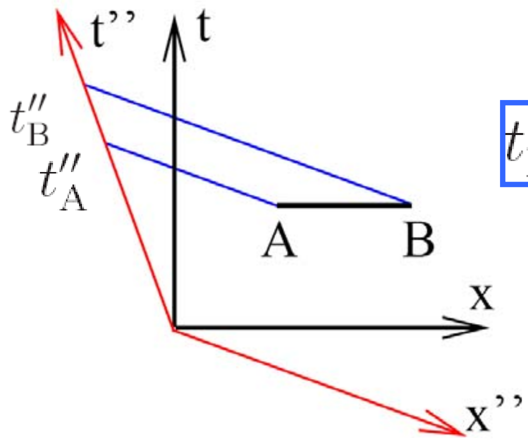


$\boxed{t_B = t_A}$



$\boxed{t'_B < t'_A}$

Sőt:



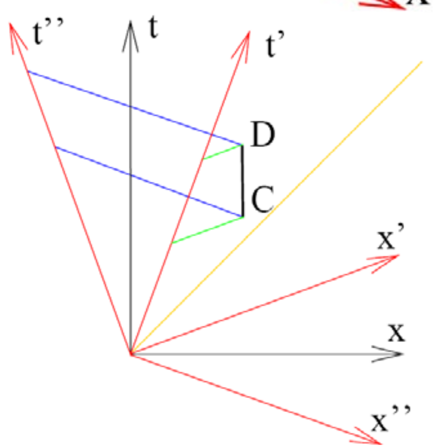
$\boxed{t''_B > t''_A}$

Vannak olyan A, B események:

$$\left.\begin{array}{l} t'_B < t'_A \\ t_B = t_A \\ t''_B > t''_A \end{array}\right\}$$

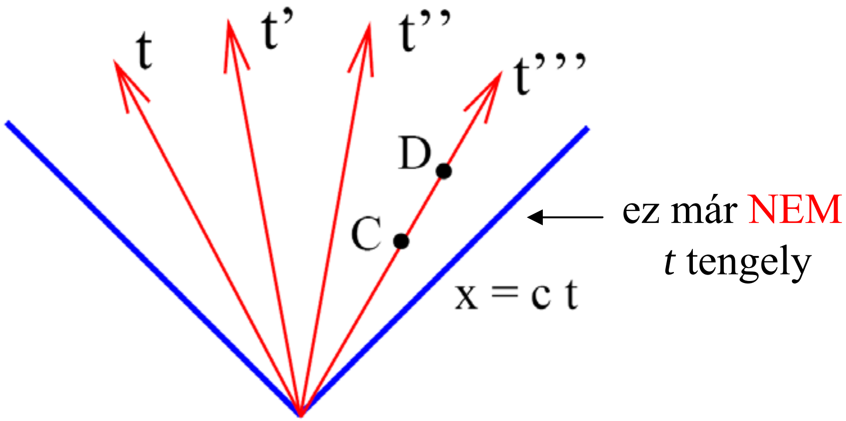
attól függ, ki nézi

DE:



Vannak olyan C, D események is, amelyre: $t_D > t_C$ MINDEN inerciarendszerben!

lehetséges *t* tengelyek:



$x'''_C = x'''_D = 0$

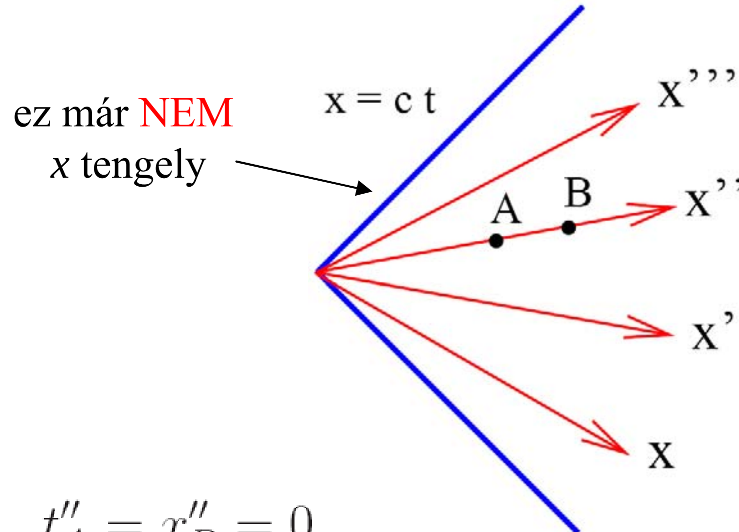
ugyanott vannak, egymás után

időszerűen elválasztva:

$$\boxed{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0}$$

invariáns állítás: minden megfigyelő így látja

lehetséges *x* tengelyek:

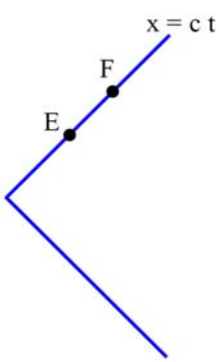


$t''_A = x''_B = 0$

ugyanakkor vannak, egymás mellett

térszerűen elválasztva:

$$\boxed{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 < 0}$$



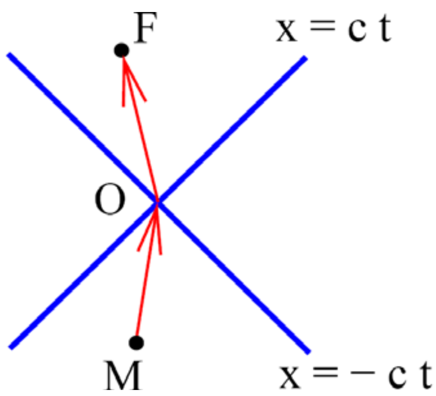
Nincs

sem olyan KR, ahol egyszerre lennének

sem olyan KR, ahol ugyanott lennének

fényszerűen vannak elválasztva $\boxed{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0}$

Kauzális struktúra

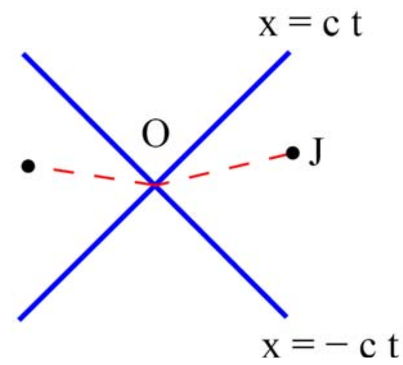


$$c^2 t_F^2 - x_F^2 > 0$$

$$\left|\frac{x_F}{t_F}\right| < c$$

lehetséges hatás:
c-nél kisebb sebességgel:
kauzális kapcsolat:
M ⟶ O ⟶ F

időszerűen elválasztott pontok



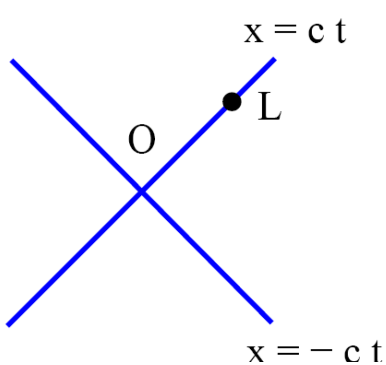
nem lehet hatást közvetíteni

$$c^2 t_J^2 - x_J^2 < 0$$

$$\left|\frac{x_J}{t_J}\right| > c$$

térszerűen elválasztott pontok

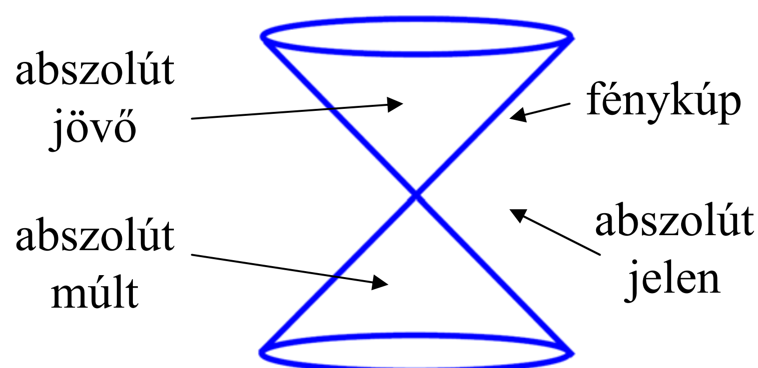
fényszerűen elválasztott pontok halmaza a fénykúp



$$c^2 t_L^2 - x_L^2 = 0$$

$$\left|\frac{x_L}{t_L}\right| = c$$

több dimenzióban

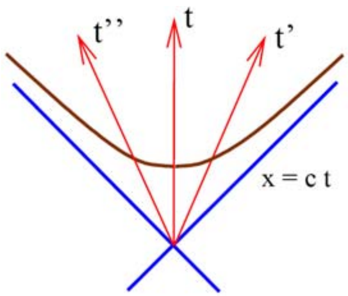


relativitás helyett **„abszolutitás”** elmélet

Idő és hosszúságegységek:

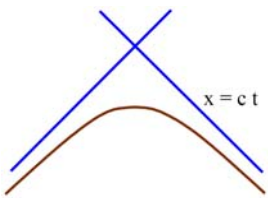
Keressük azon pontokat, amelyek K' KR-ben t' = 1 időegységgel vannak az origó után,

t' = 1, x' = 0   (c = 1)



$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & \mathrm{sh}\chi \\ \mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi \\ \mathrm{sh}\chi \end{pmatrix} \Longrightarrow t^2 - x^2 = 1$$

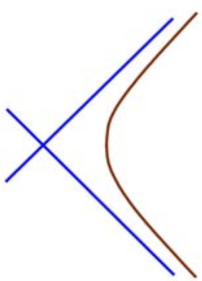
hiperbola



Pontok t' = -1 egységgel az origó előtt,

t' = -1, x' = 0

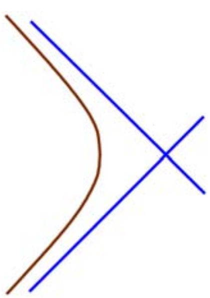
$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}\chi \\ \text{-}\mathrm{ch}\chi \end{pmatrix}$$



Mely pontok vannak valamely KR-ben x' = 1 egységre az origótól jobbra?

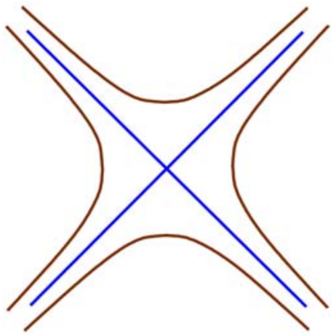
t' = 0, x' = 1

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & \mathrm{sh}\chi \\ \mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}\chi \\ \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \Longrightarrow t^2 - x^2 = -1$$



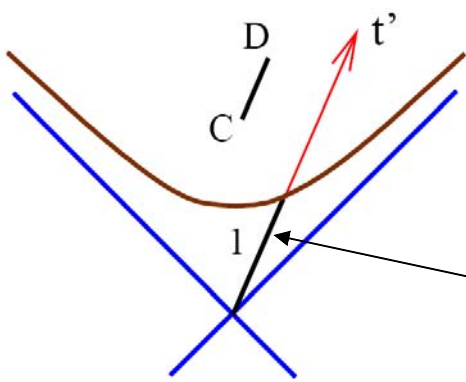
És balra.

Ezek együtt az origótól egységnyi „távolságra” lévő pontok halmaza: **indikátrix**

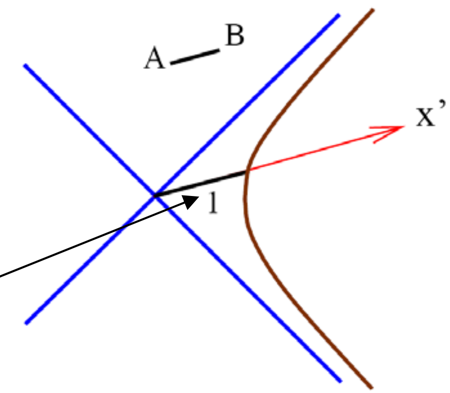


invariáns görbék, mindegyik megfigyelő
ilyen struktúrát lát

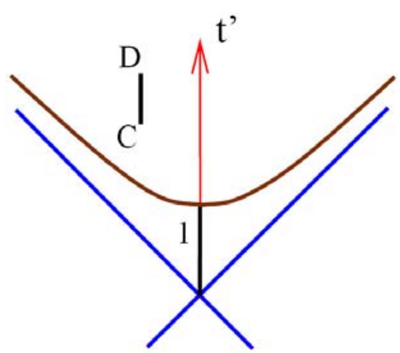
Hogy mérjünk?

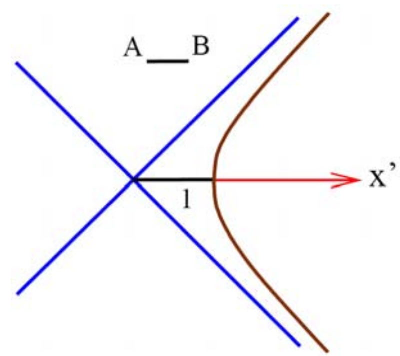


adott iránnyal párhuzamos
szakaszokat ezekhez az
egységekhez kell viszonyítani.

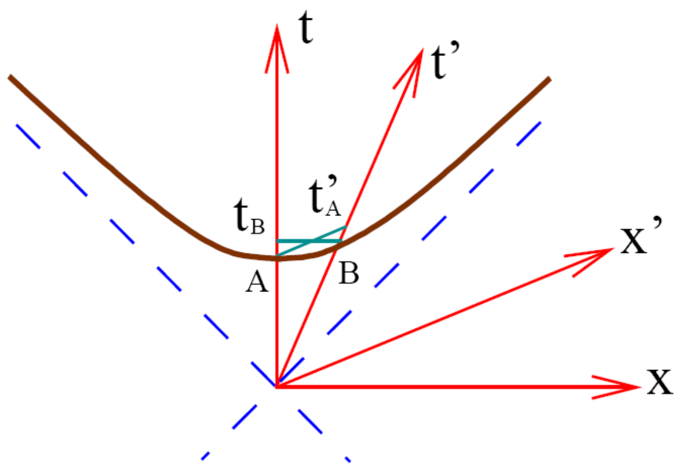


Mert az illeszkedő KR-ben:





Időintervallumok relativitása:



A: $\begin{aligned} t_A &= 1 \\ x_A &= 0 \end{aligned}$

Emlékeztető: $\frac{V}{c} = \mathrm{th}\chi$

$$\begin{pmatrix} t'_A \\ x'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & -\mathrm{sh}\chi \\ -\mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_A \\ x_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & -\mathrm{sh}\chi \\ -\mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi \\ -\mathrm{sh}\chi \end{pmatrix}$$

$$t'_A = \mathrm{ch}\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > 1$$

(a t' = 1 pont a B-be esik!)

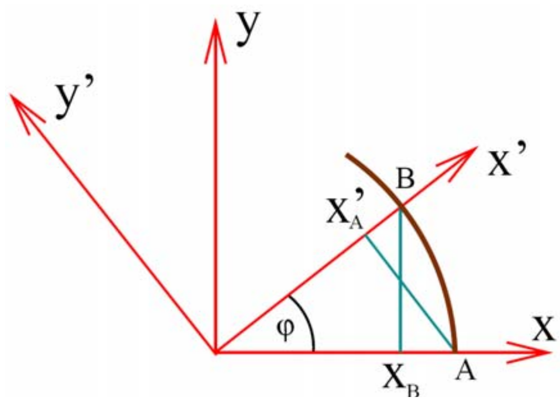
A helyzet szimmetrikus: $\begin{aligned} t'_B &= 1 \\ x'_B &= 0 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} t_B \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & -\mathrm{sh}\chi \\ -\mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi \\ \mathrm{sh}\chi \end{pmatrix}$

$$t_B = \mathrm{ch}\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > 1$$

Nem paradoxon!
Nem ugyanazt az eseményt nézzük a két esetben!

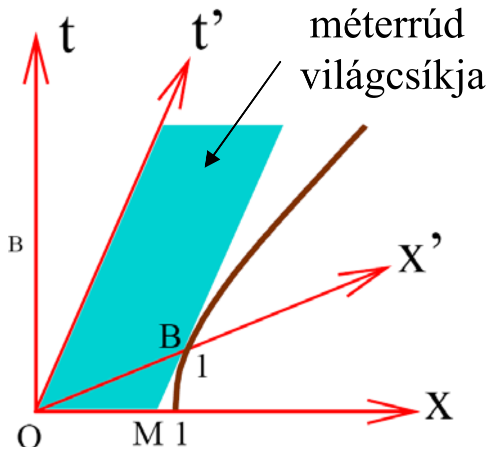
Hasonlat á la Euklidész:

$\begin{aligned} x_A &= 1 \\ y_A &= 0 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $x'_A = \cos\varphi$



$\begin{aligned} x'_B &= 1 \\ y'_B &= 0 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $x_A = \cos\varphi$

Hosszúság relativitása: méterrúd a K' rendszerben



B: a méterrúd jobb vége a K'-ben:

$$t'_B = 0$$
$$x'_B = 1$$

M: a mérés pontja

OM a méterrúd a K-ben, $t = 0$ -kor: $x_M < 1$

M és B nem egyidejű (időszerűen vannak elválasztva)

$$t_M = 0 \qquad x'_M = 1$$

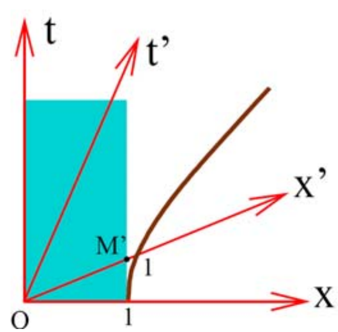
asszimmetrikus adatok $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} t_M \\ x_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & \mathrm{sh}\chi \\ \mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_M \\ x'_M \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & \mathrm{sh}\chi \\ \mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_M \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = t'_M \,\mathrm{ch}\chi + 1 \cdot \mathrm{sh}\chi \Rightarrow t'_M = -\mathrm{th}\chi$$

$$\Rightarrow x_M = t'_M \,\mathrm{sh}\chi + 1 \cdot \mathrm{ch}\chi = -\mathrm{th}\chi \,\mathrm{sh}\chi + \mathrm{ch}\chi = -\frac{\mathrm{sh}^2\chi}{\mathrm{ch}\chi} + \mathrm{ch}\chi = \frac{-\mathrm{sh}^2\chi + \mathrm{ch}^2\chi}{\mathrm{ch}\chi} = \frac{1}{\mathrm{ch}\chi} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < 1$$

a méterrúd rövidülése, „Lorentz-kontrakció"

A helyzet szimmetrikus: a méterrúd a K-ben

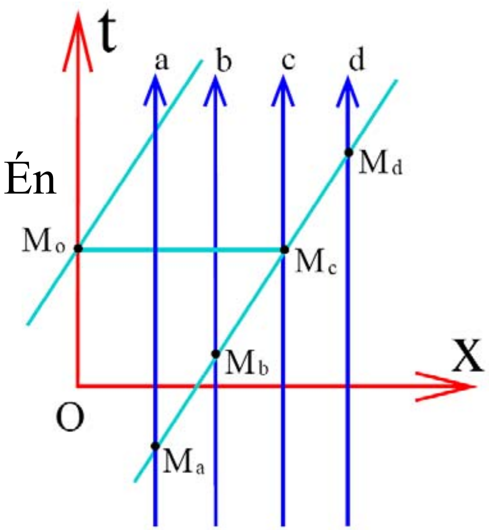


mérés az M' pontban:

$$t'_M = 0$$
$$x_M = 0$$

$$\Rightarrow x'_M == \frac{1}{\mathrm{ch}\chi} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < 1$$

Hogy kell megmérni a mozgó méterrúdat? Végtelen sok szinkronizált órájú megfigyelő áll az *x* tengely mentén. Én a rúd bal végének elhaladásakor nyomom meg a stoppert, mindenki más a jobb vég elhaladásakor.



a, b, c, d … megfigyelők

M_a, M_b, M_c, M_d : a megfigyelők megnyomják a stoppert

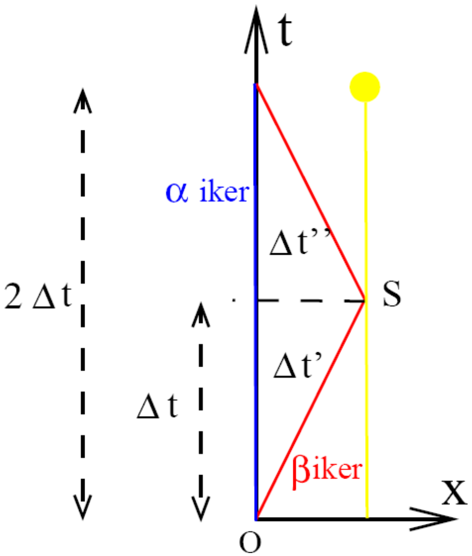
Aztán megkeresem azt a megfigyelőt, aki ugyanakkor nyomta meg a stoppert, mint én: ez a c megfigyelő
Ekkor a rúd hossza az én és a c megfigyelő pozíciója közti *x* távolság.

Az időtartamok nyúlnak, a rudak rövidülnek… Hová lett a tér és idő közti szimmetria?
MÁS a mérési utasítás!

idő: $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ rúd: $\begin{pmatrix} t \\ x' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t' \\ x \end{pmatrix}$

A „Lorentz-kontrakció” nem valóságos fizikai esemény!
Nem történik semmi: másképp olvassuk le az adatokat, a valóság más vetületét mérjük.

Ikerparadoxon: Ki lesz a fiatalabb?



Válasz: a β iker lesz fiatalabb.
Ellenvetés: hová lett a KR szimmetria?
Válasz: a két út NEM egyenértékű:

a β iker nem volt végig egyetlen inerciarendszerben

az S pontban gyorsult, „átugrott" egy visszafelé menő űrhajóba.

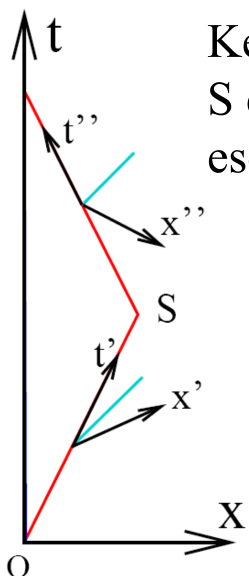
Ellenvetés: ezek szerint a gyorsulás fiatalít?
Válasz: NEM a gyorsulás, a KR váltás!
HÁROM KR szerepel az ábrán.

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\mathrm{ch}\chi}$$

$$\Delta t'' = \frac{\Delta t}{\mathrm{ch}\chi}$$

$$2\Delta t = (\Delta t' + \Delta t'')\,\mathrm{ch}\chi > \Delta t' + \Delta t''$$

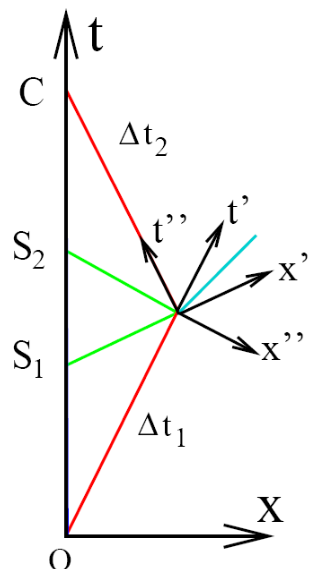
α iker β iker



Keressük meg az
S eseménnyel egyidejű
eseményeket a Földön!

$$OS_1 = \frac{\Delta t_1}{\mathrm{ch}\chi} < \Delta t_1$$

$$S_2C = \frac{\Delta t_2}{\mathrm{ch}\chi} < \Delta t_2$$

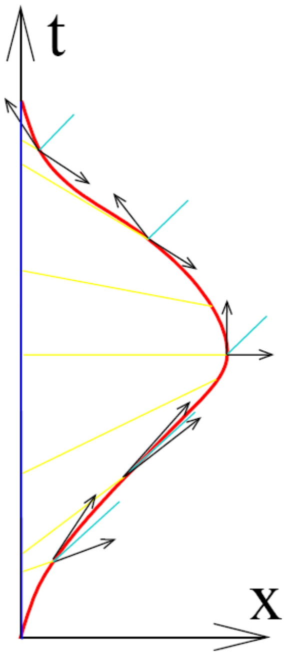


S_1S_2 :

A KR-váltás megváltoztatja az egyidejűséget

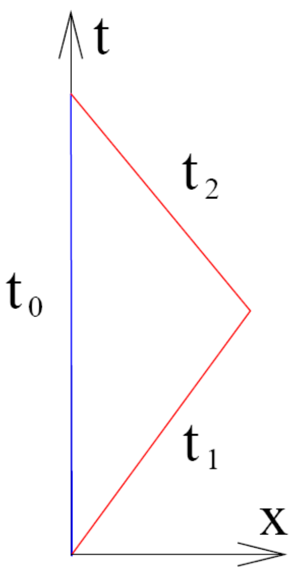
$$OS_1 + S_1S_2 + S_2C > \Delta t_1 + \Delta t_2$$

Folytonosan változó sebességű űrhajó:



Minden pontban van egy pillanatnyi, lokális inerciarendszer:
ez folyamatosan változik. Időtengelye a világvonal érintője.

Az utazás adott pillanatával az utazó szerint egyidejű események ideje nem egyenletesen söpri végig a Föld világvonalát!
A visszaforduláskor gyorsan változik az egyidejűség.



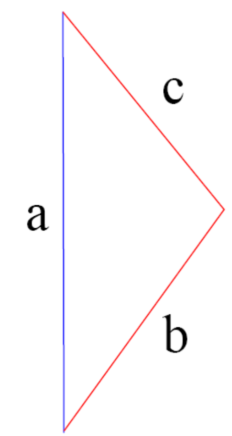
Geometriai interpretáció:

„Anti"-háromszög-egyenlőtlenség:

$$\boxed{t_1 + t_2 < t_0}$$

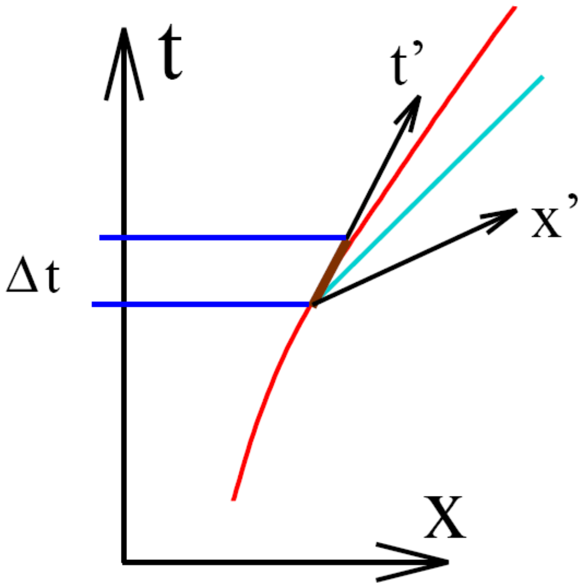
A Minkowski-geometria sajátossága
Vigyázat! Csak időszerű szakaszokra igaz!

Euklidésznél:



$$b + c > a$$

Mennyi idő telik el az utazás során az űrhajóban és a Földön?



út-idő diagram: $x(t) \Longrightarrow \dot{x}(t) = v(t) \rightarrow \chi(t)$

Adott pillanatban: lokális KR: K' $\quad \Delta x' = 0$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi(t) & \mathrm{sh}\chi(t) \\ \mathrm{sh}\chi(t) & \mathrm{ch}\chi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta t = \mathrm{ch}\chi(t)\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}\Delta t'$$

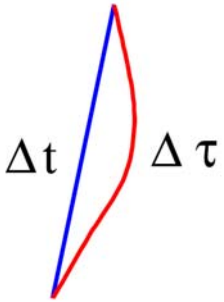
$\Delta t'$ az űrhajón lévő óra által mutatott idő: **sajátidő,** jele: $\Delta\tau$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\mathrm{ch}\chi(t)} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}$$

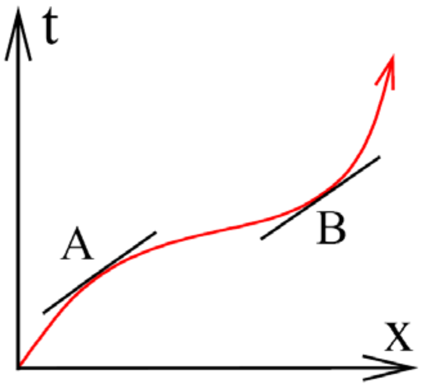
Az űrhajón eltelt teljes idő: $\tau = \int \Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \leq \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1$

Az űrutazó mindig fiatalabb, mint a Földön maradt testvére!

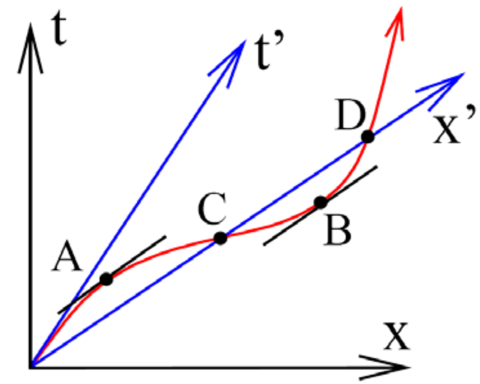
- a nyugalom (unalom) tart a legtovább
- két pont közt a leghosszabb út az egyenes: $\Delta\tau < \Delta t$



Miért nem lehet gyorsabban menni c-nél?

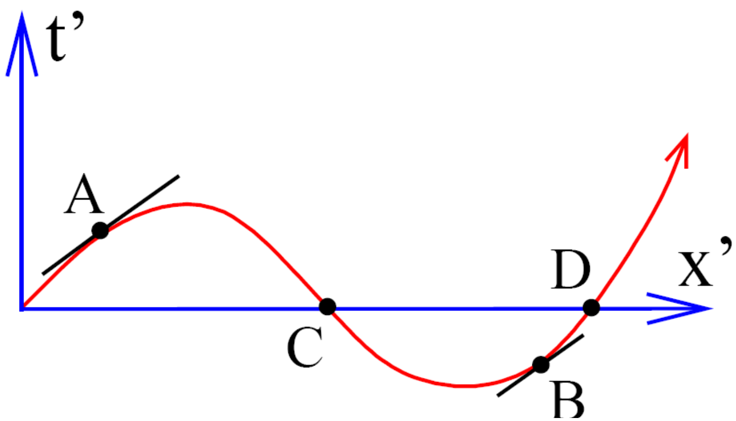


Tegyük fel, hogy
A és B között $V > c$



Létezik olyan K' koordinátarendszer, amelynek x' tengelye többször metszi a világvonalat

Rajzoljuk le K'-ben!



Az űrhajó visszafordult az időben
a C és D között a múltban járt!

K-ban: c-nél gyorsabb a mozgás
K'-ben: időgép ⟶ kauzalitás-sértés
nagymamama …

Időgép nincs ⟶ nincs c-nél gyorsabb utazás

Kérdés: van-e az elektronnak „nagymamája”?

Kinematikai újdonságok összefoglalása:

- A relativitás elve univerzális
- A fény sebessége minden inerciarendszerben ugyanaz

a t és x koordináták újfajta transzformációja: Lorentz-transzformáció

a Galilei-féle helyett új, Lorentz-féle szimmetriacsoport

Furcsa, mert az idő is transzformálódik ⟷ Newtoni abszolút idő

- az egyidejűség relativitása
- időlelassulás
- Lorentz-kontrakció
- ikerparadoxon
- Einstein-fele sebességösszeadás

A tér és idő egysége:

matematikailag egyetlen mennyiség

t önmagában nem határozza meg t'-t!

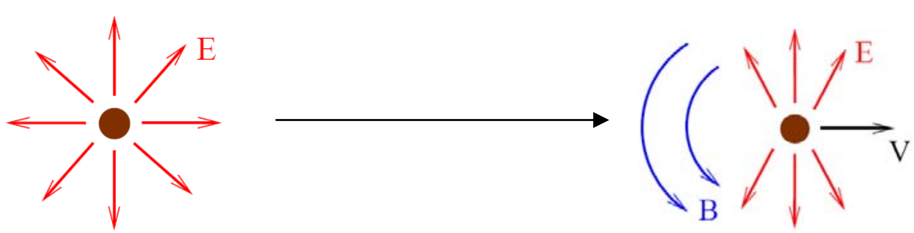
Csak x és t együtt!

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

Más mennyiségek is hasonlóan viselkednek:

pl.: az elektromos és mágneses mező:

(E,B) egyetlen mennyiséget alkot ⟶ ***(E',B')*** transzformációs szabály



ugyanaz a fizikai szituáció

a mennyiségek más vetületével leírva!