Optika és Relativitáselmélet

II. BsC fizikus hallgatóknak

12.

Bevezetés a speciális relativitáselméletbe

II.

Relativisztikus fizika

Cserti József, jegyzet, ELTE, 2007 (Dávid Gyula jegyzete alapján).

A relativisztikus fizika programja:

- Keressük meg az új szimmetriacsoportnak megfelelően transzformálódó mennyiségeket!
- Alkossunk belőlük kovariáns fizikai törvényeket: minden KR-ben ugyanolyan alakúak maradnak
- Soroljuk be az ismert fizikai mennyiségeket a transzformációs kategóriákba!
- Írjuk át az ismert fizikai törvényeket Lorentz-kovariáns alakra!

megy
OK
(pl.: elektrodinamika:
nincs „nemrelativisztikus
elektrodinamika”)

nem megy
(baj van)

Változtassuk meg a
fizikai törvényeket,
mert a régi törvények
hibásak

A relativitáselmélet
téves

newtoni mechanika

relativisztikus mechanika

DÖNT: a kísérlet

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Mai fizika 6.* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1970)

Lorentz-transzformáció több dimenzióban:

Invariáns: $c^2\Delta t^2 - \Delta\mathbf{r}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$

tér-idő-négyesvektor: $(x) = \begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow (x') = \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{L}(\mathbf{V}) \begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\mathbf{V} = c\,\mathbf{n}\,\mathrm{th}\chi$

egységvektor

rapiditás

Négyesvektor az, ami ugyanúgy transzformálódik:

$$(v) = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rightarrow (v') = \begin{pmatrix} v_0' \\ v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \mathbf{L}(\mathbf{V}) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Négyes skaláris szorzat:

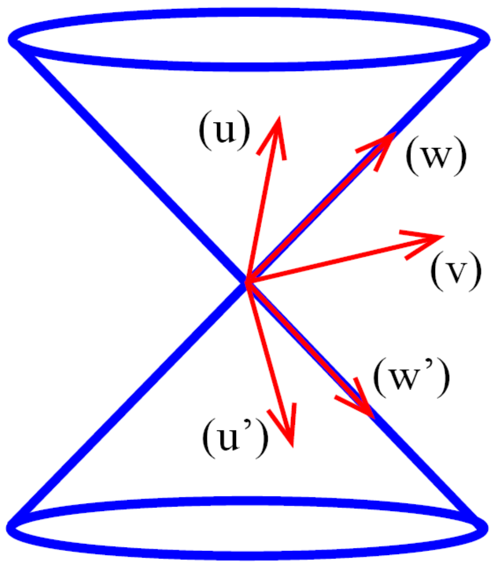
$(a) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ és $(b) = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{definíció}}$ $\boxed{(ab) \stackrel{\text{def}}{=} a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3}$

Miért jó ez? $(aa) = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$

Legyen $(x) = \begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ $(xx) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ ez az, ami invariánsnak akarunk hagyni

Két négyesvektor skaláris szorzata skalár, azaz invariáns (a Lorentz-transzformációra nézve)

Négyesvektorok és kauzalitás:



$$(uu) > 0 : (u) \text{ időszerű vektor}$$
$$(vv) < 0 : (v) \text{ térszerű vektor}$$
$$(ww) = 0 : (w) \text{ fényszerű vektor (önmagára ortogonális)}$$
$$(u') \; : \text{ időszerű, de a múltba orientált vektor}$$
$$(u) \; : \text{ időszerű, de a jövőbe orientált vektor}$$
$$(w') \; : \text{ fényszerű, de a múltba orientált vektor}$$
$$(w) \; : \text{ fényszerű, de a jövőbe orientált vektor}$$

Ezeket a kategóriákat a Lorentz-transzformációk nem keverik, mert

(uv) : skalár, tehát Lorentz-invariáns

Hol láttunk már négyes skaláris szorzatot?

$$(ab) = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

Igen, az optikában!

Síkhullám: $e^{i\Phi} = e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = e^{-i(\omega t - k_1 x - k_2 y - k_3 z)} = e^{-i\left(\frac{\omega}{c} ct - k_1 x - k_2 y - k_3 z\right)}$

Φ a hullám fázisa. Egy adott pontban a hullám épp tetőzik: ez egy objektív esemény, minden megfigyelő ugyanúgy látja

$\Downarrow$

a hullám fázisa Lorentz-skalár

De $(x) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ négyesvektor $\longrightarrow$ amivel szorzunk, az is!

Definíció: $\boxed{(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}}$ négyes hullámszám-vektor

Hogy transzformálódik a (k) - vektor? (1+1) dimenzióban

ugyanúgy, mint az (x) négyesvektor: $(k) \rightarrow (k') = \begin{pmatrix} \omega'/c \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & -\mathrm{sh}\chi \\ -\mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k \end{pmatrix}$

azaz: $\frac{\omega'}{c} = \frac{\omega}{c}\mathrm{ch}\chi - k \cdot \mathrm{sh}\chi$ emlékeztető: $\boxed{\frac{V}{c} = \mathrm{th}\chi}$

másképpen: $\omega' = \omega\,\mathrm{ch}\chi - c \cdot k \cdot \mathrm{sh}\chi = \mathrm{ch}\chi\,(\omega - c \cdot k \cdot \mathrm{th}\chi) = \mathrm{ch}\chi\,(\omega - Vk) = \frac{\omega - Vk}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

Ez a relativisztikus Doppler-effektus képlete

Vigyázat: ω önmagában nem határozza meg ω' –t, csak a *k*-val együtt!

De fennáll az $\omega = \omega(k)$ diszperziós reláció is!

Speciálisan fényre: $\omega = c\,k \rightarrow k = \frac{\omega}{c}$

Ekkor $\boxed{\omega' =} \frac{\omega - Vk}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\omega - \frac{V}{c}\omega}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \omega \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \boxed{\omega \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} = \omega\, e^{-\chi}}$

Emlékeztető: nemrelativisztikus Doppler-effektus (távolodás esetén)

mozgó forrás – álló detektor $\omega' = \frac{\omega_0}{1 + \frac{V}{c}}$

álló forrás – mozgó detektor $\omega' = \omega_0 \left(1 - \frac{V}{c}\right)$

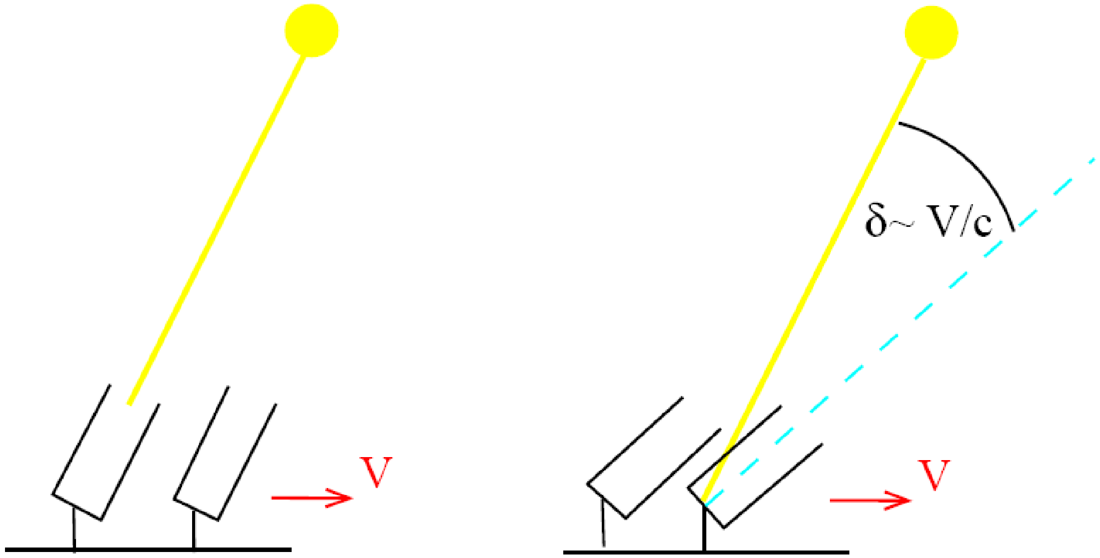
Relativisztikus Doppler-effektus: mértani közép $\boxed{\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} = \omega\, e^{-\chi}}$

Abberáció: (lásd 1 fejezet 5. oldal)

$\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ A fény iránya megváltozik, ez az aberráció jelensége

$\frac{V}{c}$ pontossággal régóta ismert (Bradley, 1728)

A relativisztikus korrekciók $\frac{V^2}{c^2}$ nagyságrendűek.



Optika – mechanika analógia:

$$\omega \sim E \qquad (k) = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$$ négyesvektor $\Longrightarrow$ $$\boxed{(p) = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}}$$ négyesimpulzus:
$$\mathbf{k} \sim \mathbf{p}$$ ez is négyesvektor

Hogy transzformálódik? Mint (x)!

$$(p) \to (p') = \begin{pmatrix} E'/c \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\chi & -\mathrm{sh}\chi \\ -\mathrm{sh}\chi & \mathrm{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{E'}{c} = \frac{E'}{c}\,\mathrm{ch}\chi - p\,\mathrm{sh}\chi$$

másképpen: $E' = E\,\mathrm{ch}\chi - c \cdot p \cdot \mathrm{sh}\chi = \mathrm{ch}\chi\,(E - c \cdot p \cdot \mathrm{th}\chi) = \mathrm{ch}\chi\,(E - pV) = \dfrac{E - pV}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

Így változik egy rendszer energiája Lorentz-transzformáció során.
Önmagában E nem határozza meg E'-t, csak p-vel együtt.
De egy adott rendszerre ismert az $E = H(p)$ összefüggés (Hamilton-függvény)

$\longrightarrow$ E'(E) számolható.

Négyesimpulzus abszolút értéke:

$(p) = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$ négyesimpulzus $\boxed{(pp) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \overset{\text{def}}{=} M^2c^2}$ *M* egy tömegdimenziójú paraméter: skalár

Lorentz-transzformációkor *M* nem változik: $\begin{pmatrix} E/c \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E'/c \\ p' \end{pmatrix}$

De $M^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c'^2} - p'^2$

Speciális eset: K'-ben a rendszer „áll", impulzusa zérus: $(p') = \begin{pmatrix} E_0/c \\ 0 \end{pmatrix}$

Ekkor: $M^2c^2 = \begin{pmatrix} E_0/c \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0/c \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_0^2}{c^2} \Longrightarrow M = \frac{E_0}{c^2} \Longrightarrow \boxed{E_0 = Mc^2}$

Írjuk át K-ra: $(p) = \mathbf{L}(-\chi)(p')$, azaz $\begin{pmatrix} E/c \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\chi & \text{sh}\chi \\ \text{sh}\chi & \text{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0/c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\chi & \text{sh}\chi \\ \text{sh}\chi & \text{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Mc \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mc \cdot \text{ch}\chi \\ Mc \cdot \text{sh}\chi \end{pmatrix}$

Tehát mozgó KR-ben: $E = Mc^2 \cdot \text{ch}\chi = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

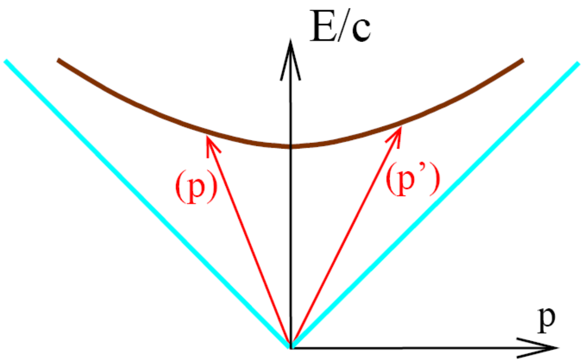
$$p = Mc \cdot \text{sh}\chi = M\text{ch}\chi \cdot c \cdot \text{th}\chi = \frac{MV}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Következmény:

$\boxed{p = \frac{E}{c^2} V}$

Egyesek ezért $\frac{E}{c^2}$-t nosztalgiából *m*-nek, mozgási tömegnek nevezik $\boxed{m(V) \overset{\text{def}}{=} \frac{E}{c^2} = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}$, aztán felfedezik, hogy $E = mc^2$ ☺

Tömeghéj:



$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \text{const.} = M^2c^2$$

ugyanaz a szituáció,
más inerciarendszerből:

$(E, p) \rightarrow (E', p')$ *M* állandó

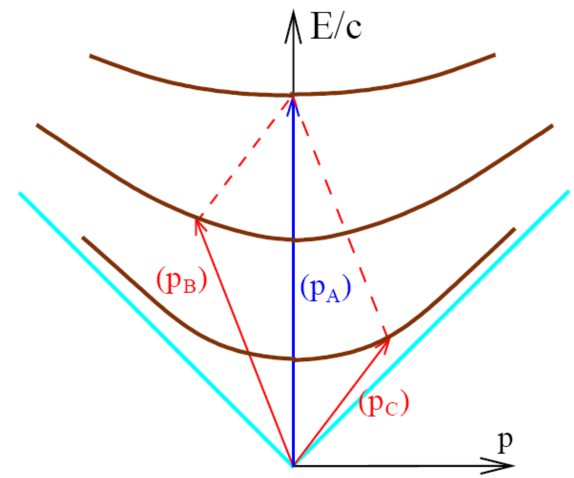
Bomlási jelenségek:

$$(p_A) = (p_B) + (p_C)$$

$A \rightarrow B + C$

$$E_A = E_B + E_C \qquad E_A = M_A c^2$$

$$p_A = 0 = p_B + p_C$$



De igaz külön:

$$\frac{E_B^2}{c^2} - p_B^2 = M_B^2 c^2$$

$$\frac{E_C^2}{c^2} - p_C^2 = M_C^2 c^2$$

adott M_A, M_B, M_C esetén p_B, p_C , ezzel V_B, V_C meghatározható

Vigyázat: $M_A \neq M_B + M_C$ nincs tömegmegmaradás! $M_B + M_C < M_A$ tömegdefektus

Négyessebesség:

Tudjuk: $(pp) = M^2 c^2$

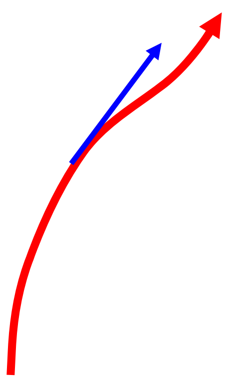
Definíció: négyessebesség

$$(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(p)}{M} = \begin{pmatrix} \frac{E/c}{M} \\ \frac{p}{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot \mathrm{ch}\chi \\ c \cdot \mathrm{sh}\chi \end{pmatrix}$$

$$u_0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\,\frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(x_0)$$

$$u_1 = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dt}{d\tau}\,\frac{dx}{dt} = \frac{d}{d\tau}(x_1)$$

$$\Longrightarrow \quad (uu) = \frac{(pp)}{M^2} = c^2$$



világvonal érintő egységvektora

$$\boxed{(u) = \frac{d}{d\tau}(x)}$$

Négyes Newton-törvény:

$$(pp) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = M^2c^2 \rightarrow \boxed{E = \sqrt{M^2c^4 + c^2p^2}}$$

$E(p)$ „diszperziós reláció”

Nemrelativisztikus közelítés: $|p| \ll Mc$

$$\boxed{E =} \sqrt{M^2c^4 + c^2p^2} = Mc^2\sqrt{1 + \frac{c^2p^2}{M^2c^4}} = Mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{M^2c^2}} \approx Mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{M^2c^2}\right) = \boxed{Mc^2 + \frac{p^2}{2M}}$$

Newton-törvény: $\boxed{(F) = \frac{d}{d\tau}(p)}$

(F) pl. egy külső erőtér hatása
A τ skalár időparaméter szerint kell deriválni!
Ekkor (F) is négyesvektor lesz.

Emlékeztető: $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$F_0 = \frac{d}{d\tau}p_0 = \frac{d}{d\tau}\frac{E}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{W/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$W = \frac{dE}{dt}$: teljesítmény

$$F_1 = \frac{d}{d\tau}p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{dp}{dt} = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

← hagyományos newtoni erő

Az ***F*** erőhatás megváltoztat(hat)ja a (*p*) négyesvektor hosszát, azaz az *M* nyugalmi tömeget is (Novobátzky Károly, Marx György, ELTE 1950):

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}M^2(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{E^2(\tau)}{c^4} - \frac{1}{c^2}p^2(\tau)\right) \neq 0}$$

Novobátzky-effektus