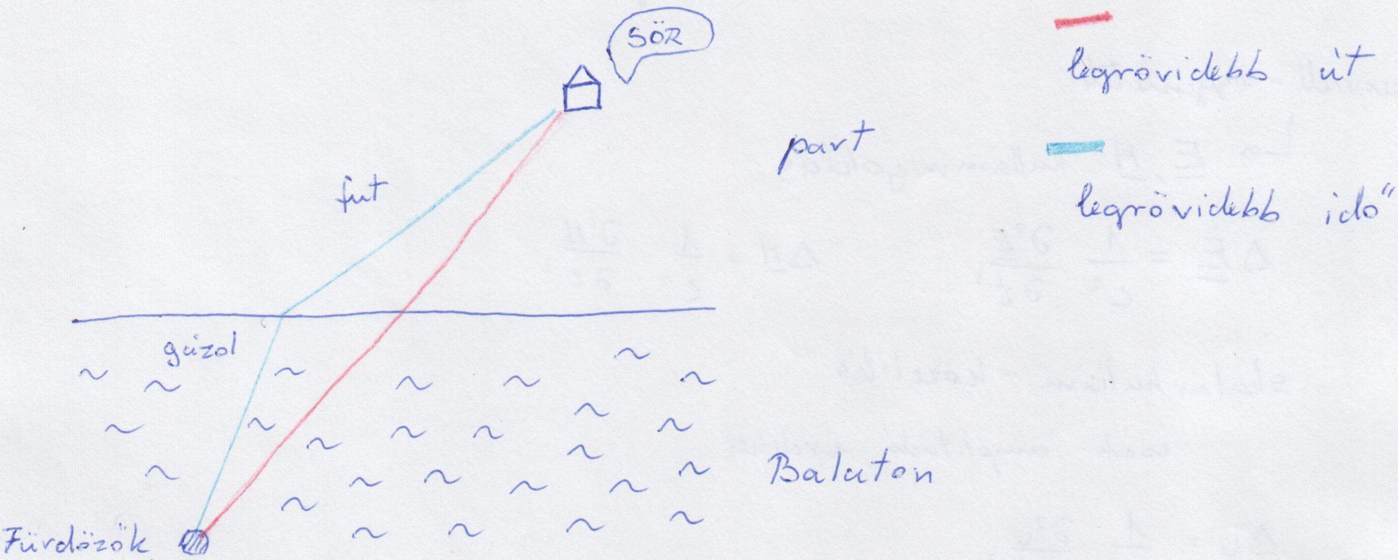
Bevezetés a modern optikába
I. gyakorlat

1. feladat

Fermat-elv $\Rightarrow$ Snellius-Descartes törvény

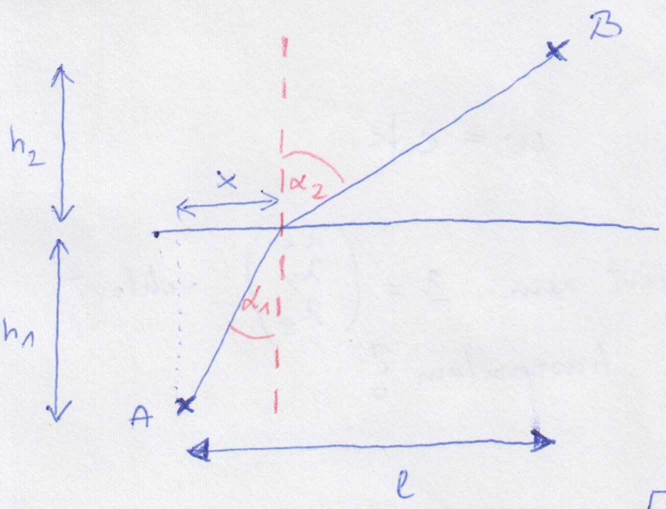


Fény olyan mint az okos fizikusok $\rightarrow$ legrövidebb időt

Fermat-elv

Fény azt az utat preferálja, melyhez szükséges <u>idő</u> extremális

Kvantitatívan



$$v_2 = \frac{c}{n_2}$$

$$v_1 = \frac{c}{n_1}$$

$$t(x) = t_1(x) + t_2(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{c/n_2}$$

$$t'(x) = 0$$

$$n_1 \frac{2x}{2\sqrt{h_1^2 + x^2}} + n_2 \frac{-2(l-x)}{2\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}} = \emptyset$$

$$n_1 \sin\alpha_1 - n_2 \sin\alpha_2 = \emptyset$$

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$ Snellius - Descartes törvény

2. feladat

Síkhullámok, gömbhullámok és hengerhullámok

Maxwell - egyenletek

↳ $\underline{E}, \underline{H}$ hullámmegoldás

$$\Delta \underline{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} \qquad \Delta \underline{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial t^2}$$

skalárhullám - közelítés

csak amplitúdó érdekel

$$\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

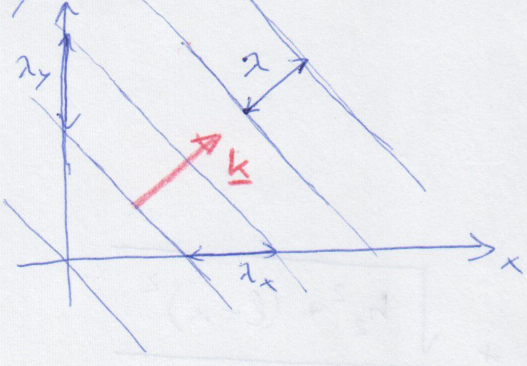
Síkhullám

$$u(\underline{r},t) = u_0\, e^{i(\underline{k}\underline{r}-\omega t)} \equiv u_0 \cos(\underline{k}\underline{r}-\omega t)$$

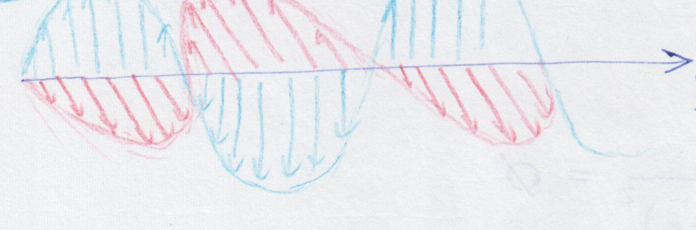
$\underline{k}$ haladási irány $\quad |\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

ω körfrekvencia $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

behelyettesítve a hullám-egyenletbe $\quad \omega = ck$



Miért nem $\underline{\lambda} = \begin{pmatrix}\lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z\end{pmatrix}$ vektort használom?



$\underline{E}$ és $\underline{H}$ merőleges

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Gömbhullám

$$\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ megoldhatjuk más koordinátarendszerben

kérdés, mikor van ennek fizikai értelme $\Rightarrow$ gömbsugárzó

$$\Delta u(r,\vartheta,\varphi) = -k^2 u(r,\vartheta,\varphi)$$ $e^{i\omega t}$ leválasztva

$$u(r,\vartheta,\varphi)\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \Delta$$

$$u(r,\vartheta,\varphi) \Rightarrow j_\ell(kr)\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$$

Bessel-függvény — Gömbi harmonikusok

Kereshetünk gömb szimmetrikus megoldást

$$u(r,\cancel{\vartheta},\cancel{\varphi})$$

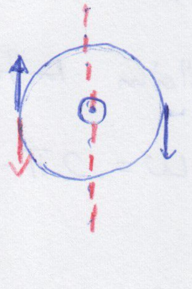
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)u(r) = -k^2 u(r) \qquad u(r) = \frac{e^{\pm ikr}}{r}$$

$$u(\underline{r},t) = \frac{e^{\pm ikr}}{r}\, e^{i\omega t}$$ intenzitás megmarad

Hogyan állnak a vektorok $\underline{E}$ és $\underline{H}$?

nincs teljesen radiális elektromágneses hullám

inkoherens — időátlagolva



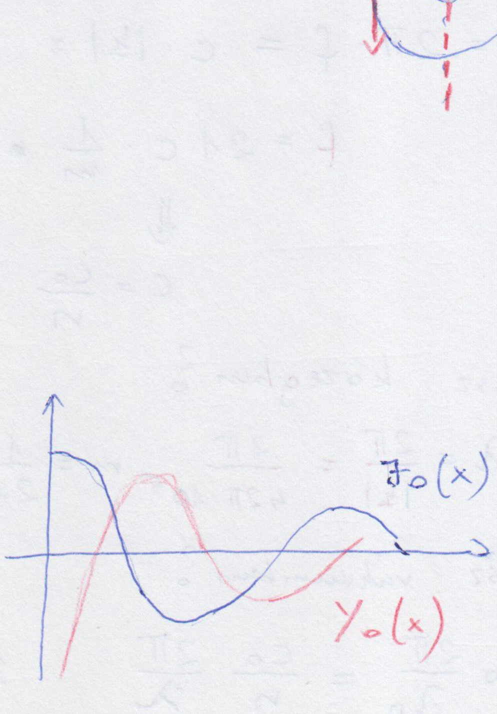
Hengerhullám

hengerszimmetrikus $u(r,\cancel{z},\cancel{\varphi})$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -k^2 u$$

$$u(r) = J_0(kr)$$

$$u(r) = Y_0(kr)$$



3. feladat

Ami mindig van a vizsga ZH-n.

$$\underline{E}(\underline{r},t) = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left[k(2x + ay - 6z) - \omega t\right]$$

$k = 6\pi \cdot 10^5 \frac{1}{m}$ $\qquad n = \frac{3}{2}$

Mekkora a értéke?

$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k}\underline{r} - \omega t) \qquad \underline{E}_0 \perp \underline{k}$

$$E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp k \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix}$$

skalaris szorzatuk nulla

$0 \cdot 2 + 2 \cdot a + 6 = 0 \qquad a = -3$

Hullám-számvektor iránya és nagysága?

$$\underline{k} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = k \cdot 7 \cdot \underbrace{\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}}_{\text{egységvektor} \Rightarrow \text{iránya}}$$

$|\underline{k}| = 7k = 42\pi \cdot 10^5 \frac{1}{m}$

Síkhullám ~~hulla~~ frekvenciája?

$\omega = 2\pi \cdot f = c \cdot |\underline{k}| = c \cdot 42\pi \cdot 10^5 \frac{1}{m}$

$f = 21 c \cdot \frac{1}{m} \cdot 10^5 = 21 \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{\frac{3}{2}} \cdot 10^5 \, Hz = 420 \, THz$

$\Downarrow$

$c = \frac{c_0}{n}$

Hullámhossz közegben?

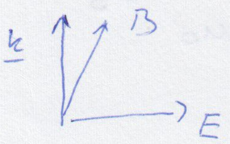
$\lambda = \frac{2\pi}{|\underline{k}|} = \frac{2\pi}{42\pi \cdot 10^5} m = \frac{1}{21} \cdot 10^{-5} m = 476 \, nm$

Hullámhossz vákuumban?

$\omega = c_0 \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{c_0}{n} \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \lambda_0 = n\lambda = \frac{3}{2} \, 476 \, nm = 714 \, nm$

$\underline{B}$ iránya?

$\underline{E}\times\underline{B}$ az $\underline{k}$ irányú



$-(\underline{E}\times\underline{k})$ éppen $\underline{B}$ irányú

$$-\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-15\\-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\2\\4\end{pmatrix}$$ éppen $\underline{B}$ iránya

4. feladat

$\underline{k}$ iránya $(1,1,0)$

síkhullám, legnagyobb térerősség E_0

Mekkora az $x-z$ síkban fekvő felületre eső fény időátlagolt intenzitása?

~~Potyn~~ Pot

Poynting-vektor

$$\underline{S} = \underline{E}\times\underline{H}$$

adott helyen $\underline{E} = \underline{E}_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

$\underline{H} = \underline{H}_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

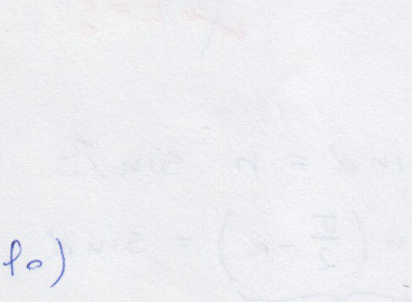
$$|\underline{S}| = |\underline{E}_0|\cdot|\underline{H}_0| \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0$$

$P = \underline{S}\,\underline{A}$ teljesítmény

$P = |\underline{S}|\,|\underline{A}|\cdot\cos 45^\circ$



Intenzitás

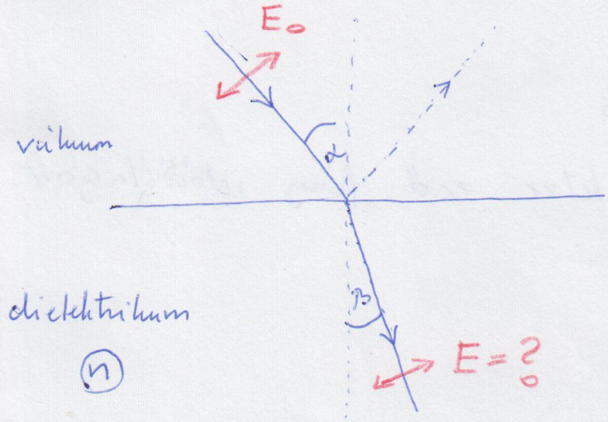
$$I = \frac{P}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\underline{S}|$$

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \; E_0^{\,2} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\langle I(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \; E_0^{\,2} \underbrace{\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \; E_0^{\,2}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \, \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}$$

<u>5. feladat</u>



Nincs visszavert sugár

TM módus

$\alpha + \beta = 90°$

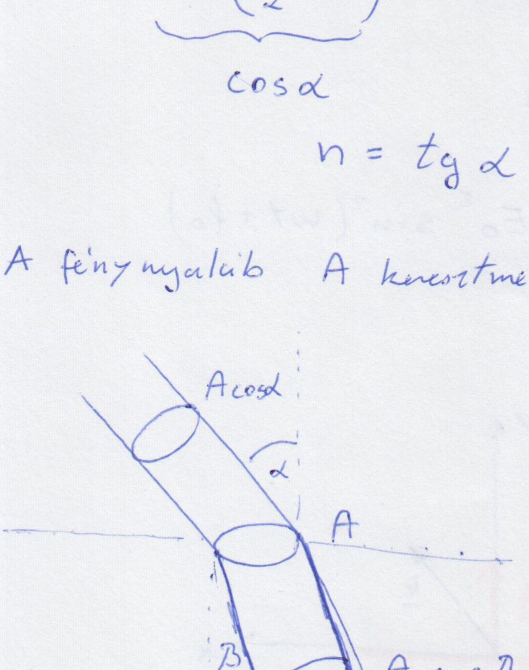
visszavert sugár éppen merőleges lenne az áthaladóra

$$\sin\alpha = n \cdot \sin\beta$$

$$n \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{\cos\alpha} = \sin\alpha$$

$$n = \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{Brewster szög}$$

A fénynyaláb A keresztmetszetű foltot hoz létre a határfelületen



$$I_0 A \cos\alpha = I \cdot A \cdot \cos\beta$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\sim E_0^{\,2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \qquad \sim E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0}}$$

$$E_0^{\,2} \cos\alpha = E^2 \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \cos\beta$$

$$E_0^{\,2} = E^2 n \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = E^2 n^2$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{n}$$

$$E_0 = E n \qquad E = \frac{E_0}{n}$$