Diffrakció I.

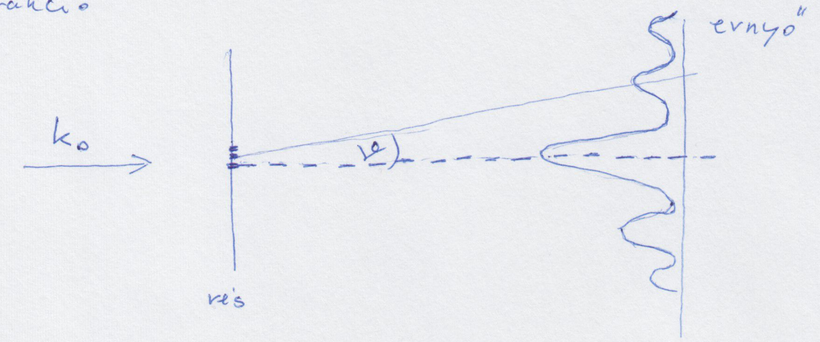
Gyakorlaton

Fraunhofer-diffrakció (réstől távol és ferdén) $\perp$ beesés

I. gyakorlaton: rések (egyik irányban eltolás invariánsok)

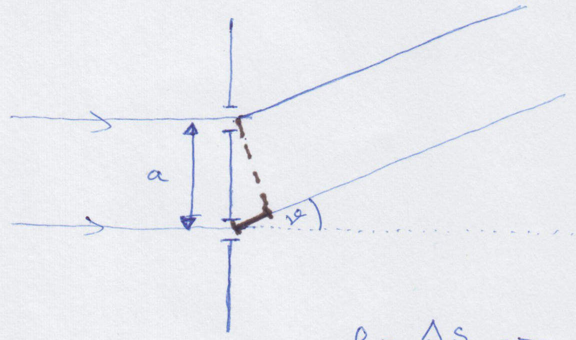
II. gyakorlaton: kör alakú apertúra

Diffrakció



intenzitás $I(\vartheta) = ?$

(1) Két keskeny rés diffrakciós képe (vastagsága $\ll \lambda, a$)



Amplitúdó az ernyőn

$$u_0 + u_0 e^{i\varphi}$$

Alsó több utat tett meg

$$\Delta s = a \cdot \sin\vartheta$$

$$\varphi = \frac{\Delta s}{\lambda} 2\pi = k\Delta s = k \cdot a \cdot \sin\vartheta$$

Amplitúdó

$$u(\vartheta) = u_0 (1 + e^{i\varphi})$$

$\Longrightarrow$ Intenzitás

$$I(\vartheta) = |u(\vartheta)|^2 = |u_0|^2 \cdot (1 + e^{i\varphi})(1 + e^{-i\varphi})$$

Intenzitás eloszlás az ernyőn

$$I(\vartheta) = 2|u_0|^2 (1 + \cos\varphi) = 2 I_{1\text{rés}} (1 + \cos(ka\sin\vartheta))$$

$\Rightarrow$ maximum

$4 I_{1\text{rés}}$

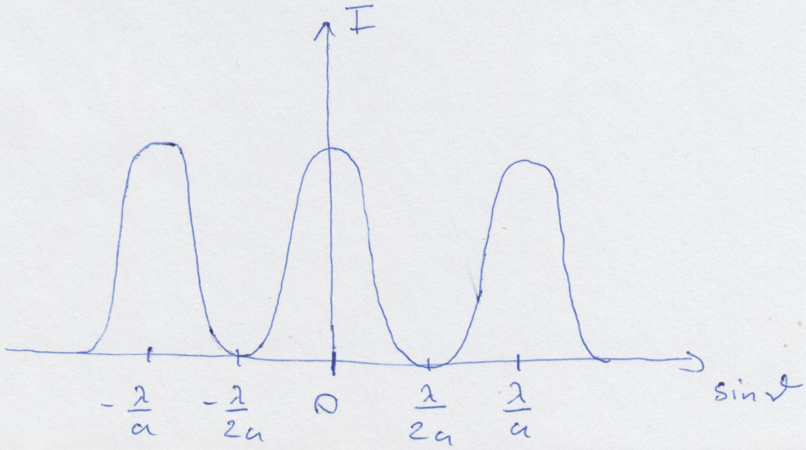
$ka\sin\vartheta = 2\pi \cdot \text{egész}$

$\sin\vartheta = \frac{\lambda}{a} \cdot \text{egész}$

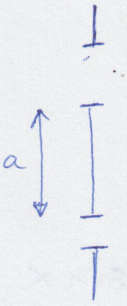
$\Rightarrow$ minimum (nulla)

$ka\sin\vartheta = \pi + 2\pi \cdot \text{egész}$

$\sin\vartheta = \frac{\lambda}{a}\left(\frac{1}{2} + \text{egész}\right)$



(2) Hogyan néz ki az előző diffrakciós kép, ha az egyik rés 2× olyan széles, mint a másik? (még mindig keskeny rések)



$$U(\vartheta) = U_0 + 2U_0 e^{i\varphi}$$

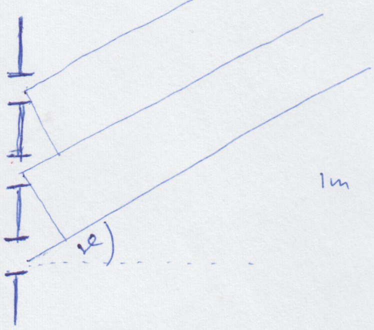
$$I(\vartheta) = \left(U_0 + 2U_0 e^{i\varphi}\right)\left(U_0^* + 2U_0^* e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= |U_0|^2 \left(1 + 4 + 2e^{i\varphi} + 2e^{-i\varphi}\right) = |U_0|^2 \left(5 + 4\cos\varphi\right)$$

nem lesz teljes kioltás $\Rightarrow$ maximum $9|U_0|^2$

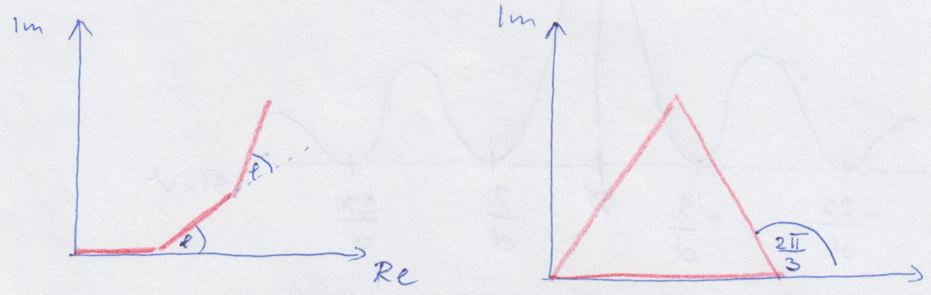
$\Rightarrow$ minimum $|U_0|^2$ hely változatlan

(3) Hol lesz teljes kioltás, ha három egyforma résünk van azonos távolságokra?



$$U(\vartheta) = U_0 + U_0 e^{i\varphi} + U_0 e^{2i\varphi} =$$

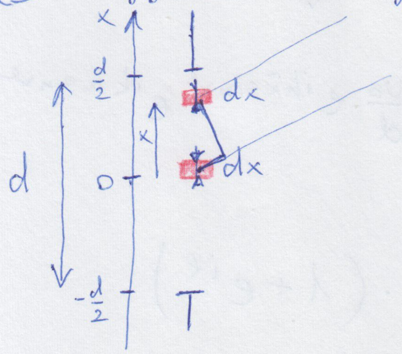
$$U_0 \left(1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi}\right)$$



$$\varphi = k \cdot a \cdot \sin\vartheta = \frac{2\pi}{3} \qquad \sin\vartheta = \frac{\lambda}{3a} \qquad \text{I. kioltás}$$

Hogyan változik 0. rendű maximum intenzitása, ha két rést letakarok?

(4) Egyetlen vastag rés diffrakciós képe



$$dU(\vartheta) = \frac{U_0}{d}\, dx\, e^{ikx\sin\vartheta}$$

$$U(\vartheta) = \frac{U_0}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx\, e^{ikx\sin\vartheta} = \frac{U_0}{d} \left[\frac{e^{ikx\sin\vartheta}}{ik\sin\vartheta}\right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} =$$

$$= \frac{U_0}{d} \, \frac{e^{ik\frac{d}{2}\sin\vartheta} - e^{-ik\frac{d}{2}\sin\vartheta}}{ik\sin\vartheta} = \frac{U_0}{k\frac{d}{2}\sin\vartheta} \sin\left[k\frac{d}{2}\sin\vartheta\right]$$

$$I(\vartheta) = |U_0|^2 \, \frac{\sin^2\left[k\frac{d}{2}\sin\vartheta\right]}{\left(k\frac{d}{2}\sin\vartheta\right)^2}$$

minimumok helyei:

$$k\frac{d}{2}\sin\vartheta = \pi\cdot\text{egész} \qquad \sin\vartheta = \text{egész}\,\frac{\lambda}{d}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}$$

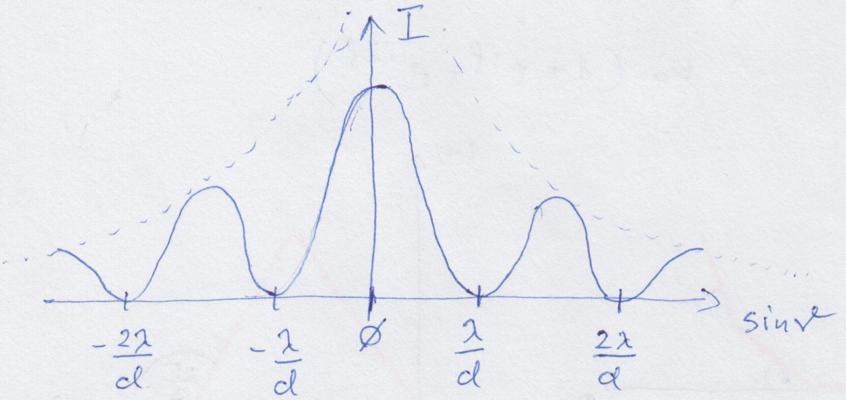
maximumok helyei

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = 0 \qquad \frac{\cos x\cdot x - \sin x}{x^2} = 0 \qquad \cos x\cdot x = \sin x$$

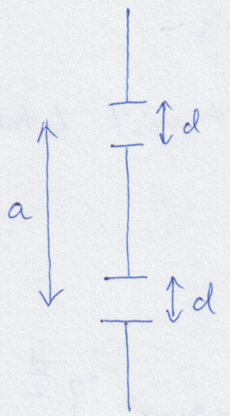
$$x = \operatorname{tg} x$$

$$k\frac{d}{2}\sin\vartheta = \operatorname{tg}\left[k\cdot\frac{d}{2}\sin\vartheta\right]$$

analitikusan csak a $\vartheta = 0$-hoz tartozó maximum adható meg



⑤ Két vastag rés diffrakciós képe

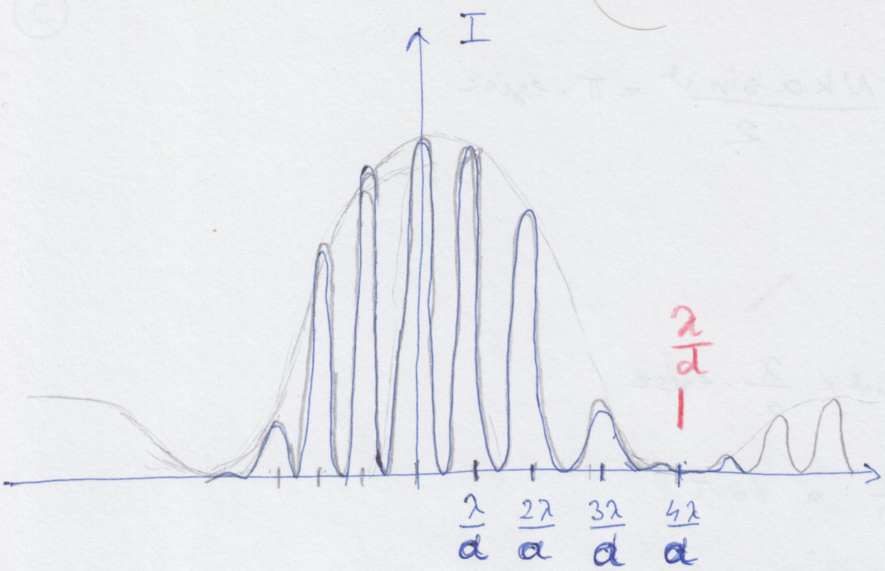


$$U(\vartheta) = \int_{-\frac{d}{2}}^{d/2} dx\,\frac{U_0}{d}\,e^{ikx\sin\vartheta} + \underbrace{\int_{-\frac{d}{2}+a}^{\frac{d}{2}+a} dx\,\frac{U_0}{d}\,e^{ikx\sin\vartheta}}_{x=\tilde{x}+a}$$

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{d/2} d\tilde{x}\,\frac{U_0}{d}\,e^{ik\tilde{x}\sin\vartheta}\,e^{ika\sin\vartheta}$$

$$U(\vartheta) = U_{1\text{rés}}(\vartheta) + e^{ika\sin\vartheta}\,U_{1\text{rés}}(\vartheta) = U_{1\text{rés}}\cdot\left(1+e^{i\varphi}\right)$$

$$I(\vartheta) = I_{1\text{rés}}(\vartheta)\cdot 2\left(1+\cos\varphi\right) \qquad \varphi = ka\sin\vartheta$$



Az előző ábrán

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}\cdot 4 \qquad \cancel{d=4a} \qquad a = 4d$$

⑥ Optikai rács képe

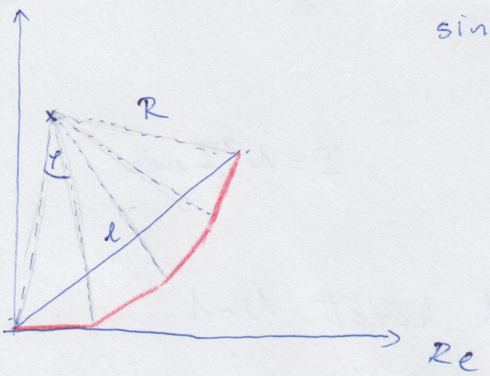
N rés egymástól a távolságra

$$U(\varphi) = U_{1rés}(\varphi) + U_{1rés}(\varphi)\, e^{i\varphi} + U_{1rés}(\varphi)\, e^{2i\varphi} + \dots$$

$$\dots + U_{1rés}(\varphi)\, e^{i(N-1)\varphi} =$$

$$= U_{1rés}(\varphi) \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\varphi} =$$

geometriát használok az összegzéshez



$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1/2}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\sin\frac{N\varphi}{2} = \frac{\ell/2}{R} = \frac{\ell}{2R}$$

$$\ell = 2R\sin\frac{N\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$U(\varphi) = U_{1rés}(\varphi)\,\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\, e^{i\alpha} \Rightarrow I(\varphi) = I_{1rés}(\varphi)\,\frac{\sin^2\frac{N\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

számláló nulla

$$\frac{N f}{2} = \pi \cdot \text{egész} \qquad \frac{N k a \sin\vartheta}{2} = \pi \cdot \text{egész}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\lambda}{Na} \cdot \text{egész}$$

nevező nulla

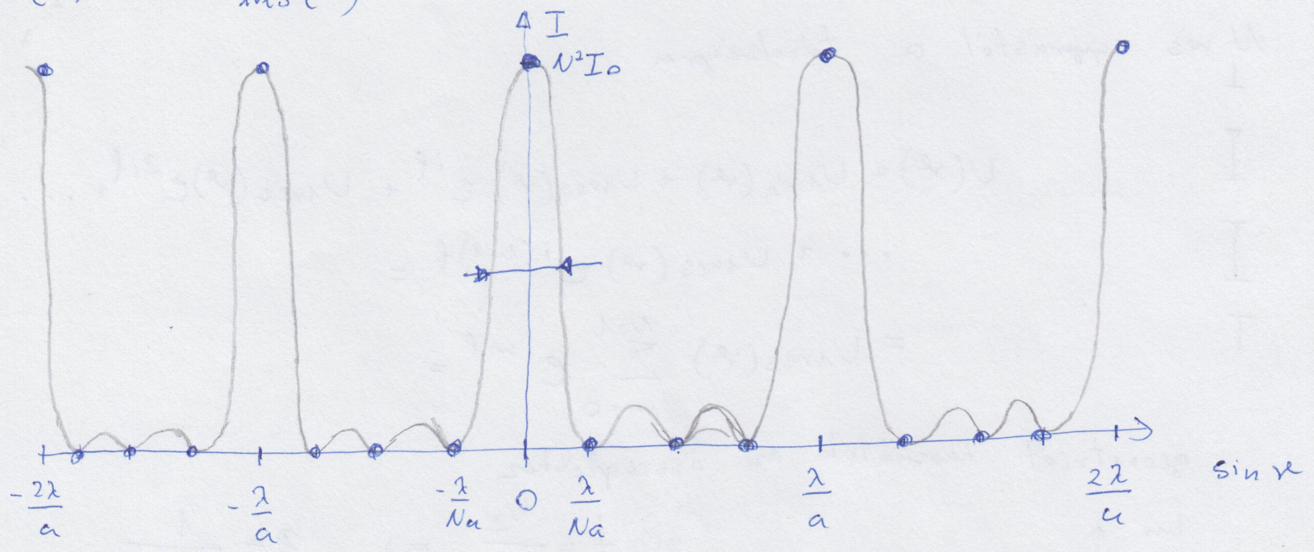
$$\frac{f}{2} = \pi \cdot \text{egész} \qquad \sin\vartheta = \frac{\lambda}{a} \cdot \text{egész}$$

Ha $\sin\vartheta = \frac{\lambda}{a} \cdot \text{egész}$ $\quad \frac{0}{0}$ a tört

$$U(\vartheta) = U_{1rés}(\vartheta) \sum_{m=0}^{N-1} e^{im(2\pi \cdot \text{egész})} = N \cdot U_{1rés}(\vartheta)$$

mind fázisban erősíti egymást

$$I(\vartheta) = N^2 I_{1rés}(\vartheta)$$



Tulajdonságok

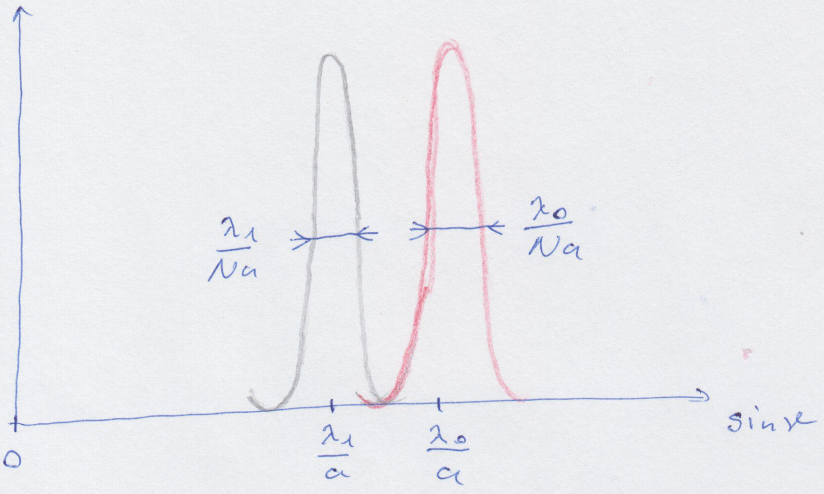
- Főerősítések $\quad \sin\vartheta = \frac{\lambda}{a} \cdot \text{egész} \qquad I = N^2 I_{1rés}$
- Mellékmaximumok $\quad N-2$
- Minimumhelyek a fő maximumok között $N-1$
- Főmaximum félértékszélessége $\quad \frac{\lambda}{Na}$

⑦ Nátriumlámpa két spektrumvonala

$\lambda_0 = 590{,}0\,nm$

$\lambda_1 = 589{,}6\,nm$

Hány vékony résből áll a rács, ha első rendben éppen csak fel tudjuk bontani a két spektrumvonalat?



Éppen fel tudom bontani

csúcsok távolsága = félértékszélességgel

$$\frac{\lambda_0}{a} - \frac{\lambda_1}{a} \simeq \frac{\lambda_0}{Na}$$

$$\lambda_0 - \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{N} \Rightarrow N = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1} = \frac{590\,nm}{0{,}4\,nm} = 1475 \simeq 1500$$