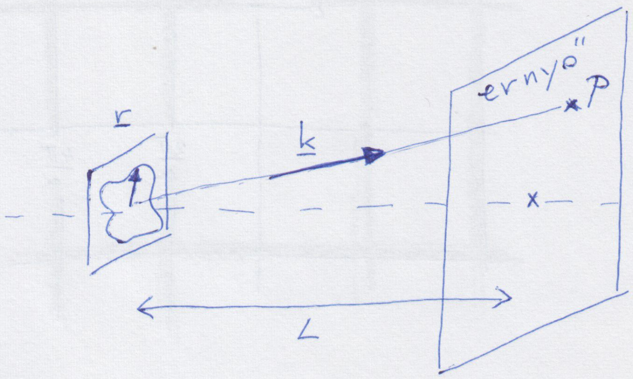
Diffrakció II

Fraunhofer-diffrakció



$$U(P) = A \int d^2 r \; u(\underline{r}) \, e^{-i \underline{k}\,\underline{r}}$$

apertúra

Fourier-traszformáció

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u(\underline{r}) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{ahol átenged az apertúra} \\ 0 & \text{ahol nem} \end{cases}$$

$\underline{k}$ jellemzi a P pontot

$\dfrac{\underline{k}}{\frac{2\pi}{\lambda}}$ egységvektor, mely a P pont irányába mutat

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ q \\ k_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}} \begin{pmatrix} p \\ q \\ k_z \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ L \end{pmatrix} \simeq L \begin{pmatrix} \frac{x_P}{L} \\ \frac{y_P}{L} \\ 1 \end{pmatrix}$$

kis szögek

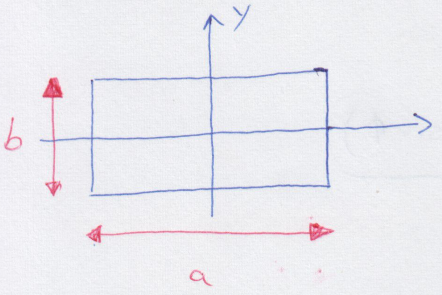
$$x_P = \frac{p}{\frac{2\pi}{\lambda}} \cdot L \qquad y_P = \frac{q}{\frac{2\pi}{\lambda}} \cdot L$$

Egyszerűség kedvéért diffrakciós képet

p és q segítségével adom meg!

1

Téglalap alakú lyuk diffrakciós képe



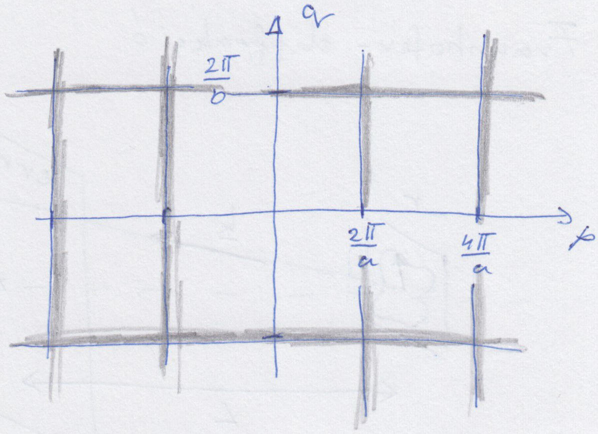
$$U(p,q) = A \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \; e^{-ipx} e^{-iqy} =$$

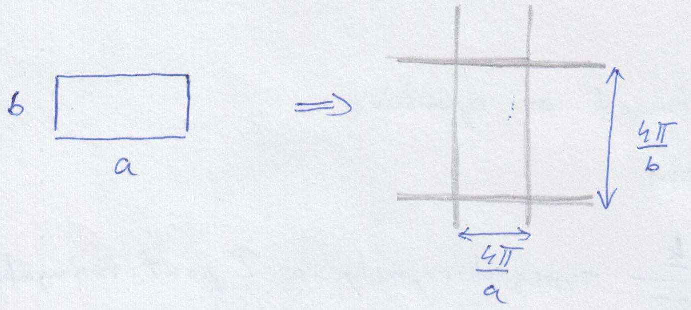
$$= A \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \, e^{-ipx} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \, e^{-iqy}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \, e^{-ipx} = \left[\frac{e^{-ipx}}{-ip} \right]_{-\frac{a}{2}}^{a/2} = \frac{e^{-ip\frac{a}{2}} - e^{ip\frac{a}{2}}}{-ip} = \frac{2}{p} \sin \frac{pa}{2}$$

$$U(p,q) = A\,\frac{2}{p}\,\sin\frac{pa}{2}\cdot\frac{2}{q}\,\sin\frac{qb}{2}$$

$$I(p,q) = I_0\,\frac{\sin^2\frac{pa}{2}}{\left(\frac{pa}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{qb}{2}}{\left(\frac{qb}{2}\right)^2}$$

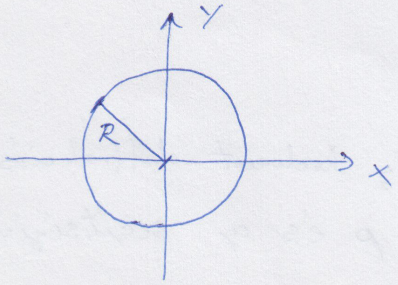




Mi történik, ha az apertúrát megnyújtom valamelyik irányba?

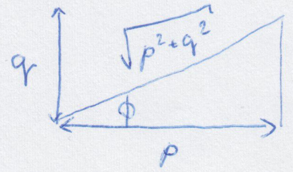
② Kör alakú rés képe

$$x = r\cdot\cos\alpha$$
$$y = r\cdot\sin\alpha$$



$$U(p,q) = A\cdot\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R dr\cdot r\cdot e^{-ir\cos\alpha\, p}\, e^{-ir\sin\alpha\, q} =$$

$$= A\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R dr\; r\; e^{-ir\sqrt{p^2+q^2}\underbrace{(\cos\alpha\cos\phi + \sin\alpha\sin\phi)}_{\cos(\alpha-\phi)}}$$



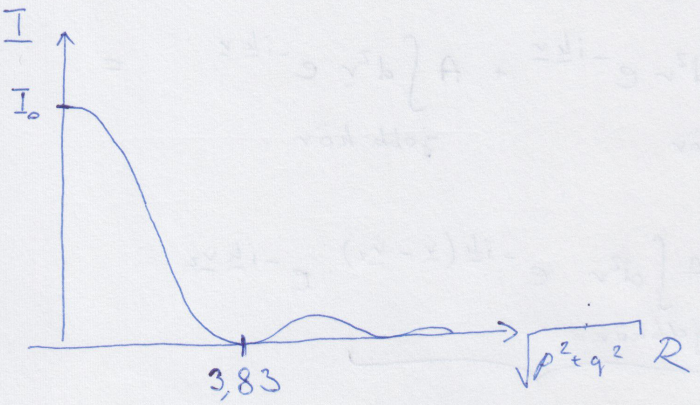
$$\tilde{\alpha} = \alpha - \phi$$

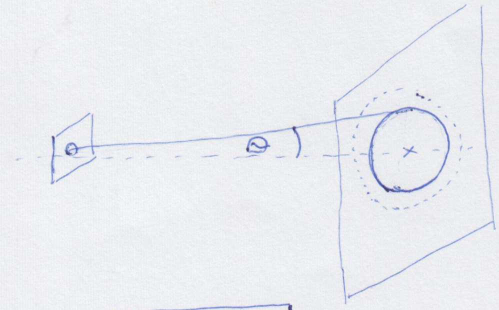
$$= A\int_0^{2\pi} d\tilde{\alpha} \int_0^R dr\cdot r\; e^{-ir\sqrt{p^2+q^2}\cos\tilde{\alpha}}$$

$$A\int_0^R dr\cdot r\cdot 2\pi\, J_0\left(r\sqrt{p^2+q^2}\right) = \frac{2\pi R A}{\sqrt{p^2+q^2}}\, J_1\left(\sqrt{p^2+q^2}\,R\right) \Rightarrow \text{intenzitás}$$

$$I(p,q) = I_0\left[\frac{2J_1\left(\sqrt{p^2+q^2}\,R\right)}{\sqrt{p^2+q^2}\,R}\right]^2$$

előadáson volt





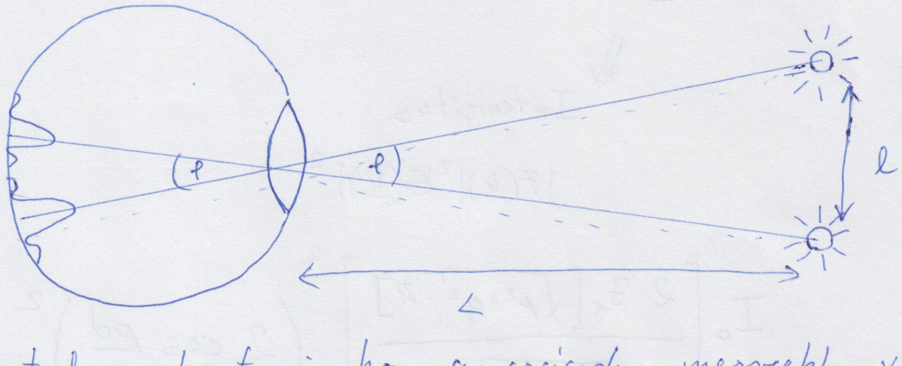
$$\sin\Theta = \frac{\frac{3,83}{R}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{3,83}{2\pi}\cdot 2\,\frac{\lambda}{D}$$

„átmérő”

$$\boxed{\sin\Theta = 1,22\,\frac{\lambda}{D}}$$

milyen szög alatt jelenik meg az első kioltás

③ Milyen távolról tudom felbontani egy autó két reflektorait?



Fel tudom bontani, ha a csúcsok messzebb vannak, mint a félértékszélesség

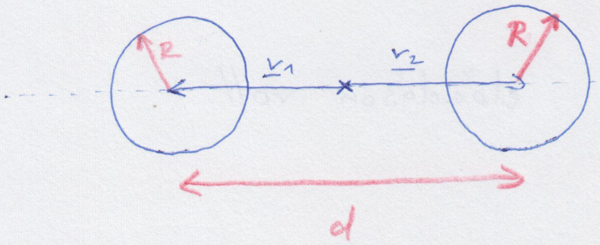
$$\varphi > 1,22\,\frac{\lambda}{D}$$

$$\frac{l}{L} > 1,22\,\frac{\lambda}{D}$$

$$L < \frac{lD}{1,22\lambda} = \frac{1,5\,\mathrm{m}\cdot 3\,\mathrm{mm}}{1,22\cdot 500\,\mathrm{nm}} \simeq 7\,\mathrm{km}$$

④ Két köralakú rés képe

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$U(P) = A \int d^2r \; u(\underline{r})\, e^{-i\underline{k}\underline{r}} = A \underbrace{\int}_{\text{bal kör}} d^2r\, e^{-i\underline{k}\underline{r}} + A \underbrace{\int}_{\text{jobb kör}} d^2\underline{r}\, e^{-i\underline{k}\underline{r}} =$$

$$\underbrace{A \int_{\text{bal kör}} d^2r \; e^{-i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}_1)}}_{U_{1kör}(P)} \; e^{-i\underline{k}\underline{r}_1} + \underbrace{A \int_{\text{jobbkör}} d^2r \; e^{-i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}_2)}}_{U_{1kör}(P)} \; e^{-i\underline{k}\underline{r}_2}$$

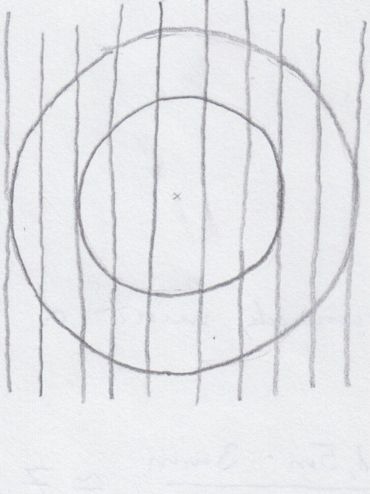
$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{alaktényező} \\ F(\underline{k})}}{U_{1kör}(P)} \underbrace{\left[e^{-i\underline{k}\underline{r}_1} + e^{-i\underline{k}\underline{r}_2} \right]}_{\substack{\text{szerkezeti tényező} \\ S(\underline{k})}}$$

Szerkezeti tényező

$$S(p,q) = e^{+ip\frac{d}{2}} + e^{-ip\frac{d}{2}} = 2\cos\frac{pd}{2}$$

Amplitúdó

$$\frac{2\pi R A}{\sqrt{p^2+q^2}} \, J_1\left[\sqrt{p^2+q^2}\, R\right] \cdot 2\cos\frac{pd}{2}$$



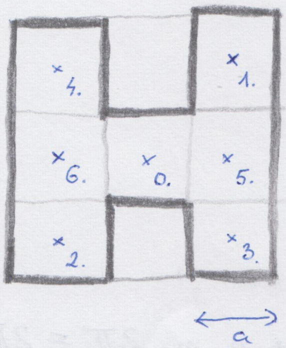
$\Downarrow$

Intenzitás

$$|F(\underline{k})|^2 |S(\underline{k})|^2$$

$$I_0 \left[\frac{2 J_1\left[\sqrt{p^2+q^2} \cdot R\right]}{\sqrt{p^2+q^2}\, R} \right]^2 \left(2\cos\frac{pd}{2} \right)^2$$

5 H-betű diffrakciós képe



$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = -\underline{r}_2 \qquad \underline{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_3 = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = -\underline{r}_4$$

$$\underline{r}_5 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\underline{r}_6$$

Alakitényező

$$F(p,q) = A \frac{2}{p} \sin\frac{pa}{2} \quad \frac{2}{q} \sin\frac{qa}{2}$$

Szerkezeti tényező

$$S(p,q) = \sum_i e^{-i\underline{k}\underline{r}_i} = 1 + e^{-ipa-iqa} + e^{ipa+iqa} + e^{-ipa+iqa} +$$

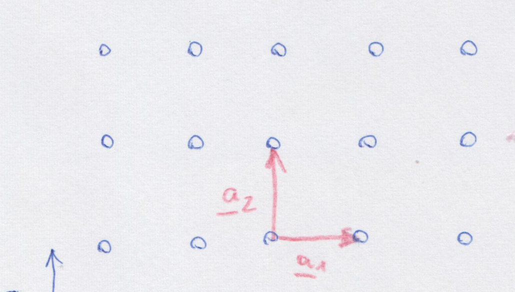
$$+ e^{ipa-iqa} + e^{-ipa} + e^{ipa} =$$

$$= 1 + 2\cos\big((p+q)a\big) + 2\cos\big((p-q)a\big) + 2\cos pa$$

Intenzitás

$$|F(p,q)|^2 \, |S(p,q)|^2$$

6 Négyzetrács diffrakciós képe



$$\underline{r}_n = n_1 \underline{a}_1 + n_2 \underline{a}_2$$

n_1, n_2 egész számok

szerkezeti tényező $\quad \sum_n e^{-i\underline{k}\underline{r}_n}$

mikor lesz maximális az intenzitás

$$\underline{k}\,\underline{r}_n = 2\pi \cdot \text{egész} \qquad \forall\, n_1 \text{ és } n_2$$

$\underline{k} = m_1 \underline{b}_1 + m_2 \underline{b}_2$ $\quad m_1$ és m_2 egészek

$\underline{a}_1 \underline{b}_1 = 2\pi$

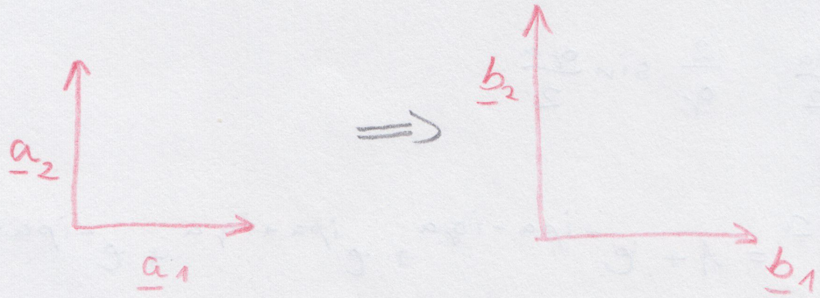
$\underline{a}_2 \underline{b}_2 = 2\pi$

$\underline{a}_1 \underline{b}_2 = \emptyset$

$\underline{a}_2 \underline{b}_1 = \emptyset$

$$\underline{a}_i \underline{b}_j = 2\pi \delta_{ij}$$

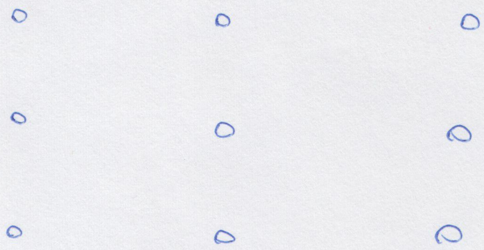
$$\underline{k}\,\underline{r} = (m_1 \underline{b}_1 + m_2 \underline{b}_2)(n_1 \underline{a}_1 + n_2 \underline{a}_2) = n_1 m_1 2\pi + n_2 m_2 2\pi = 2\pi \cdot \text{egész}$$



$$|\underline{b}_1| = |\underline{b}_2| = \frac{2\pi}{a}$$

Diffrakciós kép ugyanúgy négyzetrács.

(7) Téglalap diffrakciós képe



lineáris transzformáció, $\underline{\underline{A}}$

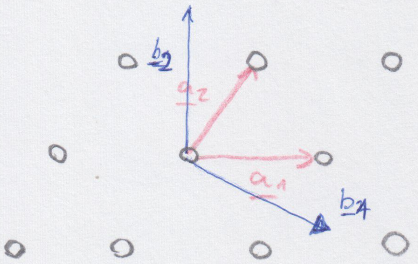
$$\underline{k}\,\underline{r} = \underline{k}\,\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{r} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^T \underline{k}\;\underline{\underline{A}}\,\underline{r}$$

megnyújtottam x irányba

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} z^{-1} & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{pmatrix}$$

diffrakciós képet x iránya össze kell nyomni

(8) Háromszögrács diffrakciós képe



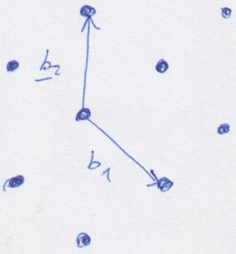
$\underline{a}_1 \underline{b}_1 = 2\pi$

$a \cdot |\underline{b}_1| \cdot \cos 30° = 2\pi$

$|\underline{b}_1| = \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\underline{a}_2 \underline{b}_1 = \emptyset$

merőlegesek egymásra



ugyanúgy háromszögrácsot kapok csak 90°-kal el lett forgatva.