Vékonyrétegek – interferencia

Vékonyréteg – vastagsága összemérhető a fény hullámhosszával

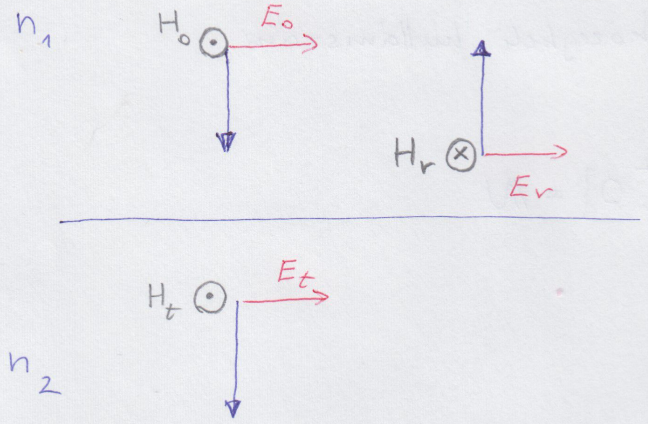
– pl.: olajfolt a vízen, bevonatok lencséken, szappanhártya

– jelenség („színesen" tükröződik)

Fizikai leírás – határfelület (reflexió + transzmisszió)

– szabad terjedés

① Reflexió és transzmisszió merőleges beesés esetén



Határfelület

$\underline{E}$ és $\underline{H}$ transzverzális komponensei folytonosan mennek át.

① $E_0 + E_r = E_t$

$H_0 - H_r = H_t$

② $H = \dfrac{n}{\sqrt{\mu_0}} E$

$n_1 E_0 - n_1 E_r = n_2 E_t$

$$n_1 E_0 - n_1 E_r = n_2 E_0 + n_2 E_r$$

$$(n_1 - n_2) E_0 = (n_1 + n_2) E_r$$

$$E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0 \qquad\qquad E_t = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} E_0$$

reflexiós amplitúdó r — transzmissziós amplitúdó t

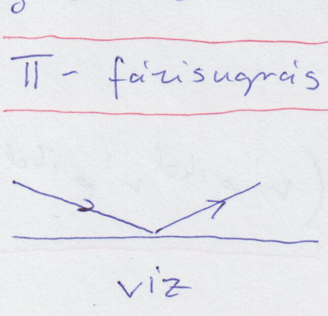
$r > 0 \quad n_1 > n_2$

$r < 0 \quad n_2 > n_1$

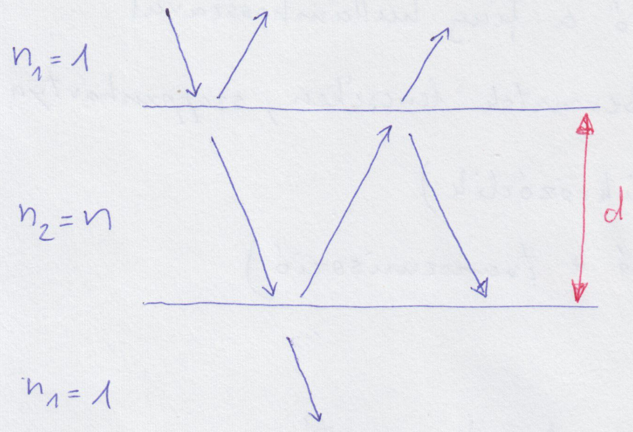
optikailag sűrűbb közegről történő visszaverődés esetén

$\boxed{\pi \text{ - fázisugrás}}$

pl.:



② Szappanhártya reflexiója



Mikor maximális a reflexió?

Visszavert sugarak azonos fázisban.

Első visszaverődés fázisa

$$\varphi_0 + \pi$$ ← fázisugrás

Második visszaverődés fázisa

$$\varphi_0 + kd + 0 + kd$$

nincs fázisugrás

közegbeli hullámszám

Azonos fázisban

$$\pi = 2kd + N 2\pi \qquad N \in \{\mathbb{Z}^+, 0\} = \mathbb{N}$$

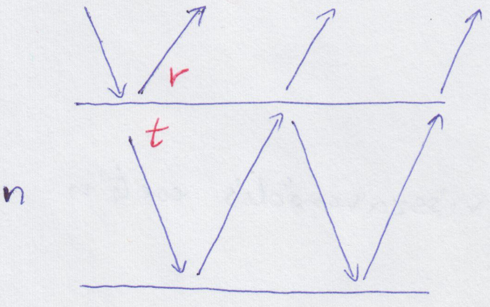
$$k = n \cdot k_{vac}$$

$$2 n k_{vac} d = (2N+1)\pi$$

$$2n \frac{2\pi}{\lambda_{vac}} d = (2N+1)\pi \qquad \lambda_{vac} = \frac{4nd}{2N+1}$$

Most csak az első két sugárt vizsgáltuk, de látjuk majd, hogy ez a feltétel általánosan is igaz

③ Maximális reflexió kiszámítása



$$\tilde{r} = r + t e^{ikd} r' e^{ikd} t' + t e^{ikd} r' e^{ikd} \underline{\left(r' e^{ikd} r' e^{ikd} \right)} t' +$$

ismerjük fel a mértani sorozatot

$$\tilde{r} = r + t r' t' e^{2ikd} \frac{1}{1 - r'^2 e^{2ikd}} = r + \frac{t r' t'}{e^{-2ikd} - r'^2}$$

mikor maximális $\tilde{r}$ abszolútértéke?

t, r', t' pozitív
r negatív $\Longrightarrow$ $e^{-2ikd} = -1$

$$2kd = \pi + N \cdot 2\pi$$

$$\tilde{r}_{max} = r - \frac{t r' t'}{1 + r'^2} =$$

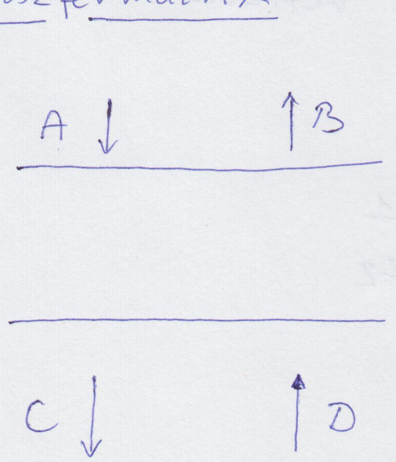
$$= \frac{1-n}{1+n} - \frac{\frac{2}{1+n} \frac{n-1}{1+n} \frac{2n}{1+n}}{1 + \frac{(n-1)^2}{(1+n)^2}} = \frac{1-n}{1+n} - \frac{4n(n-1)}{(1+n)\left[(1+n)^2 + (1-n)^2\right]}$$

$$= \frac{1-n}{1+n} - \frac{4n(n-1)}{(1+n)\, 2(1+n^2)} = \frac{1-n}{1+n}\left[1 + \frac{2n}{1+n^2}\right] =$$

$$= \frac{1-n}{1+n}\left[\frac{1+2n+n^2}{1+n^2}\right] = \frac{1-n}{1+n}\frac{(1+n)^2}{1+n^2} = \frac{1-n^2}{1+n^2}$$

amplitúdó $\Longrightarrow$ intenzitás $|\tilde{r}_{max}|^2$

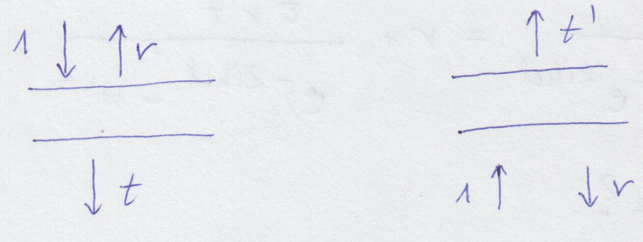
Transzfermátrix



$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

2×2
transzfermátrix

③ Hogyan adhatjuk meg a transzfermátrixot mérési eredményekből? $\boxed{5}$



$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r' \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}} \begin{pmatrix} 0 \\ t' \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$r' = M_{12} t' \quad \Rightarrow \quad M_{12} = \frac{r'}{t'}$$

$$1 = M_{22} t' \quad \Rightarrow \quad M_{22} = \frac{1}{t'}$$

$$t = M_{11} + M_{12} r \Rightarrow M_{11} = t - M_{12} r = t - \frac{r r'}{t'}$$

$$0 = M_{21} + M_{22} r \Rightarrow M_{21} = -M_{22} r = -\frac{r}{t'}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} t - \frac{r r'}{t'} & \frac{r'}{t'} \\ -\frac{r}{t'} & \frac{1}{t'} \end{bmatrix}$$

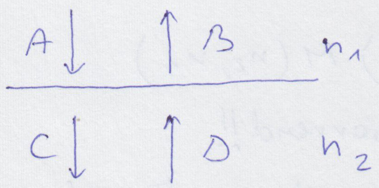
$$\det \underline{\underline{M}} = \frac{t}{t'} - \frac{r r'}{t'^2} - \frac{r'}{t'}\left(-\frac{r}{t'}\right) = \frac{t}{t'}$$

Transzfermátrixból hogyan olvasom le a reflexiót és a transzmissziót?

$$t = \frac{\det M}{M_{22}} \qquad r = -\frac{\frac{r}{t'}}{\frac{1}{t'}} = -\frac{M_{21}}{M_{22}}$$

$$t' = \frac{1}{M_{22}} \qquad r' = \frac{M_{12}}{M_{22}}$$

④ Konstruáljuk meg a határfelület transzfermátrixát!



$$M_{11} = t - \frac{rr'}{t'} = \frac{2n_1}{n_1+n_2} - \frac{\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \cdot \frac{n_2-n_1}{n_1+n_2}}{\frac{2n_2}{n_1+n_2}} =$$

$$= \frac{4n_1n_2 + (n_1-n_2)^2}{2n_2\,(n_1+n_2)} = \frac{(n_1+n_2)^2}{2n_2(n_1+n_2)} = \frac{n_1+n_2}{2n_2} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{n_1}{n_2}\right]$$

$$M_{12} = \frac{r'}{t'} = \frac{\frac{n_2-n_1}{n_1+n_2}}{\frac{2n_2}{n_1+n_2}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)$$

$$M_{21} = -\frac{r}{t'} = M_{12}$$

$$M_{22} = \frac{1}{t'} = \frac{n_1+n_2}{2n_2} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{n_1}{n_2}\right]$$

$$\underline{\underline{M}}\,(n_2, n_1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\frac{n_1}{n_2} & 1-\frac{n_1}{n_2} \\ 1-\frac{n_1}{n_2} & 1+\frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Nem diagonális elemekben egy előjel különbség az előadáshoz képest. Más konvenció.

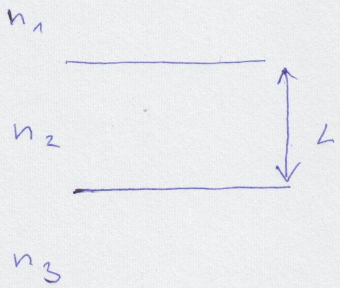
⑤ Konstruáljuk meg szabad terjedésre

$$\underline{\underline{F}}\,(kL) = \begin{bmatrix} e^{ikL} & 0 \\ 0 & e^{-ikL} \end{bmatrix}$$

üregbeli

nincs visszaverődés csak fázis csavarodás

⑥ Transzfermátrix, olyan mint a LEGO



$$\underline{\underline{M}} = M(n_3, n_2)\, F(kL)\, M(n_2, n_1)$$

sorrend!!

Milyen tulajdonságai vannak a transzfermátrixnak?

a) determináns

$\det F = 1$

$$\det M(n_2, n_1) = \frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right] = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\det M(n_3, n_2) = \frac{n_2}{n_3}$$

$$\det \underline{\underline{M}} = \frac{n_{\text{kezdeti}}}{n_{\text{végső}}}$$

b) transzformáció

$$U = U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad U^2 = I \quad \text{tükröz a mellékátlóra és transzponál}$$

$$U \cdot \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{pmatrix}$$

$$U\, M(n_2, n_1)\, U = M(n_2, n_1)$$

$$U F U = F^*$$

$$\underline{\underline{M}} = M(n_3, n_2)\, F(kL)\, M(n_2, n_1)$$

$$UMU = U M(n_3, n_2) U \; U F(kL) U \; U M(n_2, n_1) U \qquad \text{konjugáljuk}$$

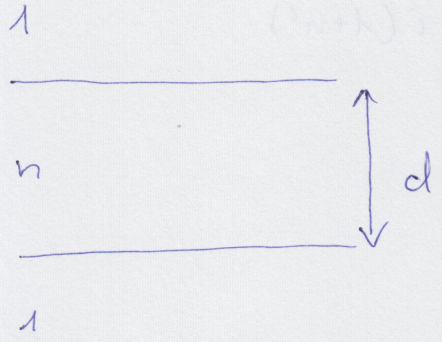
$$\begin{pmatrix} M_{22}^* & M_{21}^* \\ M_{12}^* & M_{11}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = M_{22}^*$$

$$M_{12} = M_{21}^*$$

Ha törésből és szabad terjedésből írjuk fel!

⑦ Szappanhártya



$$\underline{\underline{M}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+n & 1-n \\ 1-n & 1+n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{ikd} & 0 \\ 0 & e^{-ikd} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 1+\frac{1}{n} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4n}\begin{bmatrix} (1+n)e^{ikd} & (1-n)e^{-ikd} \\ (1-n)e^{ikd} & (1+n)e^{-ikd} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+n & n-1 \\ n-1 & 1+n \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \frac{1}{4n}\left[(1+n)^2 e^{ikd} - (1-n)^2 e^{-ikd}\right] = \frac{1}{4n}\left[(1+n^2)\left(e^{ikd} - e^{-ikd}\right) + \right.$$

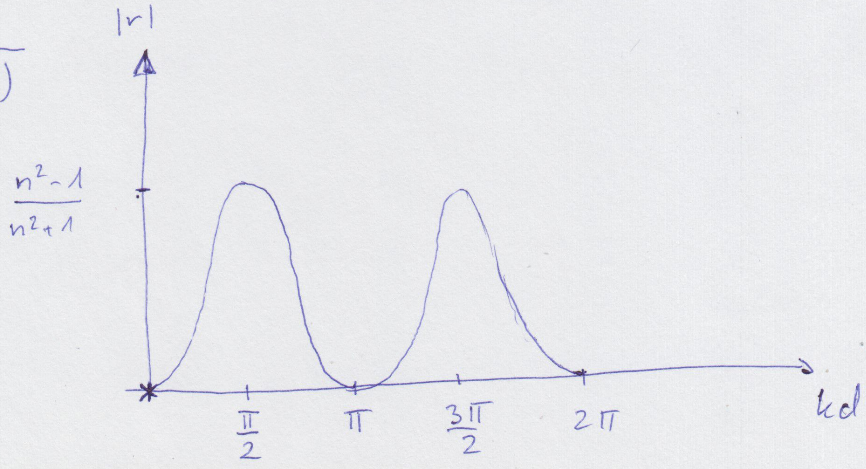
$$\left. + 2n\left(e^{ikd} + e^{-ikd}\right)\right] = \frac{1}{4n}\left[2i(1+n^2)\sin kd + 4n\cos kd\right] = M_{22}^*$$

$$M_{12} = \frac{1}{4n}(n-1)(n+1)\left(e^{ikd} - e^{-ikd}\right) = \frac{1}{2n}\, i\,(n^2-1)\sin kd = M_{21}^*$$

reflexió

$$r = -\frac{M_{21}}{M_{22}} = -\frac{M_{12}^*}{M_{11}^*} = \frac{\frac{1}{2n}\, i\,(n^2-1)\sin kd}{\frac{1}{4n}\left[-2i(1+n^2)\sin kd + 4n\cos kd\right]} =$$

$$= \frac{i\,(n^2-1)}{2n\,\mathrm{ctg}\,kd - i\,(1+n^2)}$$

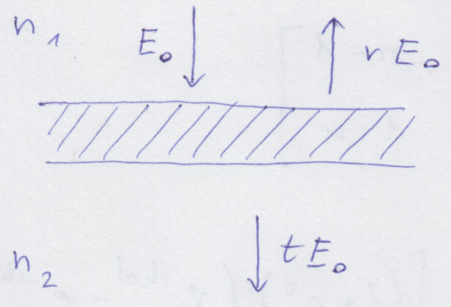


$$R = r \cdot r^* = \frac{i(n^2-1)}{2n\,\mathrm{ctg}\,kd - i(1+n^2)} \cdot \frac{-i(n^2-1)}{2n\,\mathrm{ctg}\,kd + i(1+n^2)} =$$

$$= \frac{(n^2-1)^2}{4n^2\,\mathrm{ctg}^2 kd + (1+n^2)^2}$$

⑧ Energiaviszonyok

$$|\underline{S}| = |\underline{E} \times \underline{H}| \sim n E^2$$



$$n_1 E_0^2 = n_1 |r|^2 E_0^2 + n_2 |t|^2 E_0^2$$

$$1 = |r|^2 + \frac{n_2}{n_1} |t|^2$$

$$1 = R + T \implies T = \frac{n_2}{n_1} |t|^2$$

$$1 = \frac{M_{21} M_{21}^*}{M_{22}\, M_{22}^*} + \frac{n_2}{n_1} \frac{(\det M)^2}{M_{22} M_{22}^*}$$

$$1 = \frac{M_{21} \underbrace{M_{21}^*}_{= M_{12}} + M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}}{M_{22} \underbrace{M_{22}^*}_{= M_{11}}} = 1 \quad \smile$$