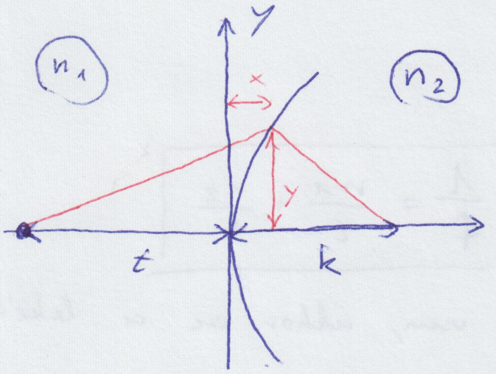
Fermat-elv és geometriai optika

Fermat-elv: Fénysugár azt a pályát követi, amelyre a kezdő és végpontok közötti idő extremális.
(általában minimális)

1. feladat

Milyen alakú legyen egy n_1 és n_2 törésmutatójú közeg határfelülete, hogy tökéletes fókuszálást valósítson meg?



Minden fénysugárhoz ugyanazon idő tartozzon. Miért?

nyílegyenes út $\quad T = \dfrac{t}{\frac{c}{n_1}} + \dfrac{k}{\frac{c}{n_2}} \quad \Rightarrow \quad cT = n_1 t + n_2 k$

megtört út

$$T = \frac{\sqrt{(t+x)^2 + y^2}}{\frac{c}{n_1}} + \frac{\sqrt{(k-x)^2 + y^2}}{\frac{c}{n_2}}$$

A kettő megegyezik

$$n_1 t + n_2 k = n_1 \sqrt{(t+x)^2 + y^2} + n_2 \sqrt{(k-x)^2 + y^2}$$

Nehéz megoldani $y(x)$-re, nézzünk speciális eseteket!

(a) optikai tengelyhez közel

$x, y \ll t, k$

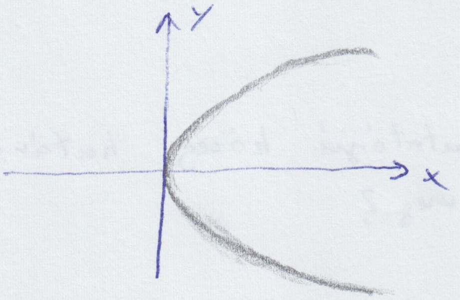
$$\sqrt{(t+x)^2 + y^2} \simeq t\sqrt{1 + 2\frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2}} \simeq t\left(1 + \frac{x}{t} + \frac{y^2}{2t^2}\right)$$

$$\sqrt{(k-x)^2 + y^2} \approx k\left(1 - \frac{x}{k} + \frac{y^2}{2k^2}\right)$$

$$n_1 t + n_2 k \approx n_1 t\left(1+\frac{x}{t}+\frac{y^2}{2t^2}\right) + n_2 k\left(1-\frac{x}{k}+\frac{y^2}{2k^2}\right)$$

$$x(n_2-n_1) = y^2\left(\frac{n_1}{2t}+\frac{n_2}{2k}\right)$$

$$x = \frac{y^2}{n_2-n_1}\left(\frac{n_1}{2t}+\frac{n_2}{2k}\right)$$ forgási paraboloid



Hogyan módosul a leképezési törvény

$$\frac{2(n_2-n_1)x}{y^2} = \frac{n_1}{t}+\frac{n_2}{k} \qquad \boxed{\frac{1}{f}=\frac{n_1}{t}+\frac{n_2}{k}}$$

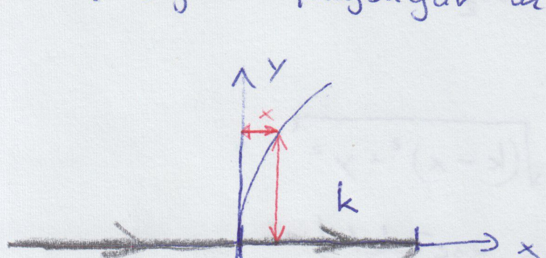
Ha a két oldalon különböző törésmutató van, akkor az a leképezési törvénybe is bekerül.

$$f = \frac{y^2}{2(n_2-n_1)x} = f(n_1,n_2)$$

Mi történik, ha az egyik törésmutató értékét megváltoztatom?

(b) $t=\infty$

a bejövő fénysugár az optikai tengellyel párhuzamos



$$n_1 x + n_2\sqrt{(k-x)^2+y^2} = n_2 k$$

$$n_1 x - n_2 k = n_2\sqrt{(k-x)^2+y^2}$$

$$n_1^2x^2 + \cancel{n_2^2k^2} - 2n_1n_2kx = n_2^2(\cancel{k^2}+x^2+y^2-2kx)$$

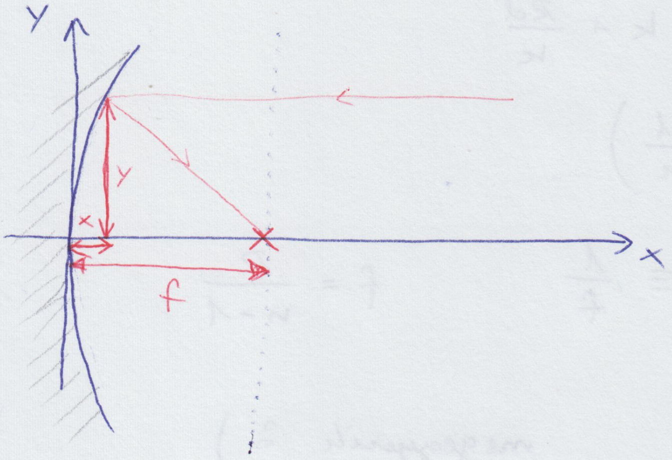
$$0 = (n_2^2-n_1^2)x^2 - 2n_2k(n_2-n_1)x + n_2^2y^2 = \emptyset$$

$$(n_2^2-n_1^2)\left[x-\frac{n_2k}{n_1+n_2}\right]^2 + n_2^2y^2 = \frac{n_2^2k^2(n_2-n_1)}{(n_2+n_1)}$$

$n_2>n_1$ forgási ellipszoid

2. feladat

Tökéletes homorú tükör



Egyenesen visszaverődő sugár

$$T = \frac{2f}{c}$$

Szögben visszaverődő sugár

$$T = \frac{f-x}{c} + \frac{\sqrt{(f-x)^2+y^2}}{c}$$

$$2f = f - x + \sqrt{(f-x)^2+y^2}$$

$$x + f = \sqrt{(f-x)^2+y^2}$$

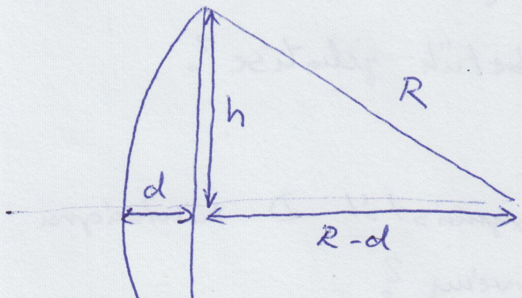
$$\cancel{x^2} + \cancel{f^2} + 2xf = \cancel{f^2} + \cancel{x^2} - 2fx + y^2$$

$$y^2 = 4xf$$ parabola ⇒ parabolaantennák

3. feladat

Lencse-törvény

síkdomború lencse



$$h^2 + (R-d)^2 = R^2$$

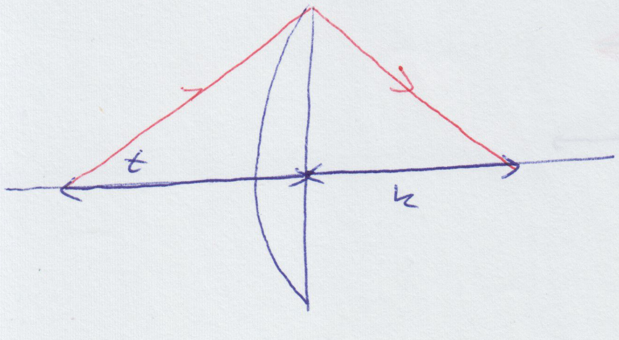
$$h^2 + d^2 - 2Rd = \emptyset$$

$$h^2 = 2Rd - d^2$$

vékonylencse $d \ll R$

$$h^2 \simeq 2Rd$$

Fermat-elv



$$T_1 = \frac{1}{c}\left[(t-d) + d \cdot n + k\right]$$

$$T_2 = \frac{1}{c}\left(\sqrt{t^2+h^2} + \sqrt{k^2+h^2}\right)$$

$$T_1 = T_2$$

$$t - d + nd + k \approx t\sqrt{1 + \frac{2Rd}{t^2}} + k\sqrt{1 + \frac{2Rd}{k^2}}$$

$$t + k + (n-1)d \simeq t + \frac{Rd}{t} + k + \frac{Rd}{k}$$

$$(n-1)d = Rd\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{n-1}{R} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \equiv \frac{1}{f} \qquad f = \frac{R}{n-1}$$

Wikipedia $\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]$ megegyezik :)

$$R_1 = R \qquad R_2 = \infty$$

$$\boxed{\text{Geometriai optika}}$$

Vékonylencsére jól ismerjük a leképezési törvényt.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$$

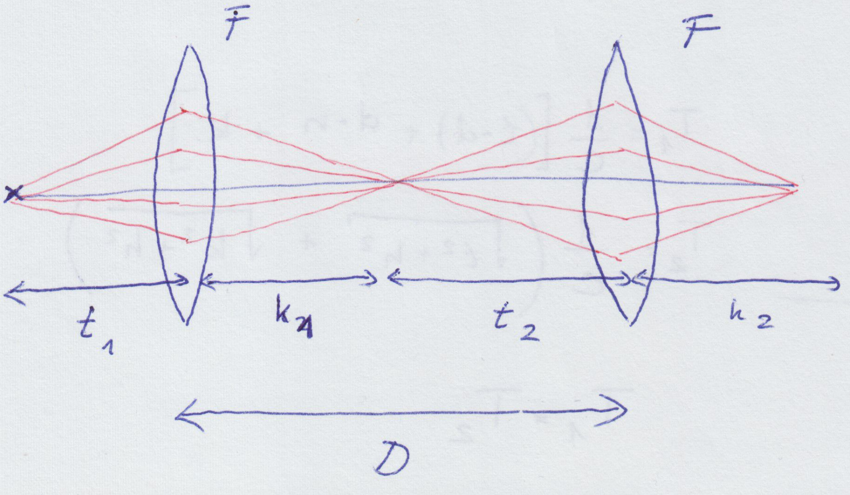
Mi a helyzet, ha összetett optikai rendszerem van?

Igaz marad a leképezési törvény?

Ha igen, akkor mi az egyes betűk jelentése?

4. feladat

Két F fókusztávolságú lencsénél, melyek egymástól D távolságra vannak, hogyan módosul a leképezési törvény?



Alapegyenleteink

Leképezési törvény: $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{t_1} = \dfrac{1}{F}$ $\qquad \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{F}$

Geometria: $k_1 + t_2 = D$

Állítás

Egyenletrendezés után

$$\frac{1}{t_1 - \dfrac{DF}{D-2F}} + \frac{1}{k_2 - \dfrac{DF}{D-2F}} = -\frac{(D-2F)}{F^2}$$

Bizonyítás

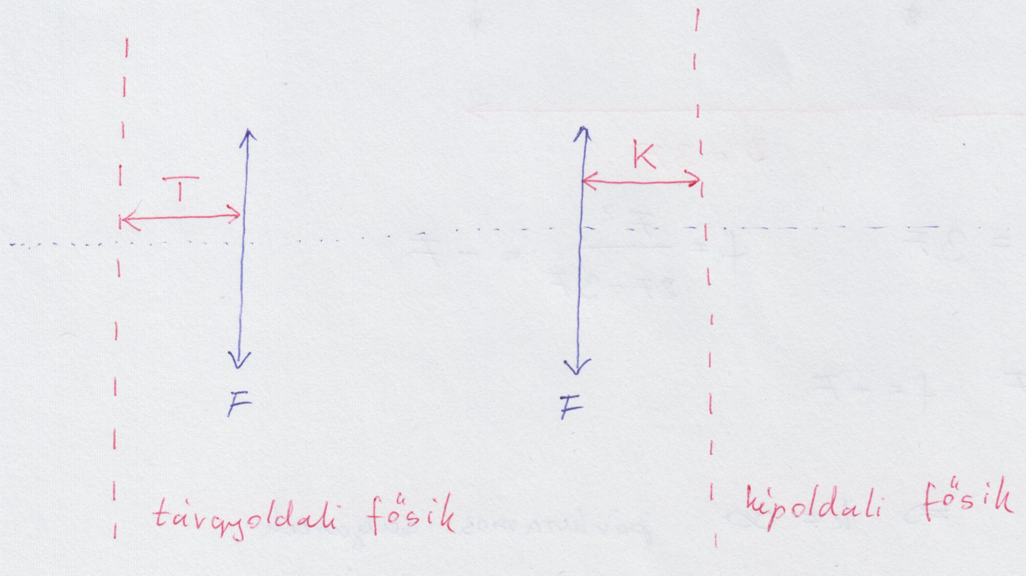
Előző egyenletbe helyettesítsünk

$$t_1 = \frac{k_1 F}{k_1 - F} = \frac{(D-t_2)F}{D-t_2-F} \qquad k_2 = \frac{t_2 F}{t_2 - F}$$

A leképezési - törvény érvényben marad, csak a kép és a tárgy távolság el van tolva

$$\frac{1}{t_1 - T} + \frac{1}{k_2 - K} = \frac{1}{f}$$

$$T = K = \frac{DF}{D-2F} \qquad f = \frac{F^2}{2F-D}$$



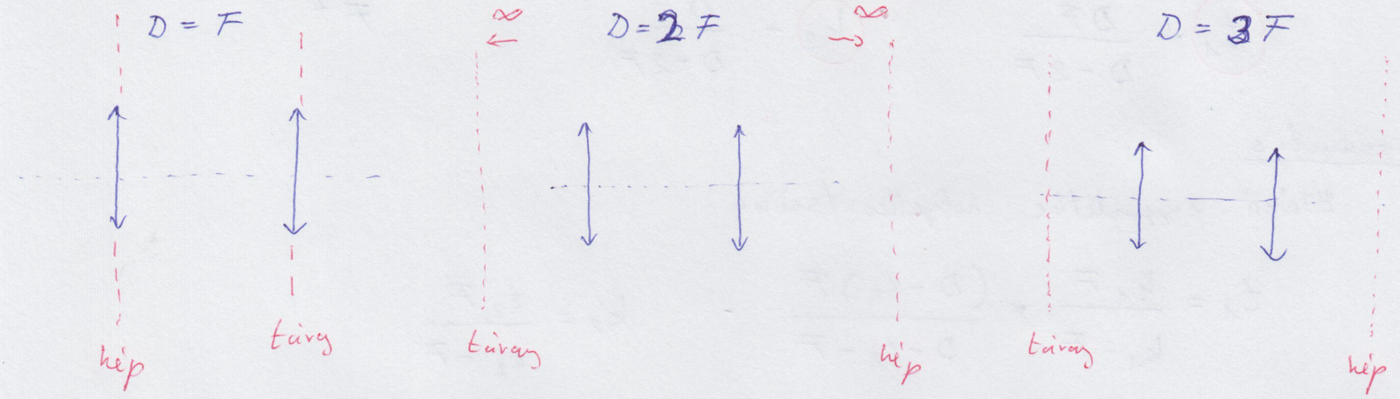
tárgy és képtávolságot a fősikoktól kell mérni

A rendszer megadásához 3 dolog kell
- fókusztávolság
- tárgyoldali fősík helye
- képoldali fősík helye

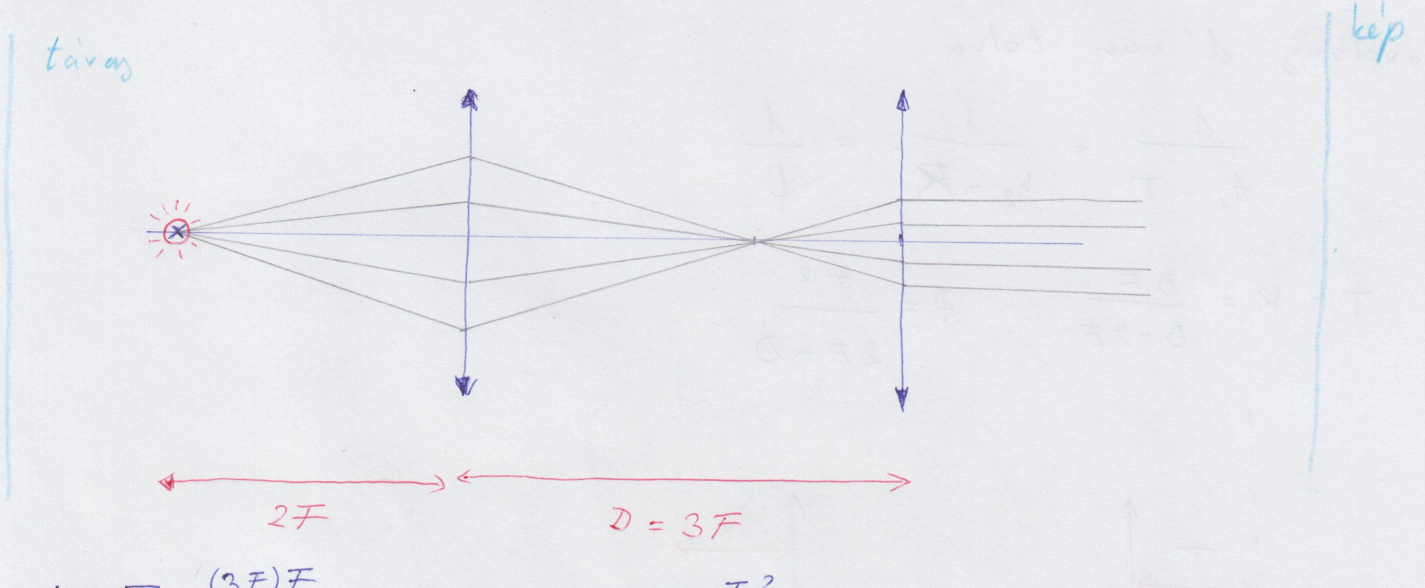
$$\boxed{\frac{1}{k}+\frac{1}{t}=\frac{1}{f}}$$

Ez nem csak két vékonylencsére igaz, hanem tetszőleges összetett rendszerre is (vastaglencse, vékonylencse, gömbtükör)

Különböző esetek



5. feladat



$$K = T = \frac{(3F)F}{3F-2F} = 3F \qquad f = \frac{F^2}{2F-3F} = -F$$

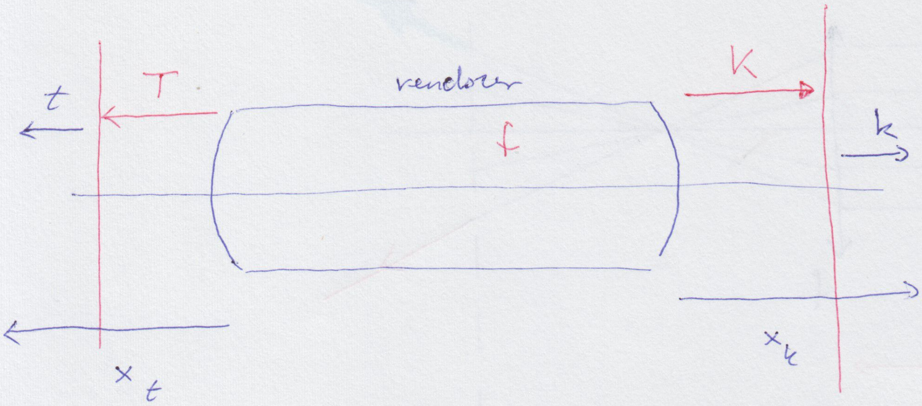
$$k = ? \qquad t = -F \qquad f = -F$$

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{t}=\frac{1}{f} \Rightarrow k = \infty$$ párhuzamos sugarak

Módszer nem mond semmit arról, hogy a rendszeren belül mi történik.

6. feladat

Egyértelmű-e a fókusztávolság és a fősíkok helyeinek megadása?



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_k - K} + \frac{1}{x_t - T}$$

(f, T, K) megadása egyértelmű-e?

Létezik egy másik (f', T', k'), amely ugyanazt a leképezést adja meg?

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_k - K} + \frac{1}{x_t - T} \qquad \frac{1}{f'} = \frac{1}{x_k - k'} + \frac{1}{x_t - T'}$$

Állítás: $f' = -f$

$K' = K + 2f$

$T' = T + 2f$

Bizonyítás: Be kell helyettesíteni

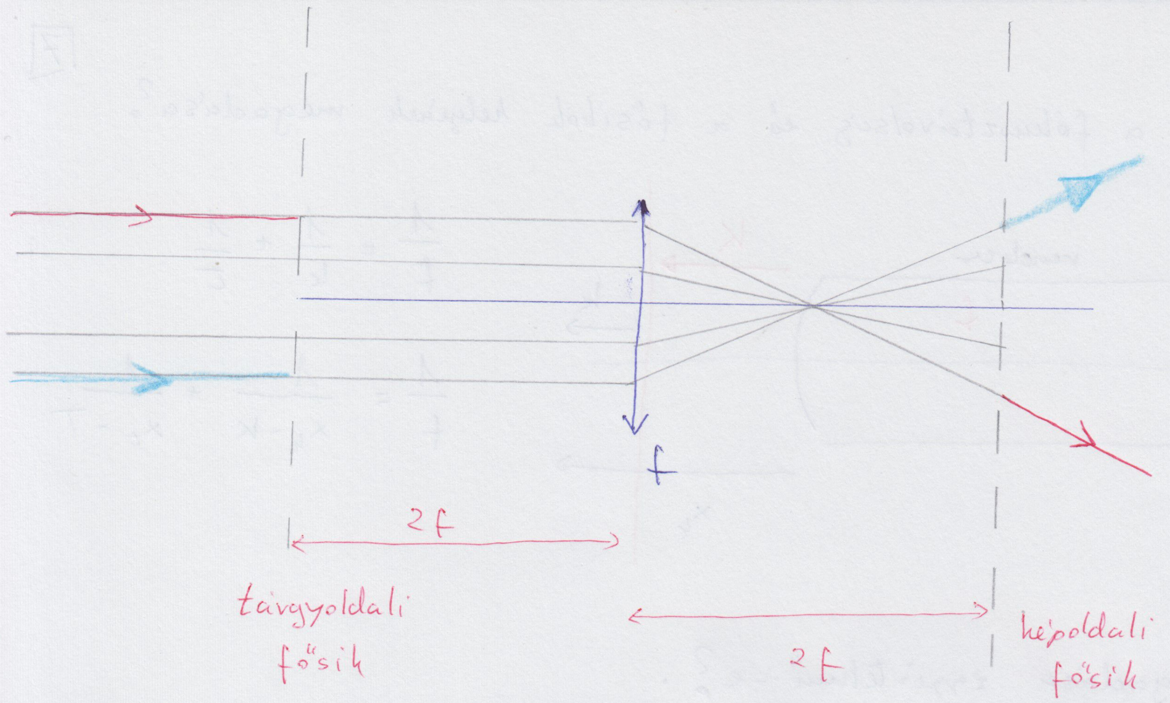
Triviális példa, vékony lencse

$$(f, K=0, T=0) \Rightarrow (-f, K'=2f, T'=2f)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_t} + \frac{1}{x_k} \qquad -\frac{1}{f} = \frac{1}{x_t - 2f} + \frac{1}{x_k - 2f}$$

$$x_k = \frac{f x_t}{x_t - f} \qquad x_k = 2f + \frac{(-f)(x_t - 2f)}{x_t - 2f - (-f)} = \frac{f x_t}{x_t - f}$$

megegyezik $\Rightarrow$ nézzük speciális sugármenetet



$t' = \infty$
$k' = -f$
$f' = -f$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{k'} + \frac{1}{t'} \qquad -\frac{1}{f} = -\frac{1}{f} + 0$$

A két lehetséges választás közül melyik a jó, melyik a rossz?

A leképezési-törvény szempontjából mindkettő jó.

A sugármeneteket vizsgálva

- egyik választásban az optikai tengely felett és alatt futó sugármenetek helyet cserélnek
- másik választásban (ez a jobb) nincs ilyen helycsere