Kausztikák

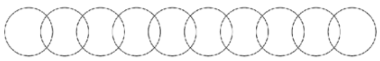
Cserti József

2021. 04. 28, update: 2023.08.26, 2024. 04. 27

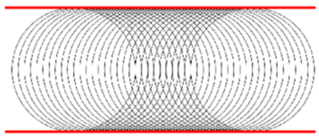
Kiegészítő anyag: http://cserti.web.elte.hu/okt/Kausztika-elmelet.pdf

Kausztika = görbesereg burkolója

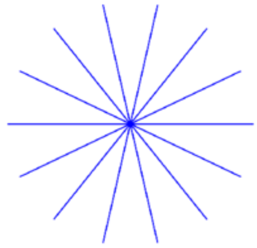
görbesereg



görbesereg burkolója



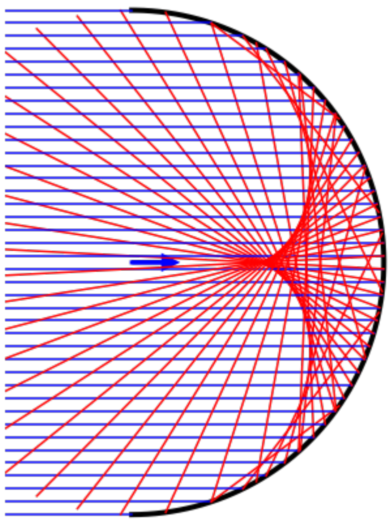
Nem minden görbeseregnek van burkolója



http://cserti.web.elte.hu/okt/Kausztika_gombtukor.html

http://cserti.web.elte.hu/okt/Kausztika_gombtukor.ipynb

Visszavert fénysugarak (piros), bejövő (kék)



A kausztika világos oldalának minden pontján 3 fénysugár megy át.

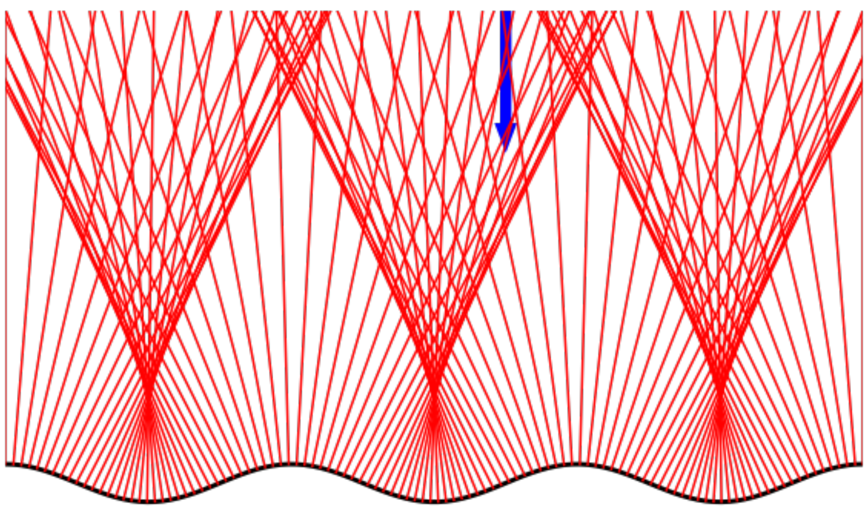
A kausztika sötét oldalánal minden pontján 1 fénysugár megy át.

A kausztika görbjén 2 fénysugár összeolvad.

http://cserti.web.elte.hu/okt/Balaton_Kausztika_geometria_and_eq.html

http://cserti.web.elte.hu/okt/Balaton_Kausztika_geometria_and_eq.html.ipynb

Visszavert fénysugarak (piros), bejövő (kék)

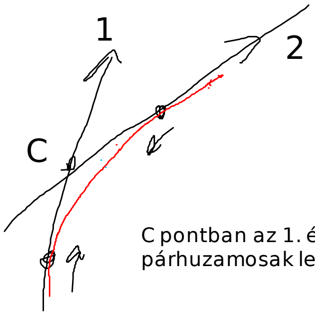


Tegyük fel, hogy ismert egy görbe paraméteres egyenlete, azaz a

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) \qquad \text{függvény.}$$

Egy görbesereget a λ paraméterrel jellemezhetünk, és így görbesereget a

$$\boldsymbol{r}(t,\lambda) = (x(t,\lambda), y(t,\lambda)) \qquad \text{függvény írja le.}$$



C pontban az 1. és 2. sugár összeolvad, párhuzamosak lesznek

C pont: $\overset{1\,\rightarrow}{\cancel{\underline{r}(t,\lambda)}} = \overset{2\,\leftarrow}{\underline{r}(t+dt, \lambda+d\lambda)} =$

$$= \cancel{\underline{r}(t,\lambda)} + \underbrace{\frac{\partial \underline{r}}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \lambda}\cdot d\lambda}_{=0}$$

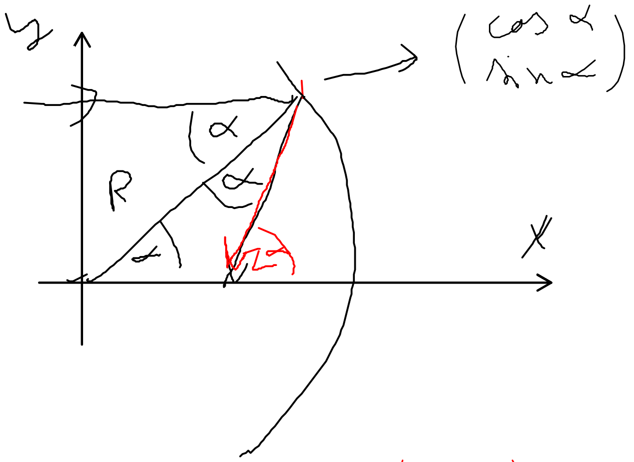
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} dt \\ d\lambda \end{pmatrix} = 0$$

nem triviális megoldás: det M =0

$$\det M = \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\lambda)} = 0 \implies$$

$$\implies t^*(\lambda) \implies \boxed{\underline{r}(t^*(\lambda), \lambda) = \underline{r}_b(\lambda)}$$

példa: teáscsésze



$$\underline{v} = -\begin{pmatrix}\cos 2\alpha\\ \sin 2\alpha\end{pmatrix}$$

R=1

$$\alpha = [-90^\circ, 90^\circ]$$

$$\underline{r}(t,\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + t\,\underline{v} = \begin{pmatrix}\cos\alpha - t\cos 2\alpha\\ \sin\alpha - t\sin 2\alpha\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\cos 2\alpha \,, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\sin 2\alpha$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\sin\alpha + t \cdot 2\sin 2\alpha$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \cos\alpha - t \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\alpha)} = \begin{vmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin\alpha + 2t\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos\alpha - 2t\cos 2\alpha \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$$

$$-\cos 2\alpha\cos\alpha + 2t\cos^2 2\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha + 2t\sin^2 2\alpha =$$

$$= 2t - \cos\alpha = 0 \qquad t^* = \frac{\cos\alpha}{2}$$

$$\boxed{\underline{r}_k(\alpha)} = \begin{pmatrix}\cos\alpha - \frac{\cos\alpha}{2}\cos 2\alpha\\ \sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{2}\sin 2\alpha\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)\\ \sin^3\alpha\end{pmatrix}}$$

A kausztika görbe számolása a görbesereg implicit egyenlete alapján

Korrekt levezetések itt:

https://math.stackexchange.com/questions/4751305/conceptually-understanding-the-mathematical-definition-for-an-envelope-of-family

Gandeeb Bhattarai: Envelope Equations https://thestemscholars.com/wp-content/uploads/2019/08/envelope.pdf

https://math.stackexchange.com/questions/1378520/derivation-of-the-equation-for-the-envelope

Cserti József: https://cserti.web.elte.hu/okt/Kausztika-elmelet.pdf

Figyelem: sok helyen a levezetés nem korrekt, hand-waving pl.: https://en.wikipedia.org/wiki/Envelope_(mathematics)

A kausztikát meghatározó egyenletek, ha görbe implicit egyenlete adott

$$\boxed{\begin{aligned} &F(\alpha, x, y) = 0 \\ &\frac{\partial F(\alpha, x, y)}{\partial \alpha} = 0 \end{aligned}}$$

pl.: $(x-\alpha)^2 + y^2 = 4$

Teáscsésze újra:

$$F(\alpha, x, y) = \left[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha)\right] \cdot \mathbf{n}(\alpha) = 0$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$F(\alpha, x, y) = (x - \cos\alpha)(-\sin 2\alpha) + (y - \sin\alpha)\cos 2\alpha = 0 \longrightarrow -x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial F(\lambda, x, y)}{\partial \lambda} = -2x\cos 2\alpha - 2y\sin 2\alpha - \cos\alpha = 0$$

$$\downarrow$$

Az eredmény megegyezik az előzővel:

$$x_c(\alpha) = \cos\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)$$
$$y_c(\alpha) = \sin^3\alpha$$

Egyenessereg kausztikájának számolása

egyenessereg paraméterezése: α

$$F(\alpha, x, y) = \left[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha)\right] \cdot \mathbf{n}(\alpha) = 0$$ implicit egyenlet

$\mathbf{n}(\alpha)$ az egyenes szegmens normálvektora
$\mathbf{r}_0(\alpha)$ egy pont az egyenesen

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_y \\ -n_x \end{bmatrix}$$ az egyenes szegmens irányvektora

$$\mathbf{v}\,\mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{n}^2 = 1 \longrightarrow \mathbf{n}\,\dot{\mathbf{n}} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{v}(\alpha) \sim \dot{\mathbf{n}}(\alpha)$$

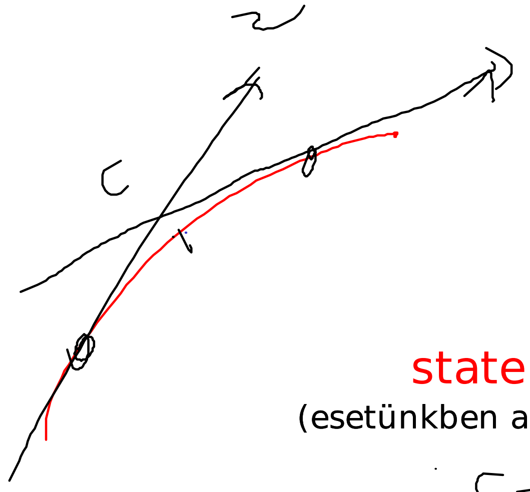
A dot az α szerinti deriváltat jelenti.

Végül a kausztika paraméteres egyenlete:

$$\boxed{\mathbf{r}_c(\alpha) = \mathbf{r}_0 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{n}}{\dot{\mathbf{n}}^2}\,\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{r}_0 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{n}}}\,\mathbf{v}}$$

Megj.: Az első alaknál az n vektort normálni kell. A második alakot analitikus számolasoknál érdemes használni, ugyanis ekkor az n és v vektorokat NEM kell normálni, elég ha kikötjük, hogy n v = 0 !

Kausztika számolása az optikai úthossz alapján



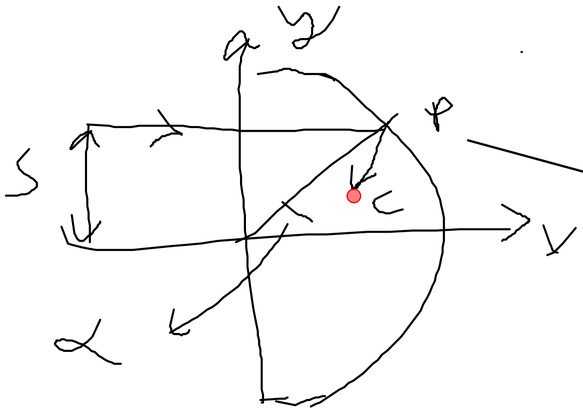
$\Phi(s, C) =$ optikai úthossz

state paraméter
(esetünkben az impakt paraméter)

$s = \sin\alpha$

control paraméter
(esetünkben a megfigyelési pont koordinátái)

$C = (C_1, C_2)$



$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$$\Phi(s, C) = \cos\alpha + \underbrace{\sqrt{(\cos\alpha - C_1)^2 + (\sin\alpha - C_2)^2}}_{\overline{PC}}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right|_C = 0 \quad \to$$ Fermat-elv

$$\Rightarrow f(s, C_1, C_2) = 0$$

$$\Rightarrow s^*(C_1, C_2)$$

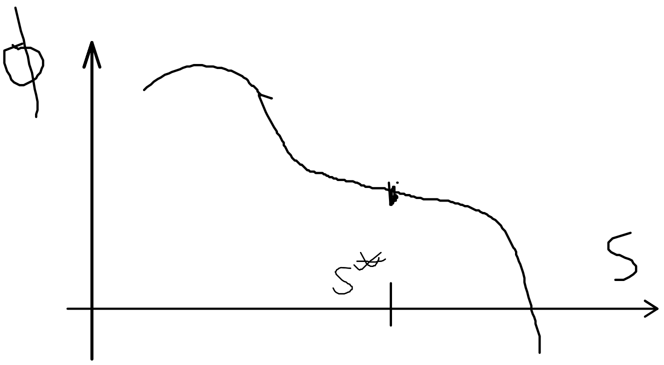
$\Phi(s, C)$ szélsőértéke (minimum, maximum, nyereg pont (több s-re))

1) C pont --> a kausztika világos oldalán van

ad A C – m

3 szélsőérték, 3 fénysugár

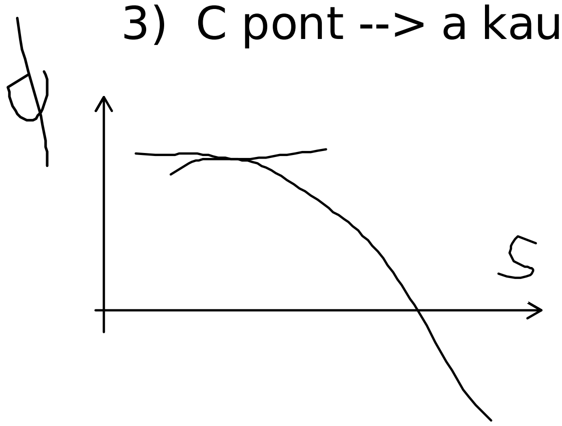
2) C pont --> a kausztikán van



S^*

inflexiós pont,
a kausztikán két fénysugár
összeolvad

3) C pont --> a kausztika sötét oldalán van



$$\left.\begin{aligned} &1)\quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial S}\right|_C = 0 \\ &2)\quad \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial S^2}\right|_C = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

A kausztika egyenletét adja

Visssza teáscsészéhez:

$$s = \sin(\alpha) \qquad\qquad \alpha = [-90^\circ, 90^\circ]$$

Optikai úthossz:

$$\Phi(\alpha, C_1, C_2) = \cos(\alpha) + \sqrt{(\cos(\alpha) - C_1)^2 + (\sin(\alpha) - C_2)^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{C_1 \sin(\alpha) - C_2 \cos(\alpha)}{\sqrt{(C_1 - \cos(\alpha))^2 + (C_2 - \sin(\alpha))^2}} - \sin(\alpha) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = -\cos(\alpha) - \frac{(C_2 \cos(\alpha) - C_1 \sin(\alpha))^2}{((C_1 - \cos(\alpha))^2 + (C_2 - \sin(\alpha))^2)^{3/2}} + \frac{C_1 \cos(\alpha) + C_2 \sin(\alpha)}{\sqrt{(C_1 - \cos(\alpha))^2 + (C_2 - \sin(\alpha))^2}} = 0$$

$$\downarrow$$

Megoldás C_1 és C_2 -re:

A kausztika paraméteres görbéje:

$$C_1 = \frac{1}{4}\left[3\cos\alpha - \cos 3\alpha\right] = \cos\alpha \left[1 - \frac{\cos 2\alpha}{2}\right]$$

$$C_2 = \sin^3 \alpha$$

Az eredmény megegyezik az előző eredménnyel.

Lásd még itt:

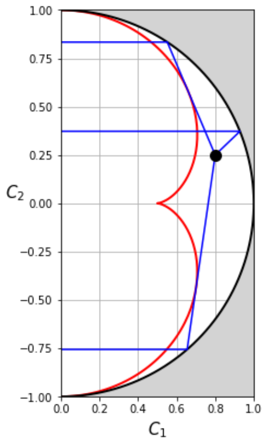
Tim Poston and Ian Stewart: Catastrophe Theory and its Applications,
PITMAN PUBLISHING LIMITED (1978)

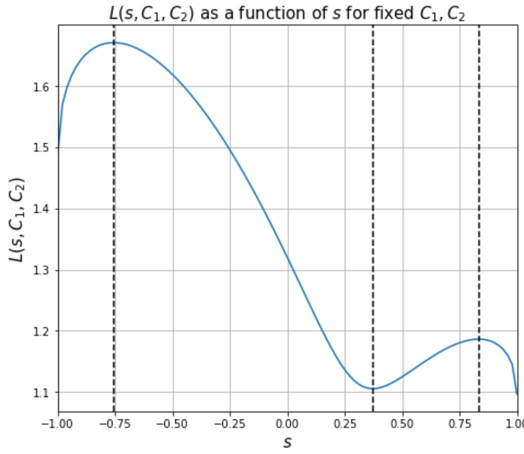
page 246-283 (in pdf 266 -302)
teacup itt: page 247-252 (in pdf 267 -272)

(C1, C2) a megfigyelési pont (ide futnak be a fénysugarak)

1) A Fermat-elvvel öszhangban 3 fénysugár van a kausztika világos oldalán

$\Phi(s, C)$ optikai úthossznak adott C1, C2-re az s szerint 3 szélsőértéke van (s=-0.756, 0.373, 0.834)

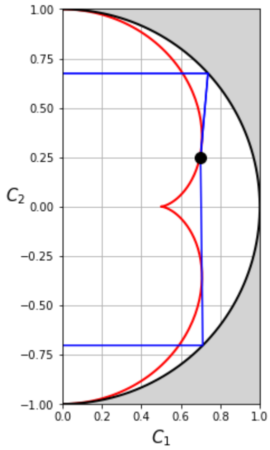


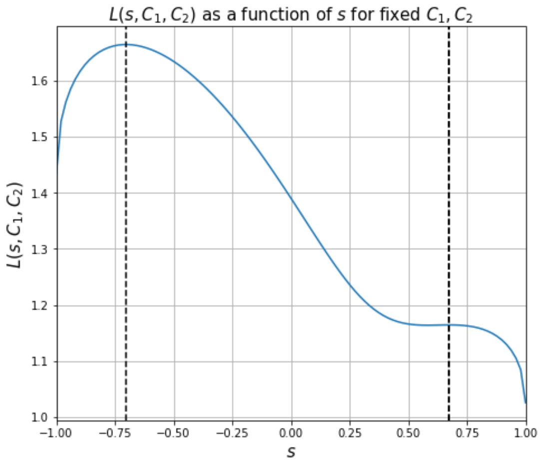


$$C_1, C_2 = (0.8, 0.25)$$

2) A Fermat-elvvel összhangban 2 fénysugár összeolvad a kausztikán.

$\Phi(s, C)$ optikai úthossznak 1 inflexiós pontja (s=0.675, felső bejövő fénysugár) és 1 szélsőértéke van (s=-0.703, alsó bejövő fénysugár)

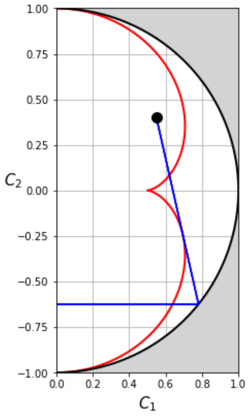


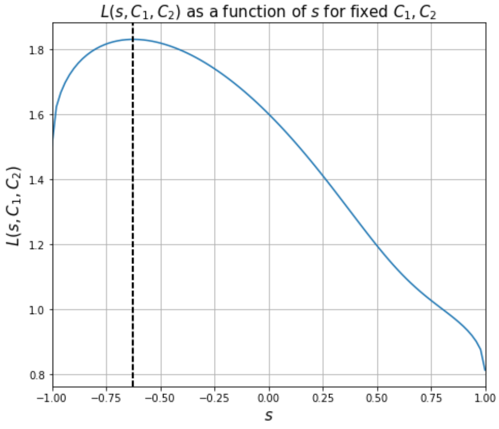


$$C_1, C_2 = (0.7, 0.25)$$

2) A Fermat-elvvel összhangban 1 fénysugár van a kausztika sötét oldalán.

$\Phi(s, C)$ optikai úthossznak 1 szélsőértéke van (s=-0.625)





$$C_1, C_2 = (0.55, 0.4)$$

Általánosítás
Mi van, ha több state paraméter van?

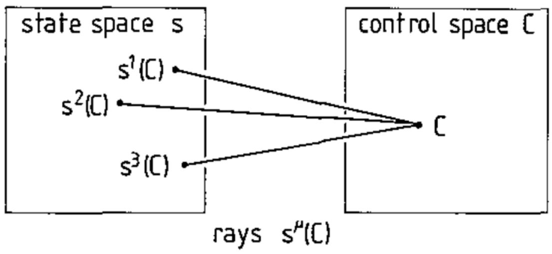
$$s = s_1, s_2, \cdots \qquad\qquad C = C_1, C_2, \cdots$$

$\Phi(s, C)$ optikai úthossz

Fermat-elv:

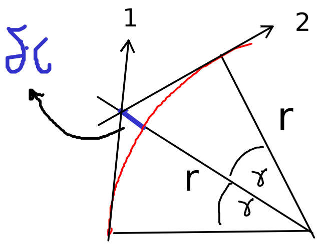
$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_i} = 0, \quad \forall i \xrightarrow{\text{megoldás s-re}} s^\mu(C)$$

μ a lehetséges pályákat indexeli, amelyek mindegyike átmegy a C ponton.



C-t változtatva, milyen C-nél lép fel a kausztika?

deriválva s_j szerint:
$$\sum_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_i \partial s_j} ds_j + \sum_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_i \partial C_k} dC_k = 0 \qquad (*)$$



$$\delta s \sim \gamma \longrightarrow \frac{r}{r+\delta C} = \cos\gamma \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2} \longrightarrow \delta C \sim \gamma^2 \sim (\delta s)^2$$

A kausztika közlében C megváltozása s-ben másodrendű. Ezért a (*) egyenletben a második tag elhanyagolható s-ben lineáris rendben:

$$\delta C_k \sim (\delta s_i)^2$$

$$\sum_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_i \partial s_j} ds_j = 0 \xrightarrow[\text{megoldás s\_i-re}]{\text{nem triviális}} \boxed{\det\left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_i \partial s_j}\right\} = 0}$$

A kausztika egyenlete.

$s^\mu(C)$ pályák száma változik, ha C változtatásával keresztezzük a kausztikát.

1) Berry, M V, 1981, 'Singularities in Waves' in Les Houches Lecture Series Session XXXV, eds. R Balian, M Kléman and J-P Poirier, North-Holland: Amsterdam, 453-543.

(https://michaelberryphysics.files.wordpress.com/2013/07/berry105.pdf)

2) Berry, M V, & Upstill, C, 1980 Progress in Optics XVIII, 257-346, 'Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns'.

(https://michaelberryphysics.files.wordpress.com/2013/07/berry089.pdf)

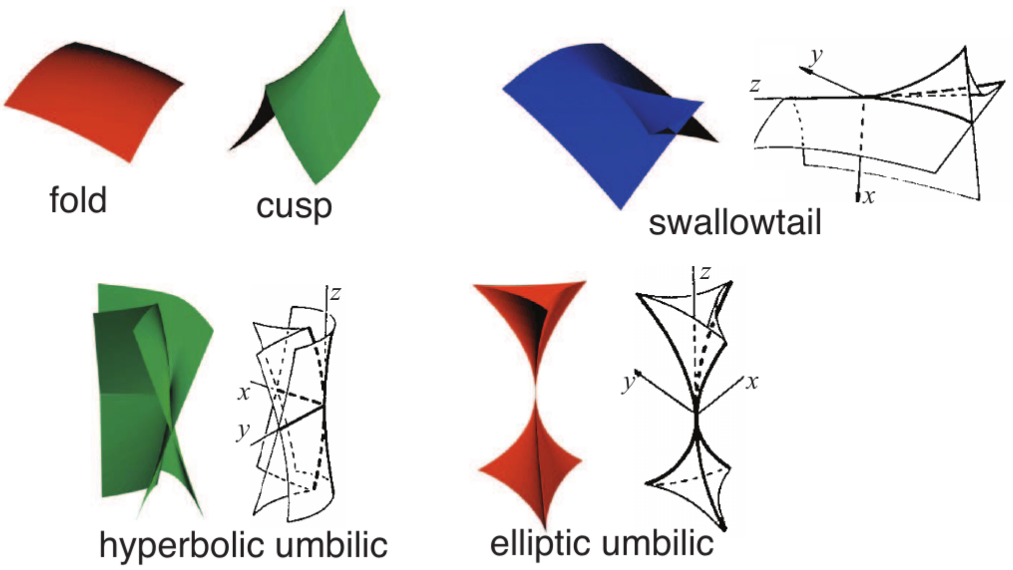
A kausztikák osztályozása, univerzalitási osztályok

Katasztrófa-elmélet

TABLE 1

Standard polynomials Φ for the elementary catastrophes with codimension $K \leq 4$

Name	Symbol	K	$\Phi(s; C)$
fold	A_2	1	$s^3/3 + Cs$
cusp	A_3	2	$s^4/4 + C_2s^2/2 + C_1s$
swallowtail	A_4	3	$s^5/5 + C_3s^3/3 + C_2s^2/2 + C_1s$
elliptic umbilic	D_4^-	3	$s_1^3 - 3s_1s_2^2 - C_3(s_1^2 + s_2^2) - C_2s_2 - C_1s_1$
hyperbolic umbilic	D_4^+	3	$s_1^3 + s_2^3 - C_3s_1s_2 - C_2s_2 - C_1s_1$
butterfly	A_5	4	$s^6/6 + C_4s^4/4 + C_3s^3/3 + C_2s^2/2 + C_1s_1$
parabolic umbilic	D_5	4	$s_1^4 + s_1s_2^2 + C_4s_2^2 + C_3s_1^2 + C_2s_2 + C_1s_1$



1) Berry, M V, 1981, ‘Singularities in Waves’ in Les Houches Lecture Series Session XXXV, eds. R Balian, M Kléman and J-P Poirier, North-Holland: Amsterdam, 453-543.

(https://michaelberryphysics.files.wordpress.com/2013/07/berry105.pdf)

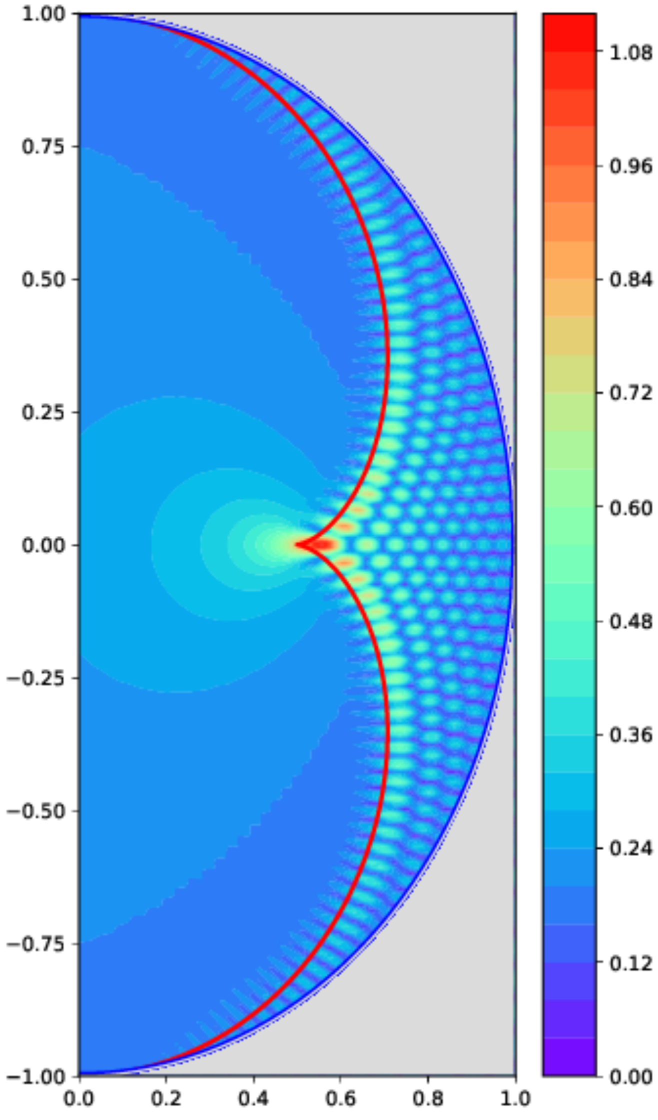
2) Berry, M V, & Upstill, C, 1980 Progress in Optics XVIII, 257-346, ‘Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns’.

(https://michaelberryphysics.files.wordpress.com/2013/07/berry089.pdf)

Diffraction Catastrophe

A kausztika finomszerkezete

$$\Psi(C) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int \cdots \int \mathrm{d}^N s \exp\left[\mathrm{i}\Phi(s;C)\right].$$



Fehér Szilveszter: Optikai kausztikák hullámoptikai vizsgálata
BSc szakdolgozat, 2021

https://edit.elte.hu/xmlui/handle/10831/73744