

Cserti József

ELTE TTK
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
Budapest

Kvantumstatisztikák:

Fermi-Dirac- és Bose-Einstein-eloszlás

Köszönet: Boross Péter, Kaufmann Zoltán

Fermi-Dirac-eloszlás

Fermion eloszlás:

Az i -dik energiszint degenerációja, $g_i = 3$

Az i -dik energiszinten lévő részecskék száma = 2

$$\# \text{ of Fermion konfiguráció} = \binom{g_i}{n_i} = 3$$

$\Sigma=3$	1. deg. szint	2. deg. szint	3. deg. szint
1.	1	1	0
2.	1	0	1
3.	0	1	1

Fermion eloszlás:

Az i -dik energiszint degenerációja, $g_i = 5$

Az i -dik energiszinten lévő részecskék száma = 3

$$\# \text{ of Fermion konfiguráció} = \binom{g_i}{n_i} = 10$$

$\Sigma=10$	1. deg. szint	2. deg. szint	3. deg. szint	4. deg. szint	5. deg. szint
1.	1	1	1	0	0
2.	1	1	0	1	0
3.	1	1	0	0	1
4.	1	0	1	1	0
5.	1	0	1	0	1
6.	1	0	0	1	1
7.	0	1	1	1	0
8.	0	1	1	0	1
9.	0	1	0	1	1
10.	0	0	1	1	1

Bose-Einstein-eloszlás

Boson eloszlás:

Az i -dik energiszint degenerációja, $g_i = 3$

Az i -dik energiszinten lévő részecskék száma = 2

$$\square \text{ of Boson konfiguráció} = \binom{n_i + g_i - 1}{n_i} = 6$$

$\Sigma=6$	1. deg. szint	2. deg. szint	3. deg. szint
1.	2	0	0
2.	1	1	0
3.	1	0	1
4.	0	2	0
5.	0	1	1
6.	0	0	2

Boson eloszlás:

Az i -dik energiszint degenerációja, $g_i = 5$

Az i -dik energiszinten lévő részecskék száma = 3

$$\square \text{ of Boson konfiguráció} = \binom{n_i + g_i - 1}{n_i} = 35$$

$\Sigma=35$	1. deg. szint	2. deg. szint	3. deg. szint	4. deg. szint	5. deg. szint
1.	3	0	0	0	0
2.	2	1	0	0	0
3.	2	0	1	0	0
4.	2	0	0	1	0
5.	2	0	0	0	1
6.	1	2	0	0	0
7.	1	1	1	0	0
8.	1	1	0	1	0
9.	1	1	0	0	1
10.	1	0	2	0	0
11.	1	0	1	1	0
12.	1	0	1	0	1
13.	1	0	0	2	0
14.	1	0	0	1	1
15.	1	0	0	0	2
16.	0	3	0	0	0
17.	0	2	1	0	0
18.	0	2	0	1	0
19.	0	2	0	0	1
20.	0	1	2	0	0
21.	0	1	1	1	0
22.	0	1	1	0	1
23.	0	1	0	2	0
24.	0	1	0	1	1
25.	0	1	0	0	2
26.	0	0	3	0	0
27.	0	0	2	1	0
28.	0	0	2	0	1
29.	0	0	1	2	0
30.	0	0	1	1	1
31.	0	0	1	0	2
32.	0	0	0	3	0
33.	0	0	0	2	1
34.	0	0	0	1	2
35.	0	0	0	0	3

Fermi-Dirac-eloszlás

ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6	ϵ_7	ϵ_8	ϵ_9	ϵ_{10}	ϵ_{11}	ϵ_{12}	ϵ_{13}	ϵ_{14}	ϵ_{15}	ϵ_{16}	ϵ_{17}	ϵ_{18}
0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5	12.5	13.5	14.5	15.5	16.5	17.5

$$N = \sum_i n_i$$

$$U = \sum_i n_i \epsilon_i$$

$$N = 20$$

$$U = 106$$

Mikroállapotok száma: 24

$\Sigma \epsilon = 24$	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{16}	n_{17}	n_{18}	n_{19}	n_{20}
1.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
4.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
5.	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6.	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7.	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
8.	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9.	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
10.	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
11.	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
12.	2	2	2	2	2	2	2	2	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13.	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
14.	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
15.	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
16.	2	2	2	2	2	2	2	1	2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
17.	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18.	2	2	2	2	2	2	2	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19.	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
20.	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
21.	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22.	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
23.	2	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24.	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

<https://ecee.colorado.edu/~bart/book/distrib.htm#bose>

from a book: <https://ecee.colorado.edu/~bart/book/>

© Bart J. Van Zeghbroeck, 1996, 1997

Fermi-Dirac-eloszlás

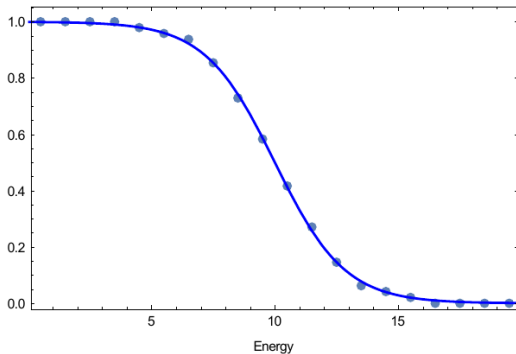
$$f_{FD}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$N = \sum_i n_i$$

$$U = \sum_i n_i \varepsilon_i$$

$$N = 20$$

$$U = 106$$



Illesztés: $k_B T = 1.41504$, $\mu = 10.0$

Bose-Einstein-eloszlás

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	ε_{10}	ε_{11}	ε_{12}	ε_{13}	ε_{14}	ε_{15}	ε_{16}	ε_{17}	ε
0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5	12.5	13.5	14.5	15.5	16.5	17

$$f_{BE}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$N = \sum_i n_i$$

$$U = \sum_i n_i \varepsilon_i$$

$$N = 10$$

$$U = 20$$

$\Sigma=164$	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{16}	n_{17}	n_{18}
1.	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2.	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3.	8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4.	8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5.	8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6.	8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7.	8	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8.	8	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9.	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10.	7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
11.	7	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
12.	7	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13.	7	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
14.	7	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15.	7	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16.	7	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
17.	7	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18.	7	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19.	7	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20.	7	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21.	7	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
22.	7	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23.	7	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24.	7	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25.	7	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26.	7	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27.	7	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28.	6	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
29.	6	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
30.	6	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
31.	6	2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
32.	6	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33.	6	2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34.	6	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
35.	6	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
36.	6	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	6	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Mikroállapotok száma: 164

Bose-Einstein-eloszlás

$$N = \sum_i n_i$$

$$U = \sum_i n_i \varepsilon_i$$

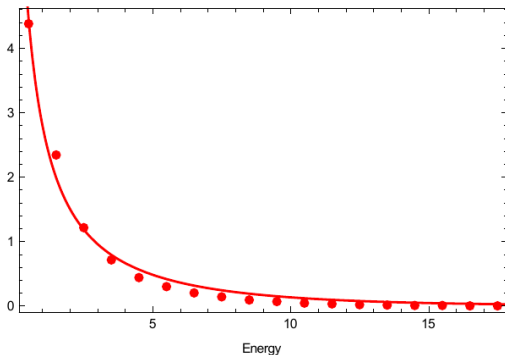
$$N = 10$$

$$U = 20$$

Mikroállapotok száma: 164

$$f_{BE}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$



Illesztés: $k_B T = 4.88507$, $\mu = -0.490276$

Fermi-Dirac- és a Bose-Einstein-eloszlás összehasonlítása

$$N = \sum_i n_i$$

$$U = \sum_i n_i \varepsilon_i$$

$$N = 10$$

$$U = 35$$

$$f_{FD}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$$f_{BE}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

Mikroállapotok száma:

elektron: 98

bozon: 3590

Illesztés:

elektron: $k_B T = 1.96$, $\mu = 4.85$

bozon: $k_B T = 6.95$, $\mu = -1.63$

