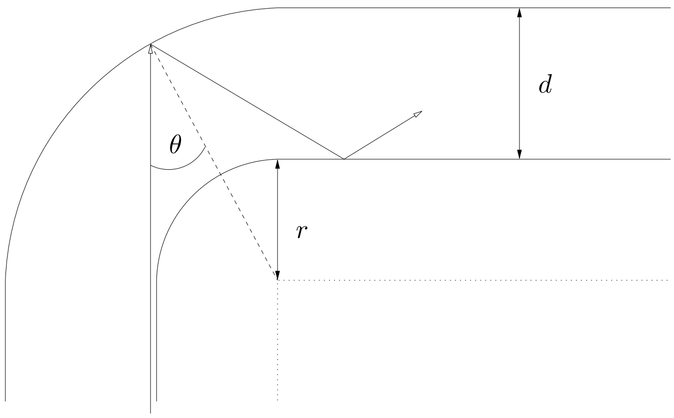
Optika gyakorlat
II. éves fizikus- és informatikus-fizikus hallgatók számára
2005. őszi félév

Geometriai optika

1. feladat.

Milyen vastag burokkal lássuk el az optikai kábelt ahhoz, hogy meghajlás esetén is teljes visszaverődéssel terjedjen benne a fény? Tételezzük fel, hogy a kábel az ábrán látható módon törik meg; itt r a burkolat vastagsága, d a kábel átmérője, $n > 1$ pedig az üvegszálnak a burkolat anyagára vonatkoztatott törésmutatója. További egyszerűsítő feltevés: a meghajlás előtti szakaszon a fénysugarak a kábel falával párhuzamosan terjednek.



Megoldás:

Egyszerű megfontolásokkal belátható, hogy az ábrán jelölt beeső fénysugár beesési szöge bármelyik másik sugárénál kisebb, tehát azt kell biztosítani, hogy ez teljes visszaverődést szenvedjen. Ennek feltétele $\sin\theta > 1/n$. Másrészt, a geometriából adódóan $\sin\theta = \frac{r}{r+d}$. Ennek felhasználásával a teljes visszaverődés feltétele:

$$\frac{r}{r+d} > \frac{1}{n}, \text{ tehát } r > \frac{d}{n-1}$$

2. feladat.

Vizsgáljuk egy fénysugár terjedését olyan közegben, ahol a törésmutató változik a z irányban egy ismert $n(z)$ függvény szerint. Ennélfogva a fénysugár és a z tengely által bezárt szög is változhat valamilyen $\theta(z)$ függvény szerint. Tegyük föl, hogy egy z_0 pontban ismerjük a fénysugár irányát, azaz $\theta(z_0)$-t. Határozzuk meg a fénysugár görbületi sugarát ebben a pontban! Alkalmazzuk a kapott eredményt nehézségi erőtérbeli izotermikus légkörre, feltéve, hogy $n \propto \sqrt{\rho}$, ahol ρ a légkör sűrűsége!

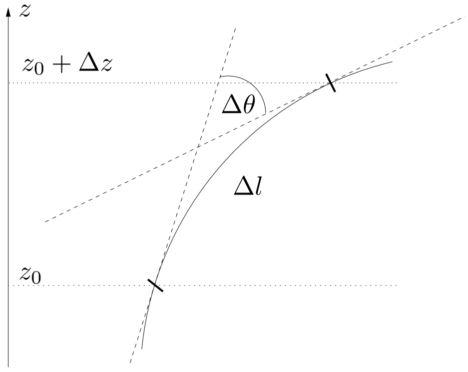
Megoldás:

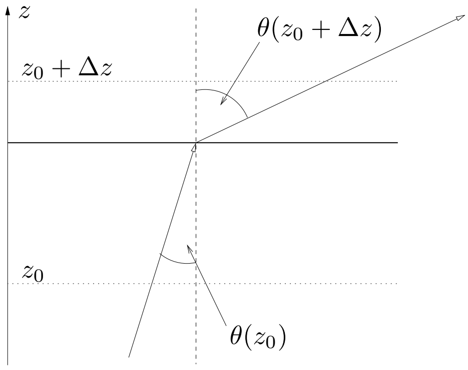
A görbületi sugár a z_0 pontban: $R(z_0) = |\lim_{\Delta z \to 0}(\Delta l/\Delta\theta)|$, ahol Δl a z_0 és $z_0 + \Delta z$ között húzódó pályaszakasz hossza, $\Delta\theta$ pedig a görbéhez a z_0 és a $z_0 + \Delta z_0$ pontokban húzott érintők által bezárt szög. A definíciót átalakítva:

$$R(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\Delta l}{\Delta z}\left|\frac{\Delta z}{\Delta\theta}\right|\right) = \left[\lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\Delta l}{\Delta z}\right)\right]\frac{1}{|\theta'(z_0)|}.$$

A szorzat első tényezője geometriai megfontolásokkal egyszerűen meghatározható:

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\Delta l}{\Delta z}\right) = \frac{1}{\cos[\theta(z_0)]}.$$





A szorzat második tényezőjének meghatározásához közelítsük a fénysugár z_0 és $z_0 + \Delta z$ közötti terjedését egyetlen töréssel, melynek során a fénysugár az $n(z_0)$ törésmutatójú közegből az $n(z_0 + \Delta z)$ törésmutatójú közegbe érkezik. Erre a törésre a Snellius–Descartes-törvény:

$$\frac{\sin(\theta(z_0))}{\sin[\theta(z_0 + \Delta z)]} = \frac{n(z_0 + \Delta z)}{n(z_0)}$$

A bal oldalon szereplő kifejezés nevezőjét fejtsük Taylor-sorba z_0 körül lineáris rendig a következőképpen:

$$\frac{1}{\sin[\theta(z_0 + \Delta z)]} \approx \frac{1}{\sin[\theta(z_0)]} - \Delta z \frac{\cos[\theta(z_0)]\theta'(z_0)}{\sin^2[\theta(z_0)]}$$

Ezt beírva a Snellius–Descartes-törvénybe, valamint abban a jobb oldal számlálóját is sorbafejtve kapjuk, hogy

$$1 - \Delta z \mathrm{ctg}[\theta(z_0)]\theta'(z_0) = 1 + \Delta z \frac{n'(z_0)}{n(z_0)}.$$

Átrendezve:

$$\frac{1}{\theta'(z_0)} = -\frac{n(z_0)}{n'(z_0)} \mathrm{ctg}[\theta(z_0)]$$

Tehát a görbületi sugár a z_0 pontban:

$$R(z_0) = \frac{1}{|[\ln \circ n]'(z_0) \sin[\theta(z_0)]|}$$

Nehézségi erőtérbeli izotermikus légkörben a levegő sűrűségének függése a magasságtól $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{Mg}{R_0 T} z\right)$, ahol M a levegő moláris tömege, g a nehézségi gyorsulás, R_0 az egyetemes gázállandó és T a hőmérséklet. Emiatt a törésmutató z-függése $n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{Mg}{2R_0 T} z\right)$ alakú, így $(\ln \circ n)(z) = \ln(n_0) - \frac{Mg}{2R_0 T} z$, tehát $(\ln \circ n)'(z) = -\frac{Mg}{2R_0 T}$ Ebből a végeredmény:

$$R(z_0) = \frac{2R_0 T}{Mg} \frac{1}{|\sin[\theta(z_0)]|}$$

3. feladat.

Sík vízfelületre fénysugár esik. A víz törésmutatója $n = 4/3$. Milyen beesési szög esetén lesz merőleges a megtört és a visszavert fénysugár iránya? (Avagy: mekkora a Brewster-szög?)

Megoldás:

Jelölje a beesési szöget α; ez természetesen megegyezik a visszaverődési szöggel. A törési szöget jelölje β. A feladat szövegének megfelelő beesési szög esetén $\alpha + \beta = \pi/2$, így a Snellius–Descartes-törvény alapján $\sin\alpha = n \sin\beta = n \sin(\pi/2 - \alpha) = n \cos\alpha$, tehát $\alpha = \mathrm{arctg}(n) \approx 0.93 \approx 53^o$.

4. feladat.

Két közeg sík határfelületen érintkezik. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a beeső fénysugár a sűrűbb közegből érkezik. A Brewster-szöget jelölje θ_{B}, a teljes visszaverődés határszögét pedig θ_{h}. Tegyük fel továbbá, hogy fennáll a

$$\frac{\sin\theta_{\mathrm{h}}}{\sin\theta_{\mathrm{B}}} = \eta = 1.28 \tag{1}$$

egyenlőség. Mekkora a sűrűbb közegnek a ritkábbra vonatkoztatott törésmutatója?

Megoldás:

Jelölje a kérdésben szereplő relatív törésmutatót n. Ismeretes, hogy a teljes visszaverődés határszögére fennáll a $\sin\theta_{\mathrm{h}} = 1/n$ egyenlőség, valamint hogy a Brewster-szögre $\mathrm{tg}\theta_{\mathrm{B}} = 1/n$. Ezek segítségével már felírható a feladatban szereplő hányados, mint az n függvénye:

$$\eta = \frac{\sin\theta_{\mathrm{h}}}{\sin\theta_{\mathrm{B}}} = \frac{\sin\theta_{\mathrm{h}}}{\frac{\mathrm{tg}\theta_{\mathrm{B}}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta_{\mathrm{B}}}}} = \frac{1/n}{\frac{1/n}{\sqrt{1+(1/n)^2}}} = \sqrt{1+(1/n)^2}, \tag{2}$$

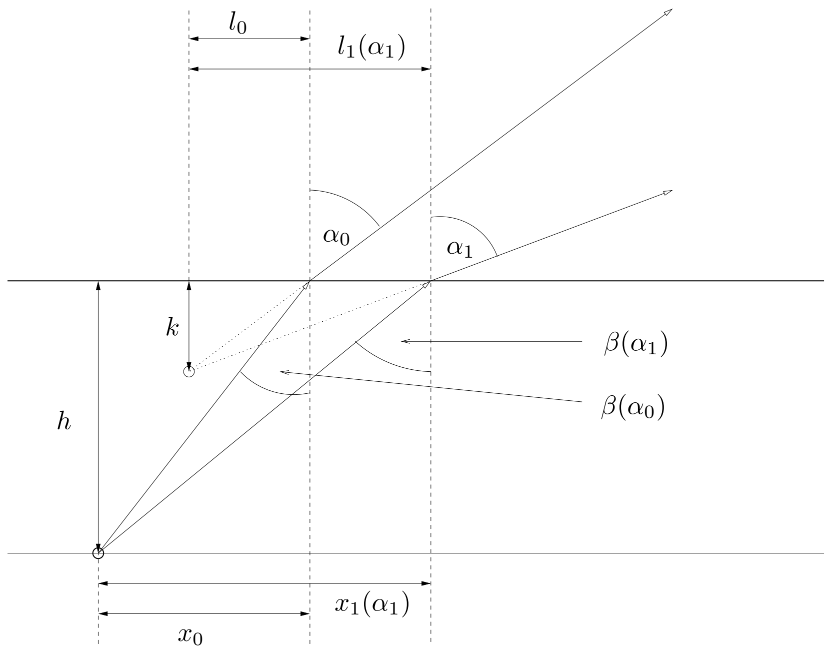
tehát $n = (\eta^2 - 1)^{-1/2} \approx 1.25$.

5. feladat.

A h mélységű medence szélén álló egyszemű ember a víz alján lévő követ nézi. Tegyük fel, hogy a kő látszólagos iránya és a vízfelület normálisa által bezárt szög α_0. Milyen mélyen látja az ember a követ?

Megoldás:

Ha az ember szeme pontszerű lenne abban az értelemben, hogy csak egyetlen fénysugarat tudna érzékelni, akkor a kép távolságát nem érzékelné. Ehhez legalább két fénysugarat kell látnia, melyek látszólagos meghosszabbításainak metszéspontjában látszik a kép. Ezért a megoldásban feltételezzük, hogy a szem az α_0 szögnek megfelelően beérkező fénysugáron kívül egy másik, α_1 szögben érkező sugarat is érzékel; így kiszámítjuk a kép függőleges pozícióját, végül pedig vesszük az $\alpha_1 \to \alpha_0$ határesetet.



Világos, hogy tetszőleges α törési szög esetén a Snellius–Descartes-törvény meghatározza a $\beta(\alpha)$ beesési szöget. Másrészt, a kő látszólagos pozíciója függ α_1 megválasztásától. Geometriai megfontolásokból az ábrán látható távolságokra:

$$x_0 = h\mathrm{tg}[\beta(\alpha_0)], \qquad l_0 = k(\alpha_1)\mathrm{tg}(\alpha_0),$$
$$x_1(\alpha_1) = h\mathrm{tg}[\beta(\alpha_1)], \qquad l_1(\alpha_1) = k(\alpha_1)\mathrm{tg}(\alpha_1),$$
$$x_1(\alpha_1) - x_0 = l_1(\alpha_1) - l_0.$$

Ezekből k a következőképpen fejezhető ki:

$$k(\alpha_1) = h\frac{\mathrm{tg}[\beta(\alpha_1)] - \mathrm{tg}[\beta(\alpha_0)]}{\mathrm{tg}(\alpha_1) - \mathrm{tg}(\alpha_0)}$$

Képezve az $\alpha_1 \to \alpha_0$ határesetet, és felhasználva a l'Hospital-szabályt:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{\alpha_1 \to \alpha_0} [k(\alpha_1)] = \lim_{\alpha_1 \to \alpha_0} \left\{ h\frac{\mathrm{tg}[\beta(\alpha_1)] - \mathrm{tg}[\beta(\alpha_0)]}{\mathrm{tg}(\alpha_1) - \mathrm{tg}(\alpha_0)} \right\} = \\ &= h\left[\frac{(\mathrm{tg} \circ \beta)'}{\mathrm{tg}'}\right](\alpha_0) = h\left[(\cos^{-2} \circ \beta) \cdot \cos^2 \cdot \beta'\right](\alpha_0) = h\frac{\cos^2(\alpha_0)}{\cos^2[\beta(\alpha_0)]}\beta'(\alpha_0) \end{aligned}$$

Valójában készen is vagyunk: β ismert függvény, hiszen a Snellius–Descartes-törvényből $\beta(\alpha) = \arcsin[\sin(\alpha)/n]$, így mind $\beta'(\alpha_0)$, mind pedig $\cos^2[\beta(\alpha_0)]$ meghatározható:

$$\begin{aligned} \beta' &= \left[\arcsin \circ \frac{\sin}{n}\right]' = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\sin}{n}\right)^2\right]^{1/2}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos = \frac{\cos}{\left[n^2 - \sin^2\right]^{1/2}}, \text{ és} \\ \cos^2 \circ \beta &= 1 - \sin^2 \circ \beta = 1 - \sin^2 \circ \arcsin \circ \frac{\sin}{n} = 1 - \left(\frac{\sin}{n}\right)^2 = \frac{n^2 - \sin^2}{n^2}. \end{aligned}$$

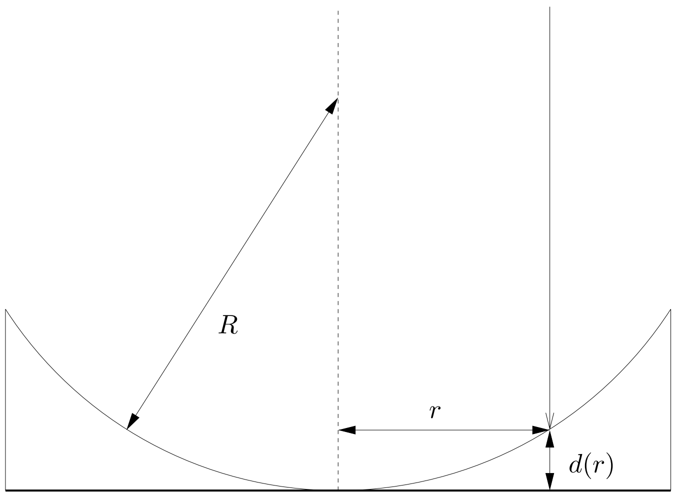
Ezeket az eredményeket alkalmazva a k-ra kapott képletben, a látszólagos mélységre ez adódik:

$$k = h\frac{n^2 \cos^3(\alpha_0)}{[n^2 - \sin^2(\alpha_0)]^{3/2}}.$$

Newton-gyűrűk

1. feladat.

Az ábrán látható optikai lencse n törésmutatójú anyagból készült; alulról egy tökéletes fényvisszaverő sík, felülről pedig egy R sugarú homorú gömbfelület határolja. Tegyük fel, hogy a lencsére a síkra merőlegesen monokromatikus, λ hullámhosszú fény esik. Feltételezve, hogy a nyaláb egy része már a gömbfelületen visszaverődik, és elhanyagolva a határfelületeken létrejövő fénytörés és -visszaverődés hatását, adjuk meg a létrejövő intenzitásmaximumok pozícióját!



Megoldás:

Vizsgáljunk egy, a szimmetriatengelytől r távolságban beérkező fénysugarat! Az n törésmutatójú anyagban a fény hullámhossza $\lambda_n = \lambda/n$. Másrészt, a síkról visszavert fényhullám π fázistolást szenved. Ennélfogva a gömbfelületről és a síkról visszavert fénysugarak fázisa közötti különbség

$$\Delta\phi(r) = 2d(r)\frac{2\pi}{\lambda_n} - \pi = \frac{4\pi d(r) n}{\lambda} - \pi,$$

ahol $d(r)$ az ábrán jelölt szakasz hossza. A két fénysugár akkor produkál konstruktív interferenciát – azaz intenzitás-maximumot –, ha ez a fáziskülönbség 2π egész számú többszöröse, $\Delta\phi(r) = 2\pi m$. Ebből az intenzitás-maximumokhoz tartozó $d(r)$-ek kifejezhetők:

$$d(r) = \frac{(2m+1)\lambda}{4n}.$$

Geometriai megfontolásokból $d(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2}$, amiből az iménti feltétel:

$$R - \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{(2m+1)\lambda}{4n}.$$

Ebből egyszerű átrendezéssel megkapható, hogy az intenzitás-maximumok olyan koncentrikus körökön helyezkednek el, melyek sugarai:

$$r_m = \sqrt{\frac{2m+1}{2n}\lambda R - \left(\frac{2m+1}{4n}\right)^2 \lambda^2} \approx \sqrt{\frac{2m+1}{2n}\lambda R},$$

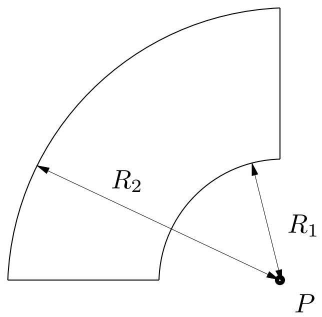
ha $R \gg \lambda$.

Megjegyzés: a fenti interferencia-jelenség könnyebben megvalósítható egy olyan elrendezéssel, amelyben egy domború lencse nyugszik egy vízszintes fényvisszaverő felületen. Természetesen ilyenkor a lencse és a sík felület közötti levegőréteg játssza azt a szerepet, amit a fenti feladatban a homorú üveglencse. Az interferencia-maximumok a fenti meggondolással kiszámíthatók.

Diffrakciós jelenségek

1. feladat.

Az ábrán látható résre monokromatikus, λ hullámhosszú fény esik. Számítsuk ki az akadály síkjára merőleges, a P ponton átmenő tengelyen mérhető intenzitást az akadály síkjától való távolság függvényében! Használjuk a Kirchhoff-féle skalárhullám-elmélet Fresnel-közelítését!



Megoldás:

A Fresnel-közelítés szerint a kiszemelt pontbeli térerősséget a következő integrál adja meg:

$$U_{\text{Fresnel}}(L) = C\frac{e^{ikL}}{L}\int_S U(\boldsymbol{r})e^{ik\frac{r^2}{2L}}\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

ahol $k = 2\pi/\lambda$, $C = k/(2\pi i)$, L a megfigyelési pont távolsága az akadálytól, S az áteresztő felület, $U(\boldsymbol{r})$ pedig a térerősség az áteresztő felület $\boldsymbol{r}$ pontjában. A térerősségből az intenzitás az $I_{\text{Fresnel}}(L) = |U_{\text{Fresnel}}(L)|^2$ összefüggésből számolható ki.

Feltéve, hogy a térerősség a rés minden pontjában U_0, a térerősség az említett tengelyen L távolságban:

$$\begin{aligned}
U_{\text{Fresnel}}(L) &= CU_0\frac{e^{ikL}}{L}\int_S e^{i\pi\frac{x^2+y^2}{\lambda L}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = CU_0\frac{e^{ikL}}{L}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{R_1}^{R_2} e^{i\pi\frac{r^2}{\lambda L}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \\
&= CU_0\frac{e^{ikL}}{L}\frac{\pi}{2}\left[\frac{\lambda L}{2\pi i}e^{i\pi\frac{r^2}{\lambda L}}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{CU_0 e^{ikL}\lambda}{4i}\left(e^{i\pi\frac{R_2^2}{\lambda L}} - e^{i\pi\frac{R_1^2}{\lambda L}}\right) = \\
&= \frac{CU_0\lambda}{2}e^{ikL}e^{i\pi\frac{R_2^2+R_1^2}{2\lambda L}}\sin\left(\frac{R_2^2-R_1^2}{2\lambda L}\pi\right).
\end{aligned}$$

Ebből az intenzitás:

$$I_{\mathrm{Fresnel}}(L) = |U_{\mathrm{Fresnel}}(L)|^2 = \left(\frac{CU_0\lambda}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2\lambda L}\pi\right).$$

2. feladat.

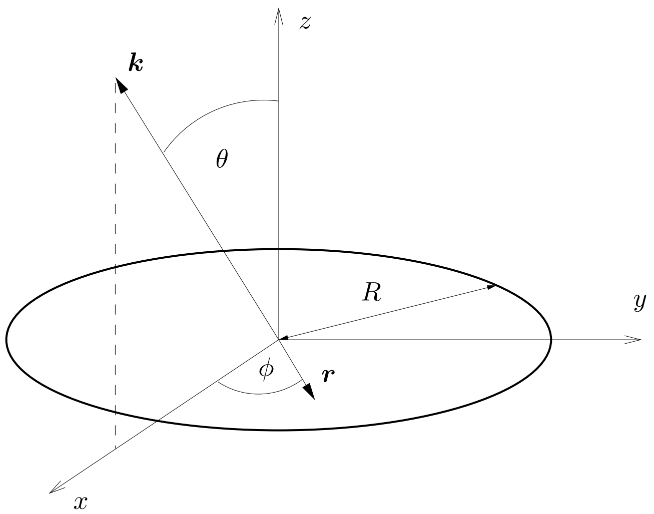
Homogén intenzitás-eloszlású, monokromatikus fénynyaláb esik egy kör alakú résre. Határozzuk meg a résen létrejövő Fraunhofer-diffrakció intenzitás-eloszlását!

Megoldás:

Az akadálytól távol, az $\boldsymbol{e}$ irányban ($|\boldsymbol{e}| = 1$) a térerősség általában

$$U(\boldsymbol{e}) = \frac{CU_0 e^{ikL}}{L} \int_S e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^2\boldsymbol{r} =: C_0 \int_S e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^2\boldsymbol{r} \tag{4}$$

alakú, ahol $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}$, a többi jelölés pedig megfelel az előző feladat jelöléseinek. A feladatnak megfelelő konfiguráció az ábrán látható.



A rendszer z tengely körüli forgásszimmetriája miatt a $\boldsymbol{k}$ vektort vehetjük az x-z síkban fekvőnek. Jelölje a hullámszámvektor és az z tengely által bezárt szöget θ.

$$U(\theta) = C_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-ikr\sin\theta\cos\phi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi.$$

Bevezetve az $x := kr\sin\theta$ változót:

$$U(\theta) = \frac{C_0}{k^2 sin^2\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{kR\sin\theta} e^{-ix\cos\phi} x\mathrm{d}x\mathrm{d}\phi.$$

Felhasználjuk a következő azonosságot:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix\cos\phi} \mathrm{d}\phi = J_0(x).$$

Ezzel az kiszámítandó integrál:

$$U(\theta) = \frac{C_0 2\pi}{k^2 \sin^2\theta} \int_0^{kR\sin\theta} J_0(x) x\mathrm{d}x.$$

Most felhasználunk egy másik azonosságot:

$$\int_0^z tJ_0(t)\mathrm{d}t = zJ_1(z).$$

Ezzel kapjuk, hogy:

$$U(\theta) = C_0 2\pi R^2 \frac{J_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}.$$

Az intenzitás az imént megkapott térerősség négyzete:

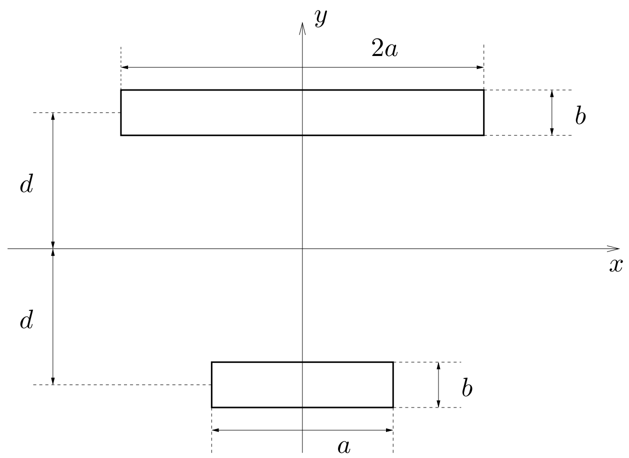
$$I(\theta) = (|C_0|\pi R^2)^2 \left(\frac{2J_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}\right)^2 =: I_0 \left(\frac{2J_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}\right)^2.$$

Ennek az intenzitás-eloszlásnak a $\theta = 0$-ban van maximuma. Ismert továbbá, hogy $J_1(x) \approx \frac{x}{2}$, ha $x \ll 1$, tehát a maximális intenzitás

$$I_{\max} = I(0) = (|C_0|\pi R^2)^2 = I_0.$$

3. feladat.

Határozzuk meg a Fraunhofer-elhajlási képet az ábrán látható kétlyukú interferencia-kísérletben!



Megoldás:

A (4) integrál kiértékelése az első lépés. Esetünkben jelölje az $\boldsymbol{e}$ irányvektor x és y irányú komponenseit rendre p és q. Ekkor a térerősség a megadott irányban:

$$U(p,q) = C_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \int_{-d-\frac{b}{2}}^{-d+\frac{b}{2}} \mathrm{d}y e^{-ik(px+qy)} + \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{d-\frac{b}{2}}^{d+\frac{b}{2}} \mathrm{d}y e^{-ik(px+qy)}.$$

Az exponenciális függvény egyszerűen integrálható ($\int e^{ax}\mathrm{d}x = e^{ax}/a$), így adódik, hogy:

$$U(p,q) = -\frac{C_0}{k^2pq}\left(e^{ikq\frac{b}{2}} - e^{-ikq\frac{b}{2}}\right)\left[e^{ikqd}\left(e^{ikp\frac{a}{2}} - e^{-ikp\frac{a}{2}}\right) + e^{-ikqd}\left(e^{ikpa} - e^{-ikpa}\right)\right].$$

Lehetőség szerint szeretnénk megszabadulni a komplex mennyiségektől, ezért felhasználjuk az $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$ azonosságot. Ezzel

$$U(p,q) = \frac{4C_0}{k^2pq}\sin(kq\frac{b}{2})\left[e^{ikqd}\sin(kp\frac{a}{2}) + e^{-ikqd}\sin(kpa)\right].$$

Az intenzitás kifejezéséhez felhasználjuk az $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$ azonosságot is:

$$I(\boldsymbol{e}) = I(p,q) = U^*(p,q)U(p,q) = \left(\frac{4|C_0|}{k^2pq}\right)^2 \sin^2(kq\frac{b}{2})\left[\sin^2(kp\frac{a}{2}) + \sin^2(kpa) + 2\sin(kp\frac{a}{2})\sin(kpa)\cos(2kqd)\right].$$

Paraxiális optikai rendszerek

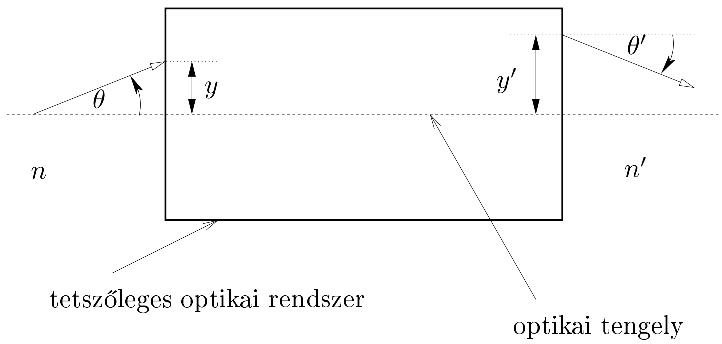
Paraxiális leképezések építőkövei

A gyakorlaton használt formalizmus két ponton eltér attól, ami az előadáson szerepelt: egyrészt, egy tetszőleges paraxiális leképezés $\mathbf{T}$ mátrixát itt az

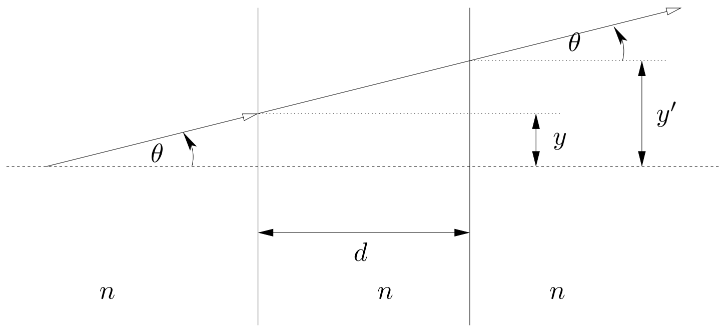
$$\begin{pmatrix} y' \\ n'\theta' \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} y \\ n\theta \end{pmatrix}.$$

egyenlőséggel definiáljuk, ahol n és n' rendre azon közegek törésmutatója, ahonnan a fénysugár érkezik, illetve ahol az elhagyja az optikai rendszert. Ennek következménye, hogy egy általános $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alakú leképezés fókusztávolsága, azaz a fókuszpont és a fősík távolsága $f = -\frac{n'}{c}$.

Másrészt, a számításokban a szögeknek nem csak a nagyságát vesszük figyelembe, hanem azoknak előjelet, irányítást is tulajdonítunk a szokásos módon. Ezen módosítások miatt az elemi paraxiális leképezések $\mathbf{T}$ mátrixai egy kicsit más alakot fognak ölteni, mint ahogy az az előadáson szerepelt.



Szabad terjedés



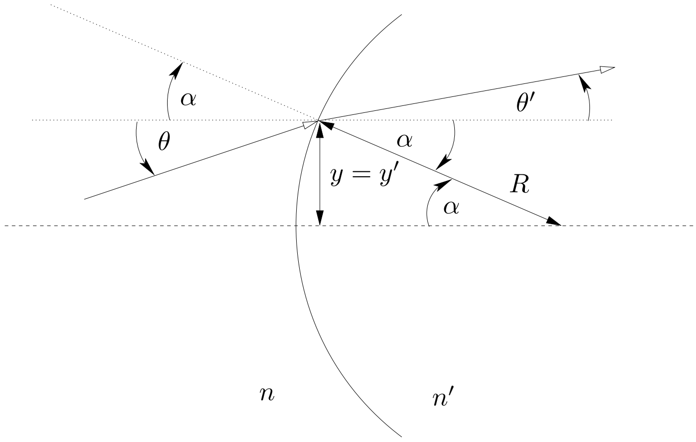
Vizsgáljuk egy paraxiális fénysugár balról jobbra történő terjedését egy d hosszú, konstans n törésmutatójú tartományban. Világos, hogy a fénysugár irányszöge nem változik, tehát $n\theta' = n\theta$. Az y távolság megváltozása viszont véges, $y' = y + d \cdot \mathrm{tg}\theta \approx y + \frac{d}{n} \cdot n\theta$, hiszen paraxiális sugarakról van szó. Tehát a transzfermátrixszal kifejezve:

$$\begin{pmatrix} y' \\ n\theta' \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} y \\ n\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ n\theta \end{pmatrix}.$$

Mivel jobbról balra történő terjedés esetén a fénysugár irányszögének előjele megváltozik, ezért ilyenkor a mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gömb alakú törőfelület



A törés nyomán az optikai tengelytől való távolság nem változik, azaz $y' = y$. Az ábra alapján a $\alpha \approx -\frac{y}{R}$, tehát a Snellius–Descartes-törvény linearizált alakja

$$\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta' - \alpha)} \approx \frac{\theta - \alpha}{\theta' - \alpha} = \frac{n'}{n}, \text{ amiből}$$

$$n'\theta' = n\theta + \frac{n - n'}{R} y,$$

tehát a transzfermátrix:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{R} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ez a helyzet tehát akkor, ha az n' törésmutatójú tartomány a konvex. Ha a gömbfelület középpontja az n törésmutatójú tartományban van, akkor a transzfermátrix az előzőtől kicsit eltérő,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-n'}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

alakú. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a mátrix mindkét esetben () alakú, és a homorú törőfelülethez tartozó sugarat negatívnak vesszük.

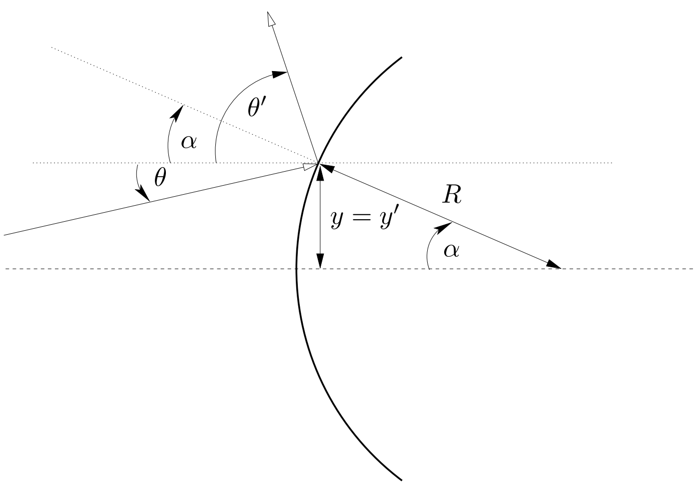
Megjegyezzük még, hogy $\det \mathbf{T} = 1$, továbbá hogy

$$\lim_{R\to\infty} (\mathbf{T}(R)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ami természetesen éppen a sík törőfelületen való áthaladás transzfer-mátrixa.

Gömb alakú visszaverő felület (gömbtükör)

Vizsgáljuk a domború gömbtükör esetét. Az optikai tengelytől való távolság nem változik a reflexió során, $y' = y$.



Az ábráról leolvasható, hogy $\theta - \alpha = \alpha - \theta'$, továbbá a paraxiális közelítés miatt $\alpha \approx -\frac{y}{R}$. Ezekből következik, hogy

$$n\theta' = -\frac{2n}{R} y - n\theta,$$

azaz a transzfermátrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}.$$

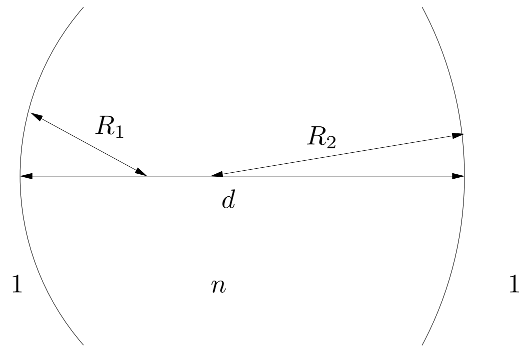
Ehhez a meggondoláshoz hasonlóan látható be, hogy ha jobbról balra terjedő fénysugár érkezik egy homorú, R sugarú tükörre, akkor ugyanez lesz a leképezés mátrixa. Ha azonban balról jobbra terjedő fénysugár esik egy homorú tükörre, vagy jobbról balra terjedő egy domború tükörre, akkor a mátrix:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}.$$

Feladatok

1. feladat.

Határozzuk meg az ábrán látható vastag lencse $\mathbf{T}$ mátrixát és fókusztávolságát (balról jobbra terjedő fénysugarakra)!



Megoldás:

A vastag lencse mátrixa a fent megismert „építőkövekből” a következőképpen alkotható meg:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{R_2} \mathbf{T}_d \mathbf{T}_{R_1},$$

ahol

$$\mathbf{T}_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{T}_d = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \text{és } \mathbf{T}_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Fontos, hogy a mátrixokat a megfelelő sorrendben szorozzuk össze, hiszen a mátrixszorzás nem kommutatív. A szorzást elvégezve adódik:

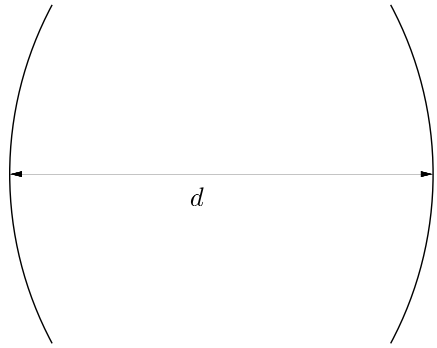
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1-n}{n}\frac{d}{R_1} & \frac{d}{n} \\ \frac{1-n}{R_1 R_2 n}\left(nR_1 + nR_2 + (1-n)d\right) & 1 + \frac{1-n}{n}\frac{d}{R_2} \end{pmatrix}.$$

Ebből a fókusztávolság:

$$f = -\frac{1}{T_{21}} = \frac{R_1 R_2 n}{(n-1)(nR_1 + nR_2 + (1-n)d)}$$

2. feladat.

Az ábrán látható optikai rendszer két, egyaránt R sugarú homorú gömbtükörből áll, ezek között a fény szabadon terjed. Lássuk be, hogy ebben a rendszerben $d = R$ esetén minden paraxiális fénysugár periodikus pályát jár be!



Megoldás:

Kövessük egy olyan fénysugár útját, amelyik a bal oldali tükörről indul! Először egy d hosszú szakaszon szabadon terjed, ennek mátrixa

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hiszen a fénysugár optikailag homogén közegben terjed, így a törésmutató 1-nek vehető. A fénysugár ezután visszaverődik a jobb oldali tükrön, ennek mátrixa

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix}.$$

Ezt követően jobbról balra terjed d távolságnyit:

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Végül a jobb oldali tükörről verődik vissza:

$$\mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix}.$$

A négy mátrixot összeszorozva, és a szorzatként kapott mátrixot $\mathbf{T}$-nek elnevezve, továbbá kihasználva, hogy $d = R$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_4\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Világos, hogy $\mathbf{T}^2$ éppen az egységmátrix, ezért teljesül a feladatban szereplő állítás.