A szupravezető kondenzátum tulajdonságainak áttekintése.

Létezik egy kondenzált állapot, amelynek struktúráját elektron pár állapotok jellemzik. Ezen kondenzátum „hullámfüggvénye" legyen Ψ.

Két fenomenológikus elmélet van ezen állapotra.

London-BCS elmélet

Ez a homogén kondenzátum dinamikáját (elektrodinamikáját) írja el.

$$\frac{(-i\hbar\nabla - 2eA)^2}{2(2m)}\,\Psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - 2e\Phi\right)\Psi$$

Ginzburg-Landau-BCS elmélet

Ez egy nem homogén kondenzátum termodinamikai és magnetosztatikai tulajdonságait írja le

$$\left[\frac{(-i\hbar\nabla - 2eA)^2}{2(2m)} + \beta|\Psi|^2\right]\Psi = -\alpha(T)\Psi$$

Mérték invariancia:
$\Phi(r,t)$ a skalár potenciál, $A(r,t)$ a vektorpotenciál
Mágneses tér $B = \nabla\times\mathrm{A}$, elektromos tér $E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$
Ha $A' = A + \nabla\chi$ és $\Phi' = \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$, akkor $B' = B$, és $E' = E$

A London elmélet főbb tulajdonságai

Schrödinger egyenlet

$$\frac{(-i\hbar\nabla - 2eA)^2}{2(2m)}\,\Psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - 2e\Phi\right)\Psi$$

A makroszkópikus hullámfüggvény

$$\Psi = \mathrm{a}e^{i\varphi}\ ;\ \frac{n_S}{2} = a^2$$

n_S a szupravezető elektronos sűrűsége, a kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial n_S}{\partial t} + \nabla j^S = 0$$

j^S a szupraáram sűrűsége

$$j^S = n_S v^S\ ,\quad v^S = \frac{1}{2m}(\hbar\nabla\varphi - 2eA)$$

Ezeket a Schődinger egyenetbe helyettesítve a Josephson egyenletet kapjuk

$$-\left(i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2e\Phi\right) = \frac{2m}{2}v_S^2 - \frac{\hbar^2\nabla^2 a}{2(2m)a}$$

A jobb oldal utolsó tagja az un. Bohm potenciál.

Kváziklasszikus közelítésben elhagyjuk a Bohm potenciált, a klasszikus mozgásegyenletet használva

$$m\frac{dv_S}{dt} = e(E + v_S \times \mathrm{B})$$

Maxwell egyenlet

$$\nabla \times \mathrm{B} = \mathrm{e}j_S = en_S v_S$$

Homogén esetben

$$n_S = 2a_0^2\,, \qquad v_S = -\frac{e}{m}A$$

ebből a mágneses tér leárnyékolása

$$\nabla^2 A = \frac{A}{\lambda_L^2}$$

ahol a London féle behatolási mélység

$$\lambda_L^2 = \frac{m}{n_S e^2}$$

A London-BCS elmélet magyarázatot ad

- állandó (csillapodás nélküli) áram
- a mágneses tér leárnyékolása, a London behatolási mélység λ_L
- fluxoid- és fluxus kvantálás
- Josephson effektus
- mérték szimmetria, mérték ivariancia sérülése

Nem tudja magyarázni

- $2e$ töltés eredete (az eredeti London elméletben)
- $n_S(T) = 2|\Psi|^2$ mikroszkópikus oka
- I- és II-fajú szupravezetők
- Nem lokális effektusok (felületi tulajdonságok, vortexek, vortex-rács stb)
- Lokális tulajdonságok (fajhő, szuszceptibilitás, behatolási mélység ...) hőmérsékletfüggése
- a normál elektronok jelenléte és tulajdonságai

Ginzburg-Landau elmélet

Schrödinger egyenlet

$$\left[\frac{(-i\hbar\nabla - 2eA)^2}{2(2m)} + \beta|\Psi|^2\right]\Psi = -\alpha(T)\Psi$$

a makroszkópikus hullámfügvény

$$\Psi = \mathrm{a}e^{i\varphi}\,;\ \frac{n_S}{2} = a_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Időfüggetlen tehát a kontinuitási egyenlet $\nabla j_S = 0$

A szupraáram sűrűsége

$$j_S = n_S v_S\,,\ \ v_S = \frac{1}{2m}(\hbar\nabla\varphi - 2eA)$$

Josephson egyenlet

$$\frac{\hbar^2\nabla^2 a}{2(2m)} = \frac{2m}{2}v_S^2 a - \alpha a + \beta a^3$$

elosztva $|\alpha|a_0$-al, bevezetve a dimeziómentes $f(r) = {}^{a(r)}/_{a_0}$ Ginzburg-Landau rendparamétert

$$\xi_{GL}^2\nabla^2 f = \xi_{GL}^2\left(\frac{2m}{\hbar}v_S\right)^2 f - f + f^3$$

ahol a ξ_{GL} Ginzburg-Landau koherencia hossz

$$\xi_{GL}^2(T) = \frac{\hbar^2}{2(2m)|\alpha(T)|}$$

Maxwell egyenlet

$$\nabla\times\mathrm{B} = \mathrm{e}j_S = en_S v_S f^2 = -\frac{f^2}{\lambda_L^2}A$$

$$\nabla^2 A = \frac{f^2}{\lambda_L^2}A$$

A BCS alapján (fononcsere a Cooper csatornában)
A normál elektronrendszer gerjesztési spektruma helyett egy energiarés jelenik meg a Fermi felületen.

$$\xi_k = \hbar v_F(k - k_F) \rightarrow E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$$

A rendparaméter abszolut értéke illetve a szupravezető elektronok sűrűsége

$$2a_0^2 = n_S = \frac{n}{2k_BT}\int_0^\infty d\xi_k\left(\frac{1}{\left(\cosh\frac{\xi_k}{2k_BT}\right)^2} - \frac{1}{\left(\cosh\frac{\sqrt{\xi_k^2+\Delta^2}}{2k_BT}\right)^2}\right)$$

ez $T \rightarrow T_c$ esetén $= n\frac{7\zeta(3)}{4}\left(\frac{\Delta}{\pi k_BT}\right)^2$

A Ginzburg-Landau-BCS magyarázatot ad

- állandó (csillapodás nélküli) áram
- a mágneses tér leárnyékolása, a London behatolási mélység λ_L
- I- és II-fajú szupravezetők
- Nem lokális effektusok (felületi tulajdonságok, vortexek, vortex-rács stb)
- Lokáls tulajdonságok (fajhő, szuszceptibilitás, behatolási mélység ...) hőmérsékletfüggése
- Nem lokális effektusok (felületi tulajdonságok, vortexek, vortex-rács stb)
- Fázisátmenetek (mágneses térben vagy anélkül)
- fluxoid- és fluxus kvantálás
- Josephson effektus
- mérték szimmetria, mérték ivariancia sérülése

Nem tudja magyarázni, legalábbis az eredeti GL-elmélet
- $2e$ töltés eredete (az eredeti London elméletben)
- $n_S(T) = 2|\Psi|^2$ mikroszkópikus oka

- dinamika, pl a Josephson effektus
- alacsony hőmérsékleti viselkedés
- a normál elektronok jelenléte és tulajdonságai

A Ginzburg-Landau funkcionál

$$f_{GL} = f_N + \frac{|(-i\hbar\nabla - 2eA)\Psi|^2}{2(2m)} + \frac{B^2}{2} + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4$$

a térbeli hosszúságokat a koherencia hossz egységében mérve és a vektorpotenciált átskálázva

$$A = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L} a$$

ahol az elemi fluxus $\Phi_0 = {}^{h}/_{2e}$

$$f_{GL} = f_N + \frac{n_S}{2}|\alpha|\left(\left|\left(\nabla - \frac{i}{\kappa}a\right)f\right|^2 - |f|^2 + \frac{|f|^4}{2} + (\nabla \times \mathrm{a})^2\right)$$

ahol $\kappa = {}^{\lambda_L}/_{\xi}$ a Ginzburg-Landau paraméter.

${}^{1}/_{\kappa}$ az elektromágneses térhez való való csatolás dimeziómentes paramétere.

A Ginzburg Landau szabadenergia sűrűség funkcionál

$$f_{GL} = f_N + \frac{|(-i\hbar\nabla - 2eA)\Psi|^2}{2(2m)} + \frac{B^2}{2} + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4$$

legyen

$$\Psi = (a_0 + \delta a)e^{i\varphi}$$

A fázis (gauge boson) kitranszformálható $A' = A - \frac{\hbar}{2e}\nabla\varphi$

δa szerint sorfejtve a GL funkcionált

$$f_{GL} = konst + \frac{\hbar^2(\nabla\delta a)^2}{2(2m)} + \frac{B^2}{2} + \frac{\omega_P^2}{c^2}\frac{A'^2}{2} - 2\alpha(\delta a)^2 + O((\delta a)^3)$$

ahol (CGS egységekre visszatérve) a plazma frekvencia

$$\omega_P^2 = \frac{n_S e^2}{m} = \frac{c^2}{\lambda_L^2}$$

a foton tömeg m_A (de Broglie)

$$\lambda_L = \frac{\hbar}{m_A c} = \frac{c}{\omega_P}$$

azaz

$$m_A c^2 = \hbar\omega_P$$

a foton tömege ekvivalens a kondenzátum plazma frekvenciájával!

$$f_{GL} = konst + \frac{\hbar^2(\nabla\delta a)^2}{2(2m)} + \frac{B^2}{2} + \frac{m_A\, c^2}{\hbar^2}\frac{A'^2}{2} + \frac{\mu^2 c^2}{2m}(\delta a)^2 + O((\delta a)^3)$$

Az m_A tömeg A' gauge tér tömege (a foton tömege) $m_A \propto \omega_P \propto \sqrt{n_S}$

A μ tömeg a δa Higgs tér (Higgs boson) tömege $\mu \propto \Delta$

A Ginzburg-Landau (hasonlóan a London) elmlélet csak a kondenzátum tulajdonságaival foglalkozik. Elhagyja a normál elektronok szerepét, a kölcsönhatásokat stb. Emiatt a fenti kép alapjám csak azt tudja mondani, hogy kondenzátum sűrűségfluktuációjának energiája (az amplitúdó módus) véges, a Higgs boson véges tömegű. A kondenzátum amplitúdójának fluktuációja a Cooper párok számának fluktuációja. Egy Coooper pár feltöréséhez (egy Cooper pár eltávolításához) 2Δ energia szükséges. Ez adja meg a Higgs boson tömegét. A legegyszerűbb (BCS) közelítésben az amplítúdó módus energiája kis hullámszámokra

$$\omega^2(q) = 4\Delta^2 + \frac{1}{3}v_F^2 q^2 + i\frac{\pi^2}{24}(v_F q)\Delta$$

A csillapodás oka, ugyanezen energia nemcsak egy Cooper párt tud feltörni, de a betöltött sávból az üres sávba is tud elektront gerjeszteni....

A BCS szerint (lásd feljebb)

$$\omega_P^2 = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{2k_BT}\int_0^\infty d\xi_k\left(\frac{1}{\left(\cosh\frac{\xi_k}{2k_BT}\right)^2} - \frac{1}{\left(\cosh\frac{\sqrt{\xi_k^2+\Delta^2}}{2k_BT}\right)^2}\right)$$

Meg kell jegyezni, hogy $T \to 0$, esetén $n_S = n$, azaz az összes elektron részt vesz a szupravezető fázisban, annak ellenére, hogy a kölcsönhatás csak a Fermi felület körüli szűk energiatartományban különbözik zérustól.

Mérték szimmetria sérülése:
A szupravezető alapállapot energiája független a fázisától. A megvalósuló állapot fázisa rögzített. Hasonló a ferromágneshez. Elvileg bármelyik irányban állhatna a mánesezettség iránya (N(2S+1) irányba), de az egyikbe áll, sérül a forgatási szimmetria. A szupravezető is egy adott fázist kitüntet, sérül a mérték szimmetria. Folytonos szimmetria sérülése Goldstone módust eredményez.

A lokális mérték szimmetria U(1) sérülésének közvetlen következménye az, hogy a Goldstone módust az elektromágneses tér elnyeli. Emiatt a fotonnak lesz egy longitudinális komponense, ami a tömegét jelenti (ez a plazma energia). Ez a szupravezetés és a Meissner effektus alapja.

A lokális mérték invariancia – a töltés megmaradása – azzal biztositott, hogy a vektorpotenciál és a fázis csatolva van, azaz az impulzus helyett a kanonikus impulzus szerepel.

A szupravezető állapot Lagrange függvénye:

Ha elég alacsony hőmérsékleten vagyunk, akkor csak a kondenzátum számít. A kondenzátum amplitúdóját a GL szabad energia rögzíti. A kondenzátum fázisától direkt módon nem függhet mert az nem mérték invariáns. Amitől függhet az a mérték invariáns kombinációja a gauge térnek és a fázisnak, azaz

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int dr \left(\epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}\right) + \mathcal{L}_s\left[\partial_\mu \phi(r) - 2eA_\mu\right]$$

Anyag nélkül a tiszta elektromágneses tér Lagrange függvénye (elméleti fizikusi egységekben $e = 2e = c = h = \hbar = k_B = 2\pi = 1$)

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

ahol

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

így

$$E_i = [\partial_t A - \nabla A_0]_i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = F_{0i}$$

$$B_i = (\nabla \times \mathrm{A})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$$

Az áram és a töltés definiciója

$$J_i = \frac{\delta L_s}{\delta A_i} = -\frac{\delta L_s}{\delta \partial_i \phi}$$

$$\rho = \frac{\delta L_s}{\delta A_0} = -\frac{\delta L_s}{\delta \partial_0 \phi}$$

A kanonikus momentum definiciója

$$\pi = \frac{\delta L_s}{\delta \partial_0 \phi}$$

tehát $\rho = -\pi$. Emiatt a Hamilton függvény nem a ϕ és $\partial_0\phi$ függvénye, hanem ϕ és $-\pi$ függvénye.

A mozgásegyenlet

$$\partial_0\phi = \frac{\delta H_s}{\delta \pi} = -\frac{\delta H_s}{\delta \rho}$$

Ugyanakkor $E = \int dr \rho(r) V(r)$

Tehát

$$\frac{\delta H_s}{\delta \rho(r)} = V(r)$$

azaz $\partial_0\phi(r) = -V(r)$

statikus esetben a rendparaméter fázisa időfüggetlen, azaz $V(r) = 0$

Ez azt jelenti, hogy ha a rendszerben konstans áram folyik $V = 0$. Ez a szupravezetés.

Josephson effektus:

Két szupravezető között vékony szigetelőréteg (junction) van. A junction Lagrange függvénye a két szupravezető fázisának különbségétől függ, ami szintén mérték invariáns

$$L_{junction} = \mathcal{A} F(\Delta\phi)$$

ahol $\mathcal{A}$ a junction területe, $F(\Delta\phi)$ a két fázis különbségének függvénye. A $2e$ töltés miatt

$$F(\Delta\phi) = F(\Delta\phi + n\pi\hbar/e)$$

a mérték invariancia miatt:

$$\Delta\phi = \int dr\,(\nabla\phi - A)$$

Igy az áram

$$J = \frac{\delta L_{junction}}{\delta A} = \mathcal{A} F'(\Delta\phi)\frac{\delta\Delta\phi}{\delta A} = -\mathcal{A} F'(\Delta\phi)$$

Ha a junctionon V feszültség esik, akkor mivel $\partial_0\phi(r) = -V(r)$ tehát

$$\Delta\phi = -Vt + konstans$$

$$J = -\mathcal{A} F'(-Vt + konstans)$$

Miután F periódikus F' is periódikus függvény, így J is az idő periódikus függvénye $\pi\hbar/eV$ periódicitással.